This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

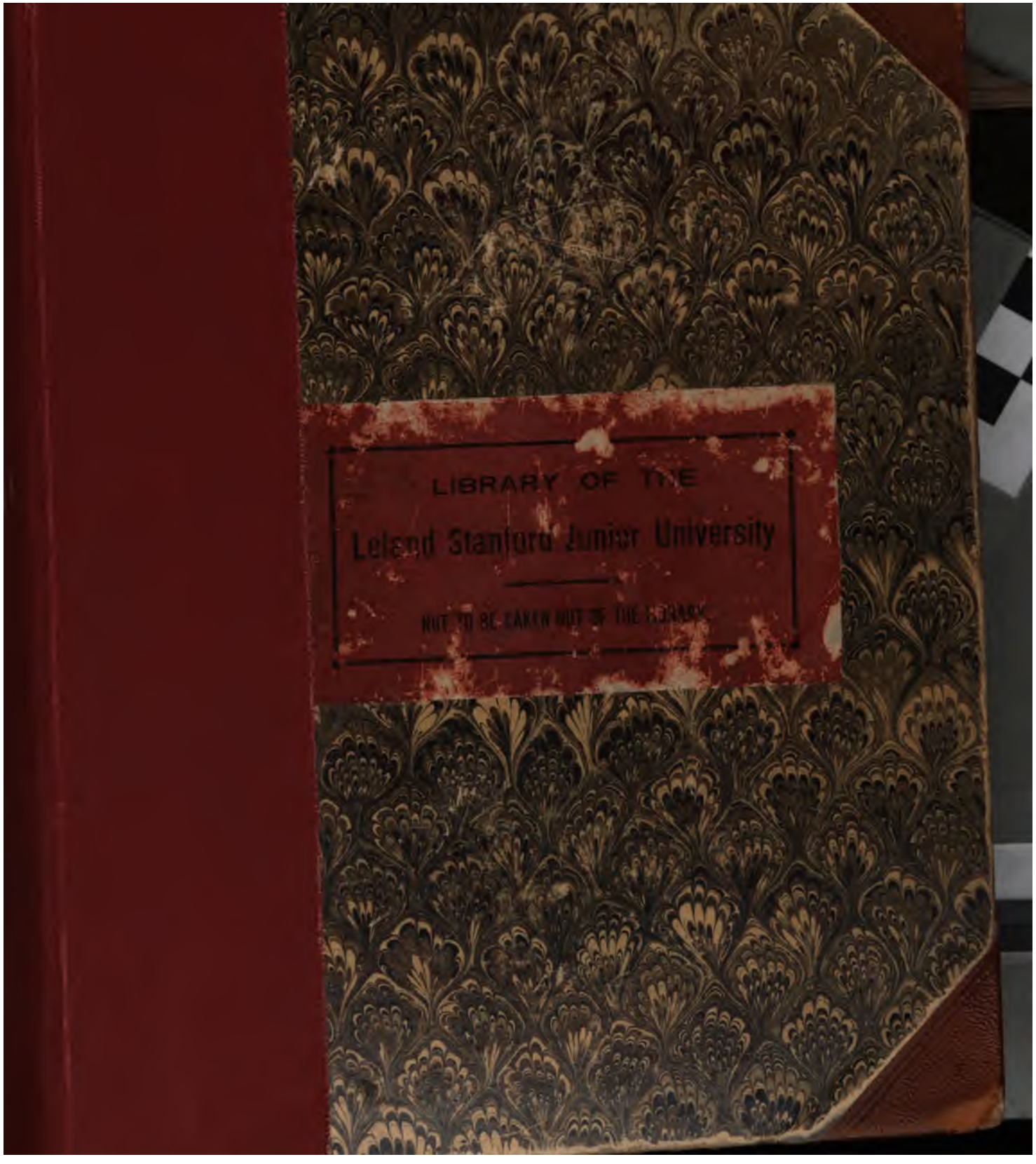
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

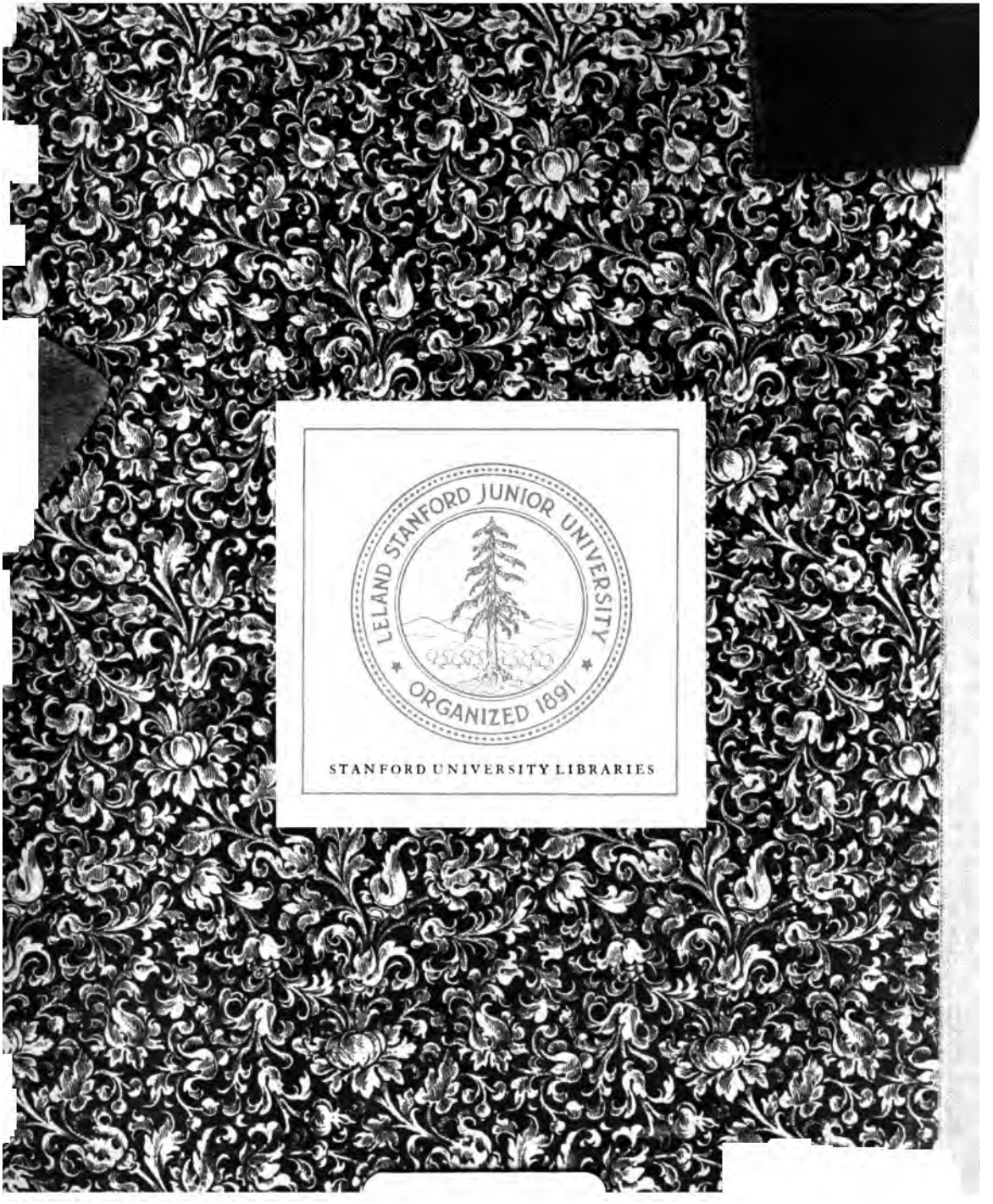
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

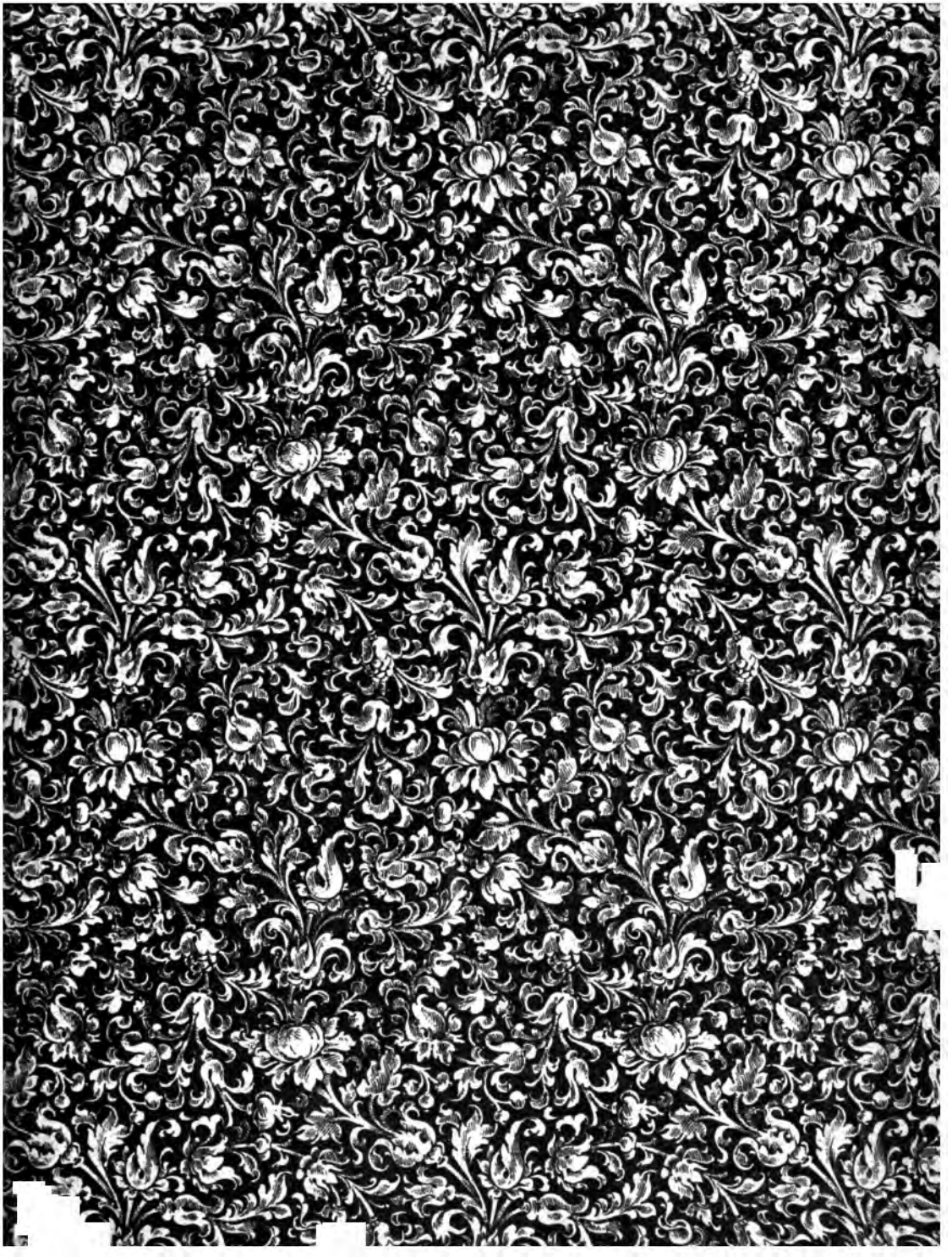
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


LIBRARY OF THE
Leland Stanford Junior University
NOT TO BE TAKEN OUT OF THE LIBRARY


LELAND STANFORD JUNIOR UNIVERSITY
ORGANIZED 1891
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES



016
K64

Einleitung in die höhere Geometrie, I.

Vorlesung,

gehalten im Wintersemester 1892 93

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von Fr. Schilling.

GÖTTINGEN 1893.

LELAND STANFORD JUNIOR
LIBRARY
UNIVERSITY.
P, 20499.

Vorbemerkung.

Die nachstehende Ausarbeitung der von mir im verflossenen Wintersemester 1892—93 gehaltenen Vorlesung habe ich nur mit vielen Bedenken autographieren lassen. Kenner des Gegenstandes werden ja leicht ermessen, wonach ich bei meiner Vorlesung abzielte, und diesem Zielpuncte, wie ich hoffe, ihre Anerkennung nicht versagen. Nun brauche ich die grossen inneren Schwierigkeiten, welche sich der beabsichtigten Darstellung entgegenstellten, kaum zu betonen; dieselben waren für mich um so hinderlicher, als ich auf dem in Betracht kommenden Gebiete seit Jahren nicht mehr selbständig gearbeitet habe. Daneben fühlte ich mich ganz besonders durch den Umstand gehemmt, dass ich bei meinen Zuhörern in keiner Weise gleichförmige Vorkenntnisse voraussetzen konnte. Ich habe darum vielfach elementar ausgeholt und dann wieder hinterher, um die verlorene Zeit einigermassen einzubringen, die weitere Darstellung nur skizzirt. Eine Abgleichung der solcherweise entstandenen Ungleichheiten hätte eine ausführliche Umarbeitung verlangt, zu der keine Zeit war. Ich bitte den Leser, von diesem Standpuncte aus manche Unvollkommenheiten der Darstellung, welche ohne weiteres auffallen, entschuldigen zu wollen. Uebrigens kann ich nur aussprechen, was von allen meinen Autographieen gelten soll, dass ich alle Bemerkungen oder Berichtigungen, die mir aus fachmännischen Kreisen zugehen mögen, mit grösstem Danke entgegennehmen werde; ich werde mir Mühe geben, dieselben bei erneutem Abdrucke oder bei Wiederholung der Vorlesung in gewissenhafter Weise zu benutzen.

Göttingen, den 10. April 1893.

F. Klein.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

Allgemeine Vorbemerkungen.

Functionentheoretische Grundbegriffe 2

Haupteintheilung der Geometrie 6

Ausführungen hierzu, Lehrbücher, Modelle 8

Abschnitt I.: Der allgemeine Coordinatenbegriff.

Ia. Punctcoordinaten.

Hauptübersicht 20

Linearcoordinaten.

Allgemeine Definition. Moebius' barycentrisches Prinzip. Vorzüge des allgemeinsten Ansatzes 22

Plücker's hierhergehörige Entwickelungen 30

Lamé's allgemeine krummlinige Coordinaten 36

Elliptische Coordinaten.

Das System der confocalen F_2 38

Henrici's bewegliches Hyperboloid 44

Die geodätischen Linien auf den F_2 50

Die Fadenconstructionen von Graves und Staude 67

Kreise und Kugeln.

Historisches, Orthogonalbedingung etc. 73

Die Transformation durch reciproke Radien 87

Peaucellier's Geradführung 95

Pentasphärische Coordinaten 98

Anwendungen bei Darboux 107

Specielles über die Dupin'sche Cyclide 111

Neue Objecte der analytischen Geometrie 117

Die Bilineargleichungen u. d. Princip der Dualität 122

Der Fall des Nullsystems 125

Bedeutung desselben in der Mechanik etc. 136

Die geometrische Interpretation der Differentialgleich. 142

Ib. Wechsel des Raumelementes.

Das allgemeine Plücker'sche Princip 149

Dualistische Uebertragungen als Beispiel. Stellung von Poncelet . . 151

Liniengeometrie im Raume.

Liniencoordinaten etc. 160

Lineare Complexe, Congruenzen u. s. f. 168

Der lineare Complex als Raumelement 179

Allgemeine Bezugnahme auf die Theorie der quadratischen Formen . 189

Seite

Liniengeometrie und metrische Geometrie.

Liniengeometrie und pentasphärische Coordinaten 198
Lie's Kugelgeometrie 208
Beziehung zwischen Haupttangentencurven und Krümmungscurven . 217
Historische Ausführungen betr. Kugelgeometrie 226
Das System von Grassmann und Cayley 232
Kreise im Raum 240

Neue Entwickelungen betr. Differentialgleichungen.

Diffglch. erster Ordnung: die Clebsch'schen Connexe 242
Die Elementarformeln der Flächenkrümmung 254
Einführung der Ebenencoordinaten in die Diffglchen. 266

Abschnitt II.: Transformationslehre.

Vorbemerkung 268

IIa. Punkttransformationen.

Lineare Transformation.

Die lineare Transformation als Collineation 270
Perspectograph und Storchschnabel 280
Reliefperspective und malerische Perspective 289

Zur projectiven Geometrie.

Die Eintheilung der ebenen C_3 293
Poncelet und die Lehre vom Doppelverhältniss 296
Steiner und Chasles: die projective Erzeugung höherer Gebilde . . 303
Cayley und v. Staudt: die Einordnung der Metrik 308
Stellung zur Invariantentheorie 314

Weiterentwickelung der projectiven Geometrie.

Gebilde mit linearen Transformationen in sich: die W-Curven, der tetraedrale Complex 326
Projective Durchbildung der Differentialgeometrie 339
Die projectiven Differentialinvarianten der Ebene 341

Imaginäre Elemente.

Imaginärtheorie der confocalen Kegelschnitte 347
Imaginäre Collineationen in ihrer Bedeutung für die Gebilde zweiten Grades 353
Vergleich von einschaligem Hyperboloid und Kugel 357
Minimalcurven und conforme Abbildung 362
Lie's Theorie der Minimalflächen 369

Die Geometrie der reciproken Radien und die stereographische Projection der Kugel.

Erneute Betrachtung der tetracyclischen Coordinaten 373
Die zugehörigen sechsfach unendlich vielen Transformationen . . . 378
Höhere Räume. Der Satz von Liouville 381

Ueberhaupt Linearprojection aus höheren Räumen.

Das Hesse'sche Uebertragungsprincip, mit Verallgemeinerungen . . 388
Zur Theorie der ebenen Configurationen 391
Die graphische Statik und ihre reciproken Figuren 394

Seite

Höhere analytische Puncttransformationen.

Die zugehörige Transformation der Differentiale 401
Die Classification der Pfaff'schen Ausdrücke 403
Von der Integration des Pfaff'schen Problems 412
Quadratische Differentialausdrücke: Gauss 415
Die Differentialparameter bei Beltrami bez. Lamé 418
Riemann's allgemeine Definition des Krümmungsmasses 426
Weitere Literatur betr. quadratische Differentialausdrücke 432

Höhere algebraische Puncttransformationen.

Cremonatransformationen in Ebene und Raum 437
Zugehörige Invarianten. Clebsch's functionentheoretisches Programm 447

IIb. Transformationen mit Wechsel des Raumelements.

Lineare dualistische Transformationen.

Die dualistische Transformation als Berührungstransformation . . . 451
Einführung der (x y z p q) als Raumelemente 457
Vorläufige Angaben über die allgemeinen Berührungstransformationen 464

Erneute Inbetrachtnahme der Kugeln.

Die beiden Arten der Kugelgeometrie und ihre Gruppen 467
Die Kugeln des R_n als Minimalprojection der Puncte des R_{n+1} . . 471
Ausführlicheres für $n = 2$; insbesondere die ∞^{10} Kreistransformationen 480
Uebertragung auf $n = 3$ und beliebiges n 483

Heranziehen der Liniengeometrie.

Analytischer Charakter und Gruppe der Liniengeometrie 487
Der Uebergang zur Kugelgeometrie eine Berührungstransformation . 494
Geometrischer Nachweis dieser Transformation 499
Besondere Eigenschaften derselben 503
Excurs über partielle Differentialgleichungen mit 3 Variabeln . . . 507
Die partiellen Diffgleh. der Liniengeometrie, bez. Kugelgeometrie . . 526

Berührungstransformationen überhaupt.

Die allgemeine analytische Theorie 537
Neue Beispiele von Berührungstransformationen 549
Die Invariantentheorie der Berührungstransformationen 558

Schlussbemerkungen 565-566

Man unterschei- [Mo. 24. X. 92].
det allgemein zwei Arten von Geometrie, die synthetische Geometrie, die die Figuren an sich betrachtet, und die analytische Geometrie, die wesentlich mit Hülfe der Analysis ihr Lehrgebäude aufbaut. Ausser diesen beiden Arten von Geometrie kann man sich noch eine dritte Art construieren, die gewissermassen die Umkehrung der beiden ist und den Gegenstand der gegenwärtigen Vorlesung bilden soll. Während man nämlich sonst die Analysis auf die Geometrie anwendet, soll es der Zweck dieser Vorlesung sein umgekehrt die Geometrie auf die Analysis anzuwenden, analytische Beziehungen in geometrischer Weise kennen zu lernen, oder etwas präciser gefasst, mit Hülfe der Geometrie Einsicht in die Lehre von den Functionen mehrerer Variabeln zu gewinnen. Es liegt nun insbesondere daran, die Gedanken, die in der kleinen Schrift: F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872 nur an-

gedeutet oder sehr knapp ausgeführt sind, in grösserer Ausführlichkeit auseinanderzusetzen und damit einen historischen Ueberblick über alles zu verbinden, was seit Anfang dieses Jahrhunderts bis heute in dieser Richtung geleistet worden ist. Vor allem werde ich die Arbeiten von S. Lie in Leipzig zu berücksichtigen haben, mit dem ich seiner Zeit über diesen Gegenstand zusammen gearbeitet habe, und der seitdem seine Untersuchungen sehr viel weiter geführt hat.

Bevor wir jedoch zu dem eigentlichen Gegenstande unserer Vorlesung übergehen, wird es nötig sein, uns vorher über einige fundamentale Begriffe zu verständigen. Wir schicken daher ein einleitendes Kapitel voraus; dasselbe soll heissen

Orientierende Vorbemerkungen.

Wir theilen dieselben in eine Reihe einzelner Nummern.

1. Functionentheoretische Grundbegriffe.

a) Wir nennen $s = f(z)$ eine Function der reellen Variablen z, wenn in einem gewissen Intervall zu jedem Werte von z ein Wert von s gehört. Die Zusammengehörigkeit der Werte ist also das einzig Charakteristische am Functionsbegriff, während alles übrige, wovon man gewöhnlich bei Functionen redet, wie Ste-

ligkeit, Differentiierbarkeit, u. s. w. nicht den Functionen als solchen zukommt, sondern nur bestimmten Functionsclassen, die sich eben durch diese Eigenschaften von anderen Functionsclassen unterscheiden. Die genaue Definition der Eigenschaften Stetigkeit und Differentiierbarkeit kommt der Differentialrechnung zu, wir heben hier nur hervor, dass man lange Zeit über die Bedeutung und Tragweite dieser Begriffe im Unklaren, ja selbst im Irrtum gewesen ist. So hat sich z. B. die Erkenntniss, dass eine stetige Function nicht differentiierbar zu sein brauche, und dass eine unendlich oft differentiierbare Funktion sich nicht in eine Taylor'sche Reihe entwickeln zu lassen brauche, erst verhältnismässig spät Bahn gebrochen und ist vielleicht auch heute noch nicht in alle mathematischen Kreise hineingedrungen b.) Um ein für allemal eine bestimmte Festsetzung zu treffen, auf Grund, deren wir unsere weiteren Untersuchungen ausführen können, führen wir die <u>Potenzreihe</u> ein

$$s = a + bx + cx^2 + \ldots\ldots, \text{ oder allgemeiner}$$

$$s = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + \ldots\ldots \text{ von der wir}$$

voraussetzen, dass sie für kleine Werte von x resp $x - x_0$ convergiert. Wir untersuchen nun nicht, unter welchen Bedingungen sich eine Function in eine sol-

che Potenzreihe entwickeln lässt, sondern bestimmen einfach, dass wir uns nur mit solchen Functionen beschäftigen wollen, die in Potenzreihen entwickelbar sind, wobei wir uns aber stets bewusst sind, dass wir nach dieser Festsetzung nicht mit den allgemeinsten Functionen, sondern nur mit einer bestimmten Functionsclasse zu thun haben. Wir nennen die Functionen, die sich in eine Potenzreihe entwickeln lassen, nach Lagrange analytische Functionen

c. Um nun einen Schritt weiter zu kommen, geben wir die Beschränkung der Variabilität von z auf reelle Werte auf und lassen auch complexe Werte von z zu. Unter dieser Voraussetzung convergiert die Potenzreihe in einem Kreise um den Nullpunkt resp. den Punkt z_0, dessen Peripherie durch den nächsten singulären Punkt geht. Es kommt dadurch bei dieser Definition der Function zunächst nur ein gewisser Bereich der Ebene, nämlich das Innere des Convergenzkreises, in betracht, und wir sprechen in diesem Fall von einem Functionselement im Gegensatz zur Gesamtfunction, die aus einem Functionselement durch analytische Fortsetzung entsteht.

d. Unter analytischer Fortsetzung versteht man

folgenden Process: Hat man eine Function in einem gewissen Convergenzkreise durch eine Potenzreihe definiert, so kann man sie natürlich auch in der Nähe jedes beliebigen Punktes z' im Innern des Convergenzkreises in eine Reihe entwickeln, die nach Potenzen von $z - z'$ fortschreitet. Für jede solche Entwickelung wird ein neuer Convergenzkreis mit dem Mittelpunkte z' existiren, dessen Peripherie durch den nächsten singulären Punkt geht. Diese neuen Convergenzkreise werden im allgemeinen über den alten hinausgreifen und dadurch eine Erweiterung der Definition unserer Function auf die neuen Gebiete möglich machen. Eben diese Gewinnung neuen Gebietes, in welchem man die Function definieren kann, heisst analytische Fortsetzung. Führt man die analytische Fortsetzung so weit als möglich aus, so erhält man die <u>Gesamtfunction</u>, die also sehr wohl von dem <u>Functionselement</u> zu unterscheiden ist. Gerade in der Theorie dieser Gesamtfunctionen besteht die Schönheit der modernen Functionentheorie, da dieselben sich meistens, abgesehen von jeder expliciten Darstellung, durch allgemeine Eigenschaften vollständig charakterisieren lassen.

1. Als einfachstes Beispiel führen wir die rationalen Functionen

$$s = R(z)$$ an,

die sich folgendermassen definieren lassen: Alle die und nur die sind rationale Functionen, die in der ganzen Ebene eindeutig sind und nur ausserwesentlich singuläre Stellen besitzen. Ein anderes Beispiel bieten die algebraischen Functionen, die sich als Gesamtfunction durch endliche Vieldeutigkeit und das Fehlen wesentlich singulärer Stellen vollständig charakterisieren lassen.

Wir fassen die bisherigen Auseinandersetzungen noch einmal zusammen, indem wir folgenden Satz hinstellen:

In unserer Geometrie werden wir immer nur mit analytischen Functionen arbeiten, aber bald als Function nur das einzelne Functionselement, bald die Gesamtfunction bezeichnen, die sich aus dem einzelnen Functionselement durch analytische Fortsetzung ergiebt.

2. Haupteinteilung der Geometrie.

Entsprechend der entwickelten Auf- [Di. 25. X. 92.]
fassung können wir auch die Geometrie selbst in zwei verschiedene Teile spalten, nämlich:

1.) Geometrie im begrenzten Raumstück, entsprechend der Verwendung allein von Func-

tionselementen.

2) Geometrie im Gesamtraum, entsprechend der Verwendung von Gesamtfunctionen. Zu dem ersten Teile gehört fast die ganze Anwendung der Diff.- und Integralrechnung auf Geometrie. Denn wenn wir Tangentenconstructionen an Curven ausführen, wenn wir die Krümmungsverhältnisse der Curven und Flächen untersuchen, so achten wir dabei jedesmal nur auf ein kleines begrenztes Stück des Gebietes, unbekümmert darum, welche Singularitäten ausserhalb desselben unser Gebilde haben könne. Auch die ganze von Gauss entwickelte Flächentheorie gehört hierher.

Andererseits gehört die Theorie der algebraischen Curven und Flächen grösstenteils zu dem zweiten Teile, da wir bei den meisten Untersuchungen über diese Gebilde z. B. Aufsuchung von Schnittpunkten oder Schnittcurven mehrerer solcher Gebilde stets die Gebilde als Ganze im Auge haben. Zusammenfassend können wir sagen:

Dem Unterschied zwischen Functionselement und Gesamtfunction entsprechend können wir unterscheiden zwischen Geometrie im

begrenzten Raume und Geometrie im Gesamtraum. Zur ersteren Geometrie ist fast die ganze Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie zu rechnen, zum zweiten Teile die Lehre von den algebraischen Gebilden.
Diese beiden Teile der Geometrie stehen gewöhnlich ganz getrennt von einander; es giebt Lehrbücher für die eine Art und für die andere Art, aber zusammenfassende Darstellungen giebt es nicht. Es soll Aufgabe dieser Vorlesung sein, beiden Arten von Geometrie gerecht zu werden.

3. Nähere Ausführung hierzu.

Zunächst wollen wir die pädagogischen Grundlagen bzw. Hülfsmittel für beide Arten von Geometrie besprechen.
Nehmen wir zunächst den elementaren Teil der Geometrie im Gesamtraum, also hauptsächlich der algebraischen Gebilde. Wir rechnen zu dem elementaren Teil dieser Theorie in der Ebene: Lehre von der geraden Linie und den Kegelschnitten, im Raume: Lehre von der Ebene, geraden Linie, Flächen zweiten Grades und den Durchdringungscurven zweier Flächen zweiten Grades. Welche Lehrbücher sind da zu empfehlen, welche Anschauungsmittel

gibt es?

Indem wir vorwegschicken, dass im allgemeinen die französischen Lehrbücher wegen der praktischen, aber doch nicht zu beschränkten Auswahl des Stoffes und wegen der didaktisch sehr zweckmässigen Behandlung desselben den Vorzug verdienen, nennen wir speciell als Lehrbücher für unsere Disciplin:

1). Briot-Bouquet, Géom. analytique (besitzt die oben erwähnten guten Eigenschaften der französischen Lehrbücher und ist deshalb vor allen anderen zu empfehlen).

2 Salmon a) Analytische Geometrie der Kegelschnitte. b) Raumgeometrie (deutsch von W. Fiedler.) (ziemlich umfangreich und vor allem die deutsche Uebersetzung zu überladen.) Es drängt sich in diesen Werken das formale Element, die Invariantentheorie, zu sehr in den Vordergrund und zuweilen mangelt es auch an einer strengen Beweisführung. Immer kann man aus ihnen eine ganze Menge interessanten Stoffes lernen.

3. Hesse, Raumgeometrie (rein analytisch)

4. Reye, Geometrie der Lage (rein synthetisch)

beide einseitig methodisch, aber in ihrer Be-

handlung sehr elegant.

5. Clebsch – Lindemann, Vorlesungen über Geometrie (im wesentlichen Nachschlagebuch).

b. Was Anschauungsmittel angeht, so will ich insbesondere die Modelle der Flächen zweiten Grades nennen, die uns die Flächen selbst, die Kreisschnitte, die erzeugenden Geraden und Systeme confocaler Flächen mit ihren Durchdringungen anschaulich vor's Auge führen. Es ist ganz besonders nützlich, sich selbst solche Modelle zu verfertigen, wozu ganz einfache Mittel ausreichen.

Nun denn entsprechende Bemerkungen zum elementaren Teil der Geometrie im begrenzten Raumstück, die wir im wesentlichen als Differentialgeometrie bezeichnen können. [No. 27. X. 92.]

Es gehört zu dieser Theorie:

a). in der Ebene: die allgemeine Lehre von den ebenen Curven.

b) im Raume: 1) Lehre von den Flächen
2) Lehre von den Raumcurven.

Bezüglich der Lehre von den ebenen Curven beschränken wir uns darauf, einige Stichworte anzuführen, die die einzelnen Teile dieser Lehre genügend charakterisieren werden: Tangente, Krümmungs-

Kreis, Evolute, Bogenlänge, Flächenstück, von einer Curve umgängt.
Etwas ausführlicher verweilen wir bei der Flächentheorie, da diese bei weitem den grössten Raum und das meiste Interesse in der Differentialgeometrie in Anspruch nimmt. Ehe wir jedoch einiges Zusammenhängende darüber mittheilen, setzen wir zunächst wieder die Stichworte hierher, die uns als Leitfaden für das folgende dienen mögen: Krümmung-Eulersche Sätze betr. Krümmung- Dupin*)-sche Indicatrix- Krümmungscurve- Hauptangencurve- Gevdälische Linien- Minimalflächen- Flächen constanter Krümmung.
Gehen wir jetzt in Zusammenhange auf die Flächentheorie ein, so müssen wir zunächst an die Untersuchungen erinnern, die man über die Krümmung der Fläche in einzelnen Punkte anstellt. Man legt bei dieser Untersuchung bekanntlich Normalschnitte durch den betr. Punkt und vergleicht die Krümmung in den einzelnen Normalschnitten. Die Grösse der Krümmungsradius wechselt im allgemeinen mit der Lage des Normalschnittes, und es giebt zwei Lagen, in denen dieselbe ein Maxi-

*) Dupin ist einer der hervorragendsten Schüler von Monge gewesen; seine, développements de géométrie erschienen zuerst 1813.

mum resp. ein Minimum wird.
Diese beiden Schnitte heissen Hauptschnitte, und die Krümmungsradien in ihnen, die wir mit ρ und ρ' bezeichnen wollen, Hauptkrümmungsradien. Weiterhin sind in unserer Theorie zwei charakteristische Verbindungen der beiden Hauptkrümmungsradien von grosser Bedeutung, nämlich einmal der Ausdruck $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$, der den Namen mittlere Krümmung trägt, und zweitens die Verbindung $\frac{1}{\rho\rho'}$, das sogenannte Krümmungsmass (nach Gauss, disquisitiones circa superficies curvas, 1827). Da ρ und ρ' sowohl positiv als negativ sein können, kann das Krümmungsmass ebenfalls grösser oder kleiner als Null sein. Im ersten Fall nennt man die Fläche in dem betreffenden Punkt elliptisch, im zweiten Falle hyperbolisch gekrümmt (die Fläche hat hier die Gestalt eines Sattels). Die letzten Benennungen beziehen sich auf die Gestalt, welche die sogenannte Dupin'sche Indicatrix an der zu untersuchenden Stelle der Fläche besitzt. Diese Kurve, die al-

Schnitt einer zur Tangentialebene parallelen und von ihr unendlich wenig entfernten Ebene mit der Fläche erzeugt wird, ist nämlich im ersten Falle in erster Annäherung eine Ellipse, im zweiten Falle eine Hyperbel. In beiden Fällen sind die Hauptschnitte der Fläche durch die Hauptaxen der Dupin'schen Indicatrix gegeben. Die Asymptoten der Indicatrix heissen Haupttangenten; sie sind natürlich nur im Falle hyperbolischer Krümmung reell. Will man die Haupttangenten ohne Zuhülfenahme der Indicatrix definieren, so kann man sagen: die Tangentialebene der Fläche in einem hyperbolisch gekrümmten Punkte schneidet dieselbe in einer Curve mit Doppelpunkt und die Tangenten der Curve im Doppelpunkt sind die Haupttangenten.

Die letzten Ausführungen veranlassen uns nun weiter, gewisse Curven auf den Flächen zu untersuchen, nämlich die sogenannten Krümmungscurven und Haupttangentencurven, deren Zusammenhang mit dem vorigen aus ihrer Definition klar hervorgeht. Unter Krümmungscurven versteht man näm-

lich solche auf der Fläche verlaufende Curven, die in jedem Punkte von einer Hauptkrümmungsrichtung berührt werden, während die Hauptasymptotencurven (oder Asymptotencurven) in jedem Punkte von einer der Hauptasymptoten berührt werden. Da in jedem Punkte zwei reelle Hauptkrümmungsrichtungen existieren, die einen Winkel von 90° einschliessen, so ist es klar, dass die ganze Fläche von zwei Systemen von Krümmungscurven überdeckt wird, die sich in jedem Punkte rechtwinklich schneiden und also ein sogenanntes Orthogonalsystem bilden. Die Hauptasymptotencurven überdecken dagegen nur die hyperbolisch gekrümmten Teile der Fläche doppelt, während sie auf den elliptisch gekrümmten Teilen ganz fehlen. Beide Arten von Curven sind durch Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmt, da man in jedem ihrer Punkte die Tangentenrichtung kennt.

Ausser den beiden genannten Arten von Curven spielen noch die geodätischen oder Kürzesten Linien eine bedeutende Rolle. Man kann dieselben praktisch durch einen auf der Fläche gespannten Faden realisieren. Denkt man an diese Realisationsmethode der geodätischen

Linien, so wird einem auch der folgende Satz plausibel erscheinen: Die geodätische Linie hat die Eigenschaft, dass ihre Osculationsebene in jedem Punkte senkrecht gegen die Fläche steht, eine Eigenschaft, die man auch als Definition der geodätischen Linien benutzen kann.
Da durch jeden Punkt der Fläche unendlich viel geodätische Linien gehen, kann man die Richtung, in der dieselbe durch einen beliebigen Punkt verlaufen soll, noch beliebig vorgeben, und erst die Krümmung ist durch die Eigenschaft unserer Curve als kürzester Linie bestimmt. Die geodätischen Linien sind deshalb durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung definiert, die aus Punkt und Tangentenrichtung die Grösse der Krümmung finden lehren.

Die Krümmungsverhältnisse können auch dazu dienen, ganze Flächenfamilien aus der Gesamtheit aller Flächen auszusondern. Wir erwähnen nur zwei Familien von Flächen:
1). Die Minimalflächen, die durch $\rho = -\rho'$ charakterisiert sind. Diese Flächen sind hiernach überall sattelförmig gekrümmt und

haben übrigens ihren Namen daher, weil innerhalb einer beliebigen auf ihr verlaufenden nicht zu ausgedehnten Contour die Minimalfläche kleineren Flächeninhalt besitzt als alle in dieselbe Contour gespannten Flächen.

2). Flächen Konstanten Krümmungsmasses, die, wie der Name besagt, durch $\rho\rho' = \text{const}$ gekennzeichnet sind.

Damit beendigen wir die vorläufigen Ausführungen über die Flächentheorie selbst und fügen nur noch Einiges hinzu was sich auf die

Lehrbücher für diesen Teil der Geometrie bezieht.

Sieht man von den allgemeinen Lehrbüchern der Diff.- und Integralrechnung ab, die ja alle einen Teil ihres Raumes den Anwendungen auf Geometrie widmen, so ist hier vor allen Dingen zu erwähnen:

F. Joachimsthal, Anwendung der Diff.- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung, ein Werk, das wegen der Beschränkung und zweckmässigen Auswahl des Stoffes ganz besonders zur Ein-

führung in die Theorie geeignet ist. Ausser Joachimsthal sind noch zwei deutsche Lehrbücher, die von Hoppe und von Knoblauch zu nennen, von denen das erstere ganz zweckmässig erscheint, und nur durch Einführung neuer Bezeichnungen unnötige Schwierigkeiten bereitet, während das zweite einseitig einen bestimmten Gedanken zur Geltung bringt und daher zur allseitigen Orientierung auf unserem Gebiete kaum ausreichen dürfte.

Als ein Sammelwerk ersten Ranges für unsere Theorie ist dann die noch im Erscheinen begriffene G. Darboux, Théorie générale des surfaces zu erwähnen; dieselbe wird für ein eingehenderes Studium unseres Gebietes ohne Zweifel auf lange Jahre hinaus die Grundlage bilden.

Als Anschauungsmittel sind auch [Fr. 28. X 92] hier ebenso wie bei der Geometrie im Gesamtraum Modelle der Flächen mit aufgezeichneten Curven zu erwähnen und es mögen zur Illustration der früheren allgemeinen Ausführungen hier noch einige specielle Sätze Platz finden, die direkt an den vorgezeigten Modellen zur Anschauung gebracht wurden.

1. Krümmungs- und Hauptlangentencurven.

Auf den Flächen zweiten Grades sind die Krüm-

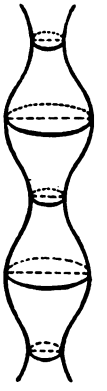
mungs- und Haupttangentencurven, algebraisch, nämlich die Haupttangentencurven fallen mit den „geradlinigen Erzeugenden" zusammen und die Krümmungscurven erscheinen als Durchschnitte der Flächen mit den confocalen Flächen zweiten Grades. Die confocalen Flächen bilden nämlich ein Orthogonalsystem, und für die Flächen eines solchen Systems gilt allgemein das „Dupin'sche Theorem", dass sich dieselben längs der gemeinsamen Krümmungscurven schneiden.

2. Geodätische Linien

Die geodätischen Linien auf den Flächen zweiten Grades sind transcendent und als solche zuerst von Jacobi 1837 mit Hülfe hyperelliptischer Integrale bestimmt worden. Bei den Rotationsflächen zweiten Grades windet sich die einzelne geodätische Linie zwischen zwei Parallelkreisen, bei den dreiaxigen Flächen zweiten Grades zwischen den beiden Asten einer Krümmungscurve fortgesetzt hin und her. Insbesondere läuft eine geodätische Linie, welche durch einen Nabelpunkt der Fläche geht, auch stets durch den gegenüberliegenden.

Von geodätischen Linien auf Rotationsflächen erwähnen wir noch diejenigen auf dem

„Onduloid" von Plateau, dessen Meridiancurve nebenstehende Gestalt zeigt. Auf einem solchen unterscheidet man 1) geodätische Linien, welche zwischen zwei Parallelkreisen eingeschlossen fortwährend hin und her laufen, 2) steiler gestellte geodätische Linien, welche sich



um die Gesamtfläche nach Art einer Schraubenlinie herumwinden, und endlich einen Uebergangsfall, wo die geodätische Linie den in einer Einschnürung gelegenen Kehlkreis fortgesetzt approximiert, ohne ihn zu erreichen.

Man bemerke den Unterschied zwischen algebraischen Kurven und transcendenten Curven, wie er hier hervortritt: erstere sind nach ihrem Gesamtverlauf bequem zu übersehen, letztere nur ein Stück lang.

3. Minimalflächen.

Als Beispiel einer Minimalfläche, bei welcher der Unterschied klar hervortritt, dass jedes kleine Stück innerhalb seiner Contour ein Minimum von Flächeninhalt besitzt, während die Fläche analytisch fortgesetzt sich selbst mannigfach durchdringt, möge die „Schilling'sche Fläche" dienen.

4. Flächen constanter Krümmung:
Verschiedene Typen der hierher gehörigen Rotationsflächen, die uns später noch ausgiebig beschäftigen sollen. —
Wir beenden damit die Vorbemerkungen und gehen zu unserer eigentlichen Vorlesung über, die wir in der Weise disponiren werden, dass wir die hauptsächlichsten Begriffe der Geometrie nach einander besprechen, dass wir zusehen, wie sie mit der Zeit erweitert worden sind, und welche Fortschritte unsere Wissenschaft jedesmal dadurch gemacht hat. Unser erstes Interesse sei

I. der allgemeine Coordinatenbegriff

und zwar behandeln wir zunächst:

Ia. Punktcoordinaten.

Allbergebracht sind zwei Arten von Punktcoordinaten:

1) Parallelcoordinaten x, y, z.
2 Polarcoordinaten r, ϑ, φ

Bei Parallelcoordinaten entspricht nicht nur jedem Wertsystem von Coordinaten ein Punkt, sondern jedem Punkt auch nur ein Wertsystem der Coordinaten. Dagegen kann man mit Polarcoordinaten schon den ganzen Raum um-

fassen, wenn man ihnen folgende Beschränkungen auferlegt:

$$r \geqq 0 \,, \quad 0 \leqq \vartheta < \pi \,, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi \,.$$

Dementsprechend besteht in der Anwendung noch der Unterschied zwischen beiden Arten von Coordinaten, dass man Polarcoordinaten zumeist nur bei speciellen Untersuchungen gebraucht, während die Parallelcoordinaten auch bei allgemeinen Untersuchungen dienlich sind und z. B. mit Leichtigkeit gestatten, auch von imaginären Punkten zu handeln.

Ausser den beiden hiermit genannten Arten von Punctcoordinaten mögen nun insbesondere die folgenden genannt werden:

1. Linearcoordinaten, d. h. lineare Verbindungen der gewöhnlichen Parallelcoordinaten, die zuerst bei Möbius in seinem barycentrischen Calcul 1827, dann bei Plücker in Bd I der analytisch-geometrischen Entwicklungen 1828 auftreten. Sie spielen in der projectivischen Geometrie als Dreiecks- und Tetraedercoordinaten eine grosse Rolle.

2. Krummlinige Coordinaten im allgemeinsten Sinne, deren Theorie hauptsächlich von Lamé in seinen Leçons sur les coordonnées curvilignes 1859 bearbeitet ist; sie werden in

der math. Physik sehr häufig benützt. Was zunächst die Linearcoordinaten angeht, [Ko. 31.X.92.
so berichten wir darüber noch folgendes:
Die hier gemeinten Linearcoordinaten werden in der Ebene im einfachsten Falle als Dreiecks-coordinaten bezeichnet und dann etwa durch folgende Gleichungen eingeführt:

$$\varrho p = ax + by + c,$$
$$\varrho q = a'x + b'y + c',$$
$$\varrho r = a''x + b''y + c''.$$

Linker Hand bedeutet ϱ einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor, der uns anzeigt, dass es nur auf die Verhältnisse $p : q : r$ ankommt. Ebendesshalb bezeichnet man die p, q, r auch als homogene Coordinaten.
Will man die Dreiecks coordinaten elementar geometrisch deuten, so beachte man dass

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

der Abstand des Punktes x, y von der Geraden $ax + by + c = 0$ ist. Es wird dann sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes einleuchten:
Die Dreieckscoordinaten verhalten sich wie die mit gewissen vorgegebenen Constanten multiplicirten Abstände von 3 geraden Linien der

Ebene

Es ist noch zu beachten, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein muss, damit sich die x, y durch die p, q, r ausdrücken lassen. Geometrisch heisst das, dass die vorerwähnten 3 geraden Linien nicht durch einen Punkt gehen, sondern wirklich ein Dreieck bilden sollen.

Die gewöhnlichen Parallelcoordinaten lassen sich als specieller Fall der Dreieckscoordinaten ansehen. Man hat nur die dritte Dreiecksseite ins Unendliche rücken zu lassen u. die zugehörige multiplicirende Constante ∞ klein zu nehmen, endlich

$$\frac{p}{r} = x \;,\; \frac{q}{r} = y \text{ zu setzen.}$$

Ganz analoges lässt sich auch von den Tetraedercoordinaten im Raume aussagen.

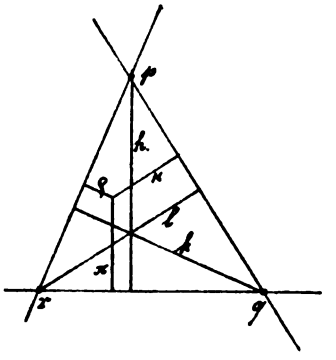
An Stelle der Bezeichnung p, q, r braucht man heutzutage allgemein die Bezeichnung x_1, x_2, x_3 oder im Raume x_1, x_2, x_3, x_4, die von Hesse [1840-1860] zuerst eingeführt worden ist. Hesse's Haupt-

dienst ist es, die eleganten formalen Methoden seines Lehrers Jacobi, insbesondere die Determinantenrechnung, in die neuere Geometrie hineingetragen zu haben, von wo dann oben die erwähnte Bezeichnung der Dreiecks- und Tetraedercoordinaten durch Indices herrührt.

Auf ganz anderem Wege, als Plücker, nämlich von mechanischen Gesichtspunkten aus, ist Möbius dazu gekommen, in seinem barycentrischen Calcul eine specielle Art von Dreiekscoordinaten einzuführen.

Er sieht als Coordinaten eines Punktes die drei Gewichte p, q, r an, die man in den Ecken des zu Grunde gelegten Dreiecks anbringen muss, damit der betreffende Punkt Schwerpunkt des Dreiecks wird. (Woraus unmittelbar einleuchtet, dass nur die Verhältnisse der p, q, r eine geometrische Bedeutung haben).

Dass die barycentrischen Coordinaten wirklich ein specieller Fall der Dreieckscoordinaten sind, erkennt man leicht, wenn man im Schwerpunkte des Dreiecks die Masse $-(p+q+r)$ anbringt. Man beachte nämlich, dass die so vervollständigte Figur als mechani-



sches System betrachtet im Gleichgewicht sein muss; dass also auch die Drehmomente um die einzelnen Dreiecksseiten verschwinden müssen. Bezeichnet man nun die drei Höhen des Dreiecks mit h, k, l und die 3 vom Schwerpunkte auf die Seiten gefällten Perpendikel mit π, κ, ς so ergeben sich folgende Gleichungen

$$p\,h-(p+q+r)\pi=0,\quad q\,k-(p+q+r)\kappa=0,\quad r\,l-(p+q+r)\varsigma=0.$$

d. h. $\qquad p:q:r=\frac{\pi}{h}\cdot\frac{\kappa}{k}:\frac{\varsigma}{l}$

Wir können daher folgenden Satz aussprechen:
<u>Die baryzentrischen Coordinaten sind ein besonderer Fall der allgemeinen Dreieckscoordinaten, indem als multiplicirende Constante der 3 Abstände von den Dreiecksseiten die reciproken Höhen des Dreiecks angenommen sind.</u> —

Fragen wir uns jetzt, welchen Nutzen die Einführung der Dreiecks-coordinaten gewährt, so können wir mit 3 Dingen antworten:
1) Homogenität,
2) Behandlung des unendlich Weiten,
3) größere Schmiegsamkeit des Coordinatensystems:

Ad 1). Was zunächst den ersten Punkt angeht, so erkennt man leicht, dass in unseren Coordinaten alle Gleichungen, die eine unmittelbare geometrische Bedeutung haben, homogen sein müssen, da es nur auf die Verhältnisse der Coordinaten ankommt. So ist z.B. $Ap + Bq + Cr = 0$ die Gleichung einer geraden Linie und $\sum_1^3 a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$ die Gleichung eines Kegelschnitts in Dreieckscoordinaten.

Will man analytisch verfolgen, dass alle Gleichungen in Dreieckscoordinaten homogen werden müssen, so löse man die Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen den Dreieckscoordinaten u. den gewöhnlichen vermitteln, nach x und y auf, indem man neben x und y auch ϱ als Unbekannte betrachtet. Man erhält dann die Werte

$$x = \frac{z_1}{r}, \quad y = \frac{z_2}{r}, \quad \text{(mit gemeinsamen Nenner)},$$

wo z_1, z_2 und r homogene lineare Ausdrücke in den p, q, r bedeuten. Setzt man nun für x u. y diese Werte in irgendwelche vorgegebene Curvengleichung ein und multiplicirt mit dem Nenner herauf, so ist ja ohne weiteres ersichtlich, dass die Gleichung eine homogene Gestalt in Bezug auf die neuen Coordinaten annehmen muss. Die Homogeneität der Gleichungen ist von be-

sonderem Nutzen in der Tangenten- und Polarentheorie, die dadurch an Symmetrie u. deshalb an Einfachheit gewinnt.

Bezeichnet $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer Curve in gewöhnlichen Coord. und $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Gleichung derselben Curve in Dreieckscoordinaten, so wird die Gleichung der Tangente im Punkte x, y resp x_1, x_2, x_3 im ersten Falle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(y' - y) = 0$$

und im zweiten Falle

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2' + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3' = 0,$$

zwei Gleichungen, von denen die zweite ersichtlich die erste an Symmetrie übertrifft.

Zum Beweise dieser Formel braucht man das bekannte Eulersche Theorem über homogene Functionen, das überall in diesem Gebiete benutzt wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3 = n f,$$

wo n den Grad von f bezeichnet.

Ad 2). Was das Unendlich Weite angeht, so beziehen wir uns da wieder auf die Formeln:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

die uns lehren, dass einem Unendlichwerden von x und y ein Verschwinden von X entspricht. Es sind daher erstlich zur Behandlung des Unendlichweiten keine unendlich grossen Werte von x_1, x_2, x_3 heranzuziehen, weil es ja nur auf die Verhältnisse der x_1, x_2, x_3 ankommt. Zweitens sind die x_1, x_2, x_3 einer bestimmten linearen homogenen Gleichung $X = 0$ zu unterwerfen, wenn sie unendlich ferne Elemente darstellen sollen. Dadurch schliesst sich der analytische Ansatz an die Vorstellungsweise der projektiven Geometrie an, welche von einer unendlichweiten Geraden der Ebene spricht.

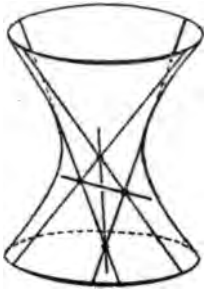
Zu 3). Endlich besitzt das Dreiecks-coordinatensystem eine grössere Schmiegsamkeit, da wir ja stets eine gerade Linie mehr als bei gewöhnlichen Parallelcoordinaten zur Verfügung haben, wenn es sich um eine passende Wahl des Coordinatensystems handelt. Ein Beispiel möge uns dies näher illustrieren. Setzen wir uns aus den beiden Schaaren von geradlinigen Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids ein windschiefes Viereck zusammen, vervollständigen dasselbe zu einem Tetraeder (Tangentialtetraeder)

und benutzen es so, als Coordinatentetraeder, so kann die Gleichung des Hyperboloids nur die Gestalt haben:

$$a x_1 x_2 + b x_3 x_4 = 0,$$

sofern die Gleichungen der 4 Seiten des windschiefen Vierecks

$$\begin{cases} x_1 = 0, & x_3 = 0 \\ x_1 = 0, & x_4 = 0 \end{cases} \text{ und } \begin{cases} x_2 = 0, & x_3 = 0 \\ x_2 = 0, & x_4 = 0 \end{cases} \text{ sind:}$$



Führt man jetzt unter Beibehaltung des Coordinatentetraeders Multipla der bisherigen Coordinaten als neue Coordinaten ein, so kann man der Flächengleichung leicht die Gestalt geben:

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0,$$

eine Formel, die sich in gleicher Einfachheit beim blossen Gebrauche von Parallelcoordinaten nicht herstellen lässt. Die letzte Gleichung lässt sich auch in Determinantenform schreiben:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_4 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

und ist daher das Eliminationsresultat aus den Gleichungen:

$$x_1 - \lambda x_3 = 0,$$
$$x_4 - \lambda x_2 = 0,$$

beiden andern

$$x_1 - \mu x_4 = 0,$$
$$x_3 - \mu x_2 = 0.$$

lgt aber unmittelbar die geometrische Wahrheit:

fläche 2ten Grades kann auf zwei Weisen im
ss an unser windschiefes Viereck durch den
nsprechender Ebenen aus 2 projektiven Eben-
erzeugt werden.

Satz, durch den man die Flächen zweiten
in die synthetische neuere Geometrie einzufüh-
pt*). Wir erkennen, dass dieselbe bei Zugrundele-
n Tetraedercoordinaten der analytischen Be-
g in einfachster Weise zugänglich ist.

wenden jetzt dazu, die Fortschritte, die der Begriff
dcoordinaten und der Coordinatenbegriff [Fr. 1. XI. 92]
upt durch Plücker erfahren haben, näher zu be-
. Plücker, der vorzüglichste Autor der neueren
chen Geometrie, hatte, was Geometrie angeht,
uptwirksamkeit in den Jahren 1826–1846.
licirte während dieser Zeit neben zahlreichen
lungen in Crelle's Journal folgende Haupt-
:

---

*) wir dies später noch ausführlich besprechen werden

1) Analytisch-geometr. Entwicklungen. 2 Bd. (1828, 31)
2) System der analytischen Geometrie. 1835.
3) Theorie der algebraischen Curven. 1839.
4) System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise 1846.

Nach dieser Periode beschäftigte sich Plücker hauptsächlich mit Arbeiten über experimentelle Physik, gab jedoch später im Jahre 1868 und 1869 noch einmal ein Werk über analytische Geometrie heraus, das folgende Titel trägt:

Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. 1868-69.

Obwohl uns an dieser Stelle zunächst dasjenige interessirt, was sich in den Werken Plückers über Punktcoordinaten findet, so sei doch gleich darauf hingewiesen, dass Plücker nicht nur den Begriff der Punktcoordinaten auf mannigfache Weise erweitert hat, sondern dass er auch den Coordinatenbegriff überhaupt dahin verallgemeinert hat, dass man jedes einzelne geometrische Gebilde im Raume durch Coordinaten festlegen und sich dann mit den Gleichungen beschäftigen kann,

welche zwischen diesen Coordinaten vorgegeben werden. Man vergleiche den Titel des letztangeführten Werkes.

Uebrigens ist auch hiermit Plücker's geometrische Bedeutung noch lange nicht erschöpft. Es sei betreff desselben auf den im Jahre 1871 vor der hiesigen Gesellschaft der Wissenschaften gelesenen Nachruf von Clebsch verwiesen, in dem zu manchen principiellen Dingen Stellung genommen wird, die auch heute noch eine Rolle spielen.

Gehen wir jetzt speciell auf die Punktcoordinaten bei Plücker ein, so können wir 2 Stichworte von Plücker selbst anführen, die den Fortschritt charakterisieren:

„Methode der abgekürzten Bezeichnung"

„Lesen in den Gleichungen"

Das erste gestaltet Plücker so aus, dass er allgemein Ausdrücke erster und höherer Ordnung in den x u. y abkürzend mit einem Buchstaben bezeichnet und dann diese Ausdrücke selbst als Coordinaten ansieht (wovon die Dreieckscoordinaten ein specieller Fall sind); mit dem zweiten meint er, dass man ohne alle Rechnung, einfach durch Betrachtung

der Gleichungen selbst aus ihnen die Resultate gleichsam ablesen soll.

So zeigt Plücker beispielsweise, dass man die Gleichung einer ebenen C_3 stets in die Gestalt setzen kann:

$$p \cdot q \cdot r - s^3 = 0.$$

die Gleichung einer ebenen C_4 in die Gestalt

$$p \cdot q \cdot r \cdot s - \Omega^2 = 0$$

wo p, q, r, s lineare Ausdrücke, Ω ein quadratischer Ausdruck in den gewöhnlichen Coordinaten ist.

Führen wir auch gleich die Sätze an, die Plücker aus diesen Gleichungen ablest:

Bei jeder Curve dritter Ordnung kann man 3 Wendepunkte ausfindig machen, welche in gerader Linie liegen.

und:

Jede Curve 4ter Ordnung besitzt 4 Doppeltangenten, deren 8 Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt $\Omega = 0$ liegen. *)

Schneidet man nämlich die C_3 mit einer der Geraden $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, so erhält man als drei-

*) Durch die Fassung dieser Sätze soll unentschieden bleiben, was in der That durch die hier vorliegenden Mittel sich noch nicht entscheiden lässt, ob es auf der Curve 3. Ordnung nur ein Wendepunktstripel der bezeichneten Art giebt, resp. bei der Curve 4. Ordnung nur ein Doppeltangentenquadrupel, oder mehrere.

fach zählenden Schnittpunkt denjenigen Punkt, den jede der Geraden mit der Geraden $s = 0$ besitzt, d. h. die Geraden $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ sind Wendetangenten und ihre Berührungspunkte liegen auf der Geraden $s = 0$.

Schneidet man analog die C_4 mit einer der Geraden $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$, so erhält man als doppeltzählende Schnittpunkte diejenigen Punkte, in denen diese Geraden resp. den Kegelschnitt $\Omega = 0$ schneiden, d. h. alle diese Geraden sind Doppeltangenten und ihre Berührungspunkte liegen auf dem Kegelschnitt $\Omega = 0$.

Wie beweist nun Plücker, dass sich die Gleichungen der Curven in solche specielle Formen setzen lassen?

Er benutzt dazu das, Princip der Constantenzählens' das einfach darauf beruht, dass man sagt, der Vergleich der speciellen Gleichungsform mit einer vorgeschriebenen Curve, die in diese Gestalt gesetzt werden soll, liefert für die unbekannten Coefficienten gerade so viel Gleichungen als unbekannte Coefficienten vorhanden sind, woraus sich dann letztere im allgemeinen aus den Gleichungen bestimmen lassen werden.

So enthalten z. B. die Gleichungsformen $pqr - s^3 = 0$

und $pqrs - R = 0$ 9 resp. 14 *) Constante, und gerade so viele Constante treten beziehungsweise in den Gleichungen der allgemeinen Curven 3ter u. 4ter Ordnung auf, woraus Plücker dann auf die Möglichkeit der oben angeführten Darstellungen schliesst.

Es ist jedoch hier besonders zu betonen, dass das Princip des Constantenzählens in jedem Falle eine genaue Ueberlegung darüber verlangt, ob die Gleichungen, die man zur Bestimmung der Unbekannten erhält, wirklich unabhängig und mit einander verträglich sind.

[Vergl. den Nachruf von Clebsch]

Die eben durchgeführten Betrachtungen schliessen natürlich den Gedanken ein, dass man $p, q, r, s, \ldots R$, als Coordinaten ansieht, und wir haben also, wenn wir zusammenfassen, die Verallgemeinerung der Punktcoordinaten vor uns, dass man irgendwelche, rationale, ganze Verbindungen

*) Dass die Gleichung $pqr - s^3 = 0$ 9 Constante enthält ergiebt sich leicht aus folgender Abzählung: p, q, r, enthalten insgesammt 9 Constante, aber das Produkt $p \cdot qr$ nur 7, da man 2 Ausdrücke z. B. p und q mit einem beliebigen Faktor multipliciren kann, und dann jeweils den reciproken Faktor in den 3ten Ausdruck aufnehmen kann, s enthält 3 Constante, macht zusammen 10; davon geht wieder 1 ab, weil man die Gleichung mit einem beliebigen Faktor multipliciren kann. Ebenso findet man dass $pqrs - R^2 = 0$ 14 Constante enthält. Denn das Produkt $p \cdot qrs$ enthält $4 \cdot 3 - 3 = 9$, R enthält 6, macht 15 Const. -1, macht 14 Constante.

oder der beiden andern

$$x_1 - \mu x_4 = 0,$$
$$x_3 - \mu x_2 = 0.$$

Daraus folgt aber unmittelbar die geometrische Wahrheit: Unsere Fläche 2ten Grades kann auf zwei Weisen im Anschluss an unser windschiefes Viereck durch den Schnitt entsprechender Ebenen aus 2 projektiven Ebenbüscheln erzeugt werden.

Da ist der Satz, durch den man die Flächen zweiten Grades in die synthetische neuere Geometrie einzuführen pflegt*). Wir erkennen, dass dieselbe bei Zugrundelegung von Tetraedercoordinaten der analytischen Behandlung in einfachster Weise zugänglich ist.

Wir kommen jetzt dazu, die Fortschritte, die der Begriff der Punktcoordinaten und der Coordinatenbegriff [Di. 1.XI.9 überhaupt durch Plücker erfahren haben, näher zu besprechen. Plücker, der vorzüglichste Autor der neueren analytischen Geometrie, hatte, was Geometrie angeht, seine Hauptwirksamkeit in den Jahren 1826–1846. Er publicirte während dieser Zeit neben zahlreichen Abhandlungen in Crelle's Journal folgende Hauptwerke:

*) wie wir dies später noch ausführlich besprechen werden

1) Analytisch-geometr. Entwicklungen. (1828, 31) 2 Bd.
2) System der analytischen Geometrie. 1835.
3) Theorie der algebraischen Curven. 1839.
4) System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise 1846.

Nach dieser Periode beschäftigte sich Plücker hauptsächlich mit Arbeiten über experimentelle Physik, gab jedoch später im Jahre 1868 und 1869 noch einmal ein Werk über analytische Geometrie heraus, das folgende Titel trägt:

Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. 1868-69.

Obwohl uns an dieser Stelle zunächst dasjenige interessirt, was sich in den Werken Plückers über Punktcoordinaten findet, so sei doch gleich darauf hingewiesen, dass Plücker nicht nur den Begriff der Punktcoordinaten auf mannigfache Weise erweitert hat, sondern dass er auch den Coordinatenbegriff überhaupt dahin verallgemeinert hat, dass man jedes einzelne geometrische Gebilde im Raume durch Coordinaten festlegen und sich dann mit den Gleichungen beschäftigen kann,

welche zwischen diesen Coordinaten vorgegeben werden. Man vergleiche den Titel des letztangeführten Werkes.

Uebrigens ist auch hiermit Plücker's geometrische Bedeutung noch lange nicht erschöpft. Es sei betreff desselben auf den im Jahre 1871 vor der hiesigen Gesellschaft der Wissenschaften gelesenen Nachruf von Clebsch verwiesen, in dem zu manchen principiellen Dingen Stellung genommen wird, die auch heute noch eine Rolle spielen.

Gehen wir jetzt speciell auf die Punktcoordinaten bei Plücker ein, so können wir 2 Stichworte von Plücker selbst anführen, die den Fortschritt charakterisieren:

„Methode der abgekürzten Bezeichnung"

„Lesen in den Gleichungen"

Das erste gestaltet Plücker so aus, dass er allgemein Ausdrücke erster und höherer Ordnung in den x, y, z abkürzend mit einem Buchstaben bezeichnet und dann diese Ausdrücke selbst als Coordinaten ansieht (wovon die Dreieckscoordinaten ein specieller Fall sind); mit dem zweiten meint er, dass man ohne alle Rechnung, einfach durch Betrachtung

der Gleichungen selbst aus ihnen die Resultate gleichsam ablesen soll.
So zeigt Plücker beispielsweise, dass man die Gleichung einer ebenen C_3 stets in die Gestalt setzen kann:

$$p \cdot q \cdot r - s^3 = 0.$$

die Gleichung einer ebenen C_4 in die Gestalt

$$p \cdot q \cdot r \cdot s - \Omega^2 = 0$$

wo p, q, r, s lineare Ausdrücke, Ω ein quadratischer Ausdruck in den gewöhnlichen Coordinaten ist.
Führen wir auch gleich die Sätze an, die Plücker aus diesen Gleichungen ablest:
Bei jeder Curve dritter Ordnung kann man 3 Wendepunkte ausfindig machen, welche in gerader Linie liegen.
und:
Jede Curve 4ter Ordnung besitzt 4 Doppeltangenten, deren 8 Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt $\Omega = 0$ liegen. *)
Schneidet man nämlich die C_3 mit einer der Geraden $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, so erhält man als drei-

*) Durch die Fassung dieser Sätze soll unentschieden bleiben, was in der That dabei die hier vorliegenden Mittel sich noch nicht entscheiden lässt, ob es auf der Curve 3. Ordnung nur ein Wendepunktstripel der bezeichneten Art giebt, resp. bei der Curve 4. Ordnung nur ein Doppeltangentenquadrupel, oder mehrere.

fach zählenden Schnittpunkt denjenigen Punkt, den jede der Geraden mit der Geraden $s = 0$ besitzt, d. h. die Geraden $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ sind Wendetangenten und ihre Berührungspunkte liegen auf der Geraden $s = 0$.

Schneidet man analog die C_4 mit einer der Geraden $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$, so erhält man als doppeltzählende Schnittpunkte diejenigen Punkte, in denen diese Geraden resp. den Kegelschnitt $\Omega = 0$ schneiden, d. h. alle diese Geraden sind Doppeltangenten und ihre Berührungspunkte liegen auf dem Kegelschnitt $\Omega = 0$.

Wie beweist nun Plücker, dass sich die Gleichungen der Curven in solche specielle Formen setzen lassen?

Er benutzt dazu das, Princip der Constantenzählens' das einfach darauf beruht, dass man sagt, der Vergleich der speciellen Gleichungsform mit einer vorgeschriebenen Curve, die in diese Gestalt gesetzt werden soll, liefert für die unbekannten Coefficienten gerade so viel Gleichungen als unbekannte Coefficienten vorhanden sind, woraus sich dann letztere im allgemeinen aus den Gleichungen bestimmen lassen werden.

So enthalten z. B. die Gleichungsformen $pqr - s^3 = 0$

und $p.q.r.s - \Omega = 0$ 9 resp. 14 *) Constante, und gerade so viele Constante treten beziehungsweise in den Gleichungen der allgemeinen Curven 3ter u. 4ter Ordnung auf, woraus Plücker dann auf die Möglichkeit der oben angeführten Darstellungen schliesst.

Es ist jedoch hier besonders zu betonen, dass das Princip des Constantenzählens in jedem Falle eine genaue Ueberlegung darüber verlangt, ob die Gleichungen, die man zur Bestimmung der Unbekannten erhält, wirklich unabhängig und mit einander verträglich sind.

[Vergl. den Nachruf von Clebsch]

Die eben durchgeführten Betrachtungen schliessen natürlich den Gedanken ein, dass man $p, q, r, s, \ldots \Omega$ als Coordinaten ansieht, und wir haben also, wenn wir zusammenfassen, die Verallgemeinerung der Punktcoordinaten vor uns, dass man irgendwelche rationale, ganze Verbindungen

*) Dass die Gleichung $p\,q\,r - s^3 = 0$ 9 Constante enthält ergiebt sich leicht aus folgender Abzählung: p, q, r, enthalten insgesammt 9 Constante, aber das Product $p.qr$ nur 7, da man 2 Ausdrücke z. B. p und q mit einem beliebigen Factor multipliciren kann, und dann jeweils den reciproken Factor in den 3ten Ausdruck aufnehmen kann, s enthält 3 Constante, macht zusammen 10; davon geht wieder 1 ab, weil man die Gleichung mit einem beliebigen Factor multipliciren kann. Ebenso findet man dass $p\,q\,r.s - \Omega^2 = 0$ 14 Constante enthält. Denn das Product $p.q.r.s$ enthält $4.3 - 3 = 9$, Ω enthält 6, macht 15 Const. -1, macht 14 Constante.

der Punktcoordinaten mit einem Buchstaben bezeichnet und also selber als Coordinaten auffasst.

Von hier zu den

2) allgemeinen krummlinigen Coordinaten ist nur noch ein Schritt. Wir verstehen nämlich unter krummlinigen Coordinaten der Raumgeometrie [um hier gleich zu Dimensionen zu gehen] allgemein solche Verbindungen u, v, w, die analytisch von x, y, z abhängen. Es bedeuten dann

$$u = C, \quad v = C', \quad w = C''$$

3. Flächenschaaren, die uns durch ihre Schnitte die Punkte definiren. Die einzige Bedingung ist, dass die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$ nicht verschwinden soll.

Es liegt in der Natur der Sache, dass wir diese Flächen, so lange nichts Näheres festgesetzt wird, nur im begrenzten Raumstück betrachten; denn da in ihren Gleichungen beliebige analytische Functionen der x, y, z auftreten, so können wir den Verlauf der Flächen überhaupt nur in einem begrenzten Raumstück übersehen, und gar nicht

wissen, was für Singularitäten ausserhalb desselben noch auftreten mögen. Das schadet aber nichts, wenn wir uns, wie dies in der mathematischen Physik durchweg der Fall ist, mit Problemen der Differentialgeometrie beschäftigen. Da handelt es sich zum Beispiel darum, wie drückt sich $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ in krummlinigen Coordinaten aus, oder wie transformirt sich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f = 0.$$

(die sog. Differentialgleichung des Potentials) bei Einführung krummliniger Coordinaten, und anderes mehr. Als Hauptvertreter der krummlinigen Coordinaten haben wir bereits Lamé genannt, der 1830-1860 in der Faculté des Sciences lehrte. Er hat sehr viel durch Vorlesungen gewirkt, die er am Ende seiner Laufbahn in Lehrbücher zusammen gefasst hat. Wir nennen als solche:

1) Leçons sur les fonctions inverses, des transcendantes et les surfaces isothermes 1857.

Eine Flächenschaar $f = \text{Const.}$ heisst isotherm, wenn die Gleichung $\Delta f = 0$ erfüllt ist; heutzutage nennt man solche Flächen Niveauflächen des Potentials f.

2) Leçons sur les coordonnées curvilignes 1859.

3). Leçons sur la théorie analytique de la chaleur 1861 (d. h. Wärmeleitung)
4). Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides (2 Aufl. 1866).
Diese Werke sind ja jetzt in vielfacher Hinsicht veraltet, aber immer noch mit Nutzen kennen zu lernen.

Wir heben aus den krummlinigen Coordinaten nur zwei Arten heraus, die uns näher beschäftigen sollen:

1) Elliptische Coordinaten
2) Pentasphärische Coordinaten.

Die elliptischen Coordinaten sind zuerst [Fo. 3. XI. 92] im Jahre 1839, gleichzeitig von Jacobi u. Lamé eingeführt worden, und zwar in den Abhandlungen:
Jacobi: Von den geodätischen Linien auf dem Ellipsoid und einer merkwürdigen analyt. Substitution. Crelle 19.
Lamé: Sur l'équilibre des températures dans un ellipsoide à trois axes inegaux. Liouville Bd IV.
Gehen wir nun auf die elliptischen Coordinaten näher ein, so knüpfen wir dabei an ein System confocaler Flächen zweiten Grades an, das wir uns durch folgende Gleichung repräsentieren:

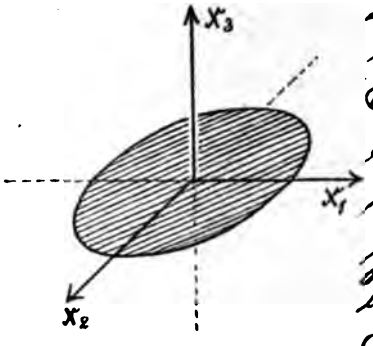
$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{a_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{a_3-\lambda} = 1$$

o $x_1\ x_2\ x_3$ gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten
deuten, während λ ein veränderlicher Parameter
t. Schränken wir nun λ auf reelle Werte ein und
ssen es die Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen,
haben wir folgende Fälle zu unterscheiden:
) Liegt λ zwischen $-\infty$ und a_3 so stellt obi-
e Gleichung Ellipsoide
) . . . . . a_3 . . . . a_2 . . . . einschalige Hyperboloide
) . . . . . a_2 . . . . a_1 . . . . zweischalige Hyperboloide
) . . . . . a_1 . . . . $+\infty$ . . nullteilige Flächen dar.
ir nennen die letzten Flächen nullteilig, weil
e keinen reellen Teil besitzen; den gewöhnli-
ien Namen „imaginäre" Flächen brauchen wir
icht, weil wir später unter imaginären Flächen
lche verstehen wollen, die durch eine Gleichung
it imaginären Coefficienten dargestellt werden,
ährend doch die Gleichung unserer nullteili-
gen Fläche durchaus reell ist.
esuchen wir jetzt, uns eine klare Vorstellung
n der confocalen Flächenschaar zu machen
nd beginnen wir zunächst mit den Ellip-
oiden, deren drei Halbaxen offenbar die Län-
n:

$$\sqrt{a_1-\lambda}\ ,\quad \sqrt{a_2-\lambda}\ ,\quad \sqrt{a_3-\lambda}$$

den werden. Diese Schaar der Ellipsoide

schliesst als Grenzfälle für $\lambda = \infty$ eine unendlich grosse Kugel und für $\lambda = a_3$ eine elliptische Scheibe mit den Halbaxen $\sqrt{a_1 - a_3}$ und $\sqrt{a_2 - a_3}$ ein. Die Randcurve dieser letzteren heisst die Focalellipse unseres Systems; sie ist in der $x_1 x_2$-Ebene gelegen (siehe Figur). Im übrigen ist die Schaar der Ellipsoide so gestaltet, dass sie alle um die Focalellipse herumgelegt sind und in der Weise einander successive einschliessen, dass zuletzt die unendlich grosse Kugel erreicht wird. Es ist leicht zu übersehen, dass sie dabei den ganzen Raum gerade einmal ausfüllen.

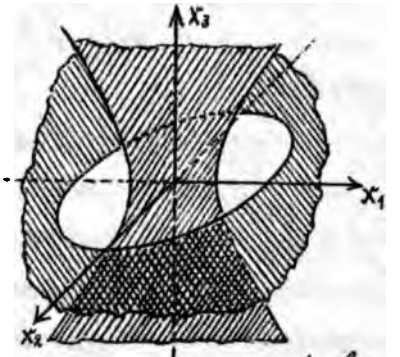


Lassen wir jetzt λ zwischen a_3 u. a_2 variiren, so erhalten wir eine Schaar einschaliger Hyperboloide mit den Halbaxen:

$$\sqrt{a_1 - \lambda}\,,\ \sqrt{a_2 - \lambda}\,,\ i\sqrt{\lambda - a_3}\,.$$

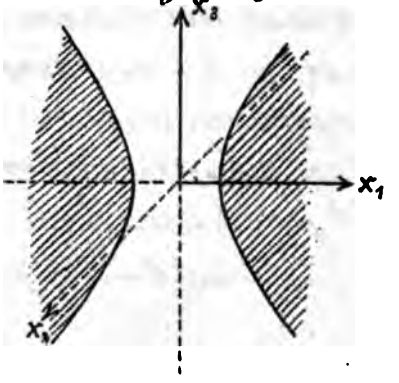
Die Länge der letzten Halbaxe ist natürlich imaginär, d.h. die Verticalaxe unseres Coordinatensystems trifft das Hyperboloid nicht. Die Schaar der Hyperboloide schliesst als Grenzfall für $\lambda = a_3$ eine hyperboloidische Scheibe ein, die das Aeussere der Focalellipse ü[illegible]

ckt, während wir für $\lambda = a_2$ das Innere
„Focalhyperbel" erhalten,
i. den in der nebenstehenden
ur schraffirten Flächenteil.
tere liegt in der $x_1 x_3$ Ebene
d hat folgende Gleichung



$$\frac{x_1^2}{a_1 - a_2} + \frac{x_3^2}{a_3 - a_2} = 1.$$

vischen diese beiden Grenzlagen fügen sich
übrigen einschaligen Hyperboloide in der
se ein, dass sie sich alle um die Focalhyper-
herumlegen, aber von der Focalellipse
nschlossen sind. Sie füllen dabei auch den
um gerade einmal aus.
haben endlich noch die Schaar der zwei-
aligen Hyperboloide zu betrachten, deren
lle Axe in die Richtung der x_1-Axe fällt.
se Schaar schliesst als Grenzfall für $\lambda = a_2$
ausserhalb der Focalhyperbel gelegene
ück der $x_1 \cdot x_3$-Ebene ein,
hrend als zweiter Grenz-
l für $\lambda = a_1$ die doppelt
lende $x_2 \cdot x_3$-Ebene kommt,
der keine Focalcurve wei-
sichtbar ist, da die Glei-



chung

$$\frac{x_1^2}{a_2-a} + \frac{x_2^2}{a_3-a_1} = 1$$ eine nulltheilige Curve vorstellt.

Im übrigen füllt auch die Schaar der zweischaligen Hyperboloide den Raum gerade einmal völlig aus, und zwar in der Weise, dass immer eine Schaale sich um den rechten Ast, die andere um den linken Ast der Focalhyperbel herumlegt.

Wir haben hier scheinbar 3 abgetrennte Flächenschaaren kennen gelernt, jedoch nur scheinbar, da wir von einem höheren Standpunkte aus 1 auch complexe Werte beizulegen haben und dadurch ein einziges, irreducibles Flächensystem erhalten, in dem unsere 3 Flächenschaaren als reelle Unterschaaren enthalten sind.

Nachdem wir uns so ein Bild von dem Verlauf der confocalen Flächen 2ten Grades gemacht haben, müssen wir jetzt zunächst den folgenden wichtigen Satz über dieselben beweisen:

<u>Ein System confocaler Flächen zweiten Grades bildet ein Orthogonalsystem.</u>

Der Beweis des Satzes ist kurz folgender:

Es mögen durch den Raumpunkt $x_1\ x_2\ x_3$ die Flächen mit den Parametern λ und λ' hindurch gehen, deren Gleichungen:

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = \lambda \quad \text{und} \quad \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i - \lambda'} = \lambda.$$

Construiren wir jetzt im Punkte x_i an beide Flächen die Tangentialebenen, deren Gleichungen in laufenden Coordinaten ξ_i resp. sind

$$\sum_1^3 \frac{x_i \xi_i}{a_i - \lambda} = \lambda \quad \text{und} \quad \sum_1^3 \frac{x_i \xi_i}{a_i - \lambda'} = \lambda,$$

so haben wir nachzuweisen, dass die beiden Tangentialebenen aufeinander senkrecht stehen, d. h., dass die Bedingung

$$\sum \frac{x_i}{a_i - \lambda} \cdot \frac{x_i}{a_i - \lambda'} = \sum \frac{x_i^2}{(a_i - \lambda)(a_i - \lambda')} = 0$$

erfüllt ist.

Letztere Gleichung kann man aber durch Subtraktion der beiden Flächengleichungen erhalten; sie ist daher eine algebraische Folge derselben; womit der angeführte Satz als richtig nachgewiesen ist.

Da ausserdem unsere Ausgangsgleichung vom 3ten Grade in λ ist, so gehen durch jeden Punkt drei Flächen des Systems und wir haben also ein <u>dreifaches Orthogonalsy-</u>

stem vor uns:
Erinnern wir uns nun weiter des schon früher erwähnten „Dupin'schen Theorems" über die Durchdringungscurven eines Orthogonalsystems, so können wir sofort folgenden Satz hinstellen:
Die Durchdringungscurven, welche je 2 Flächen eines Systems confocaler Flächen zweiten Grades mit einander gemein haben, und welche nach dem Dupin'schen Theorem die Krümmungscurven derselben vorstellen, sind Raumcurven 4ter Ordnung und bestehen, wenn man sich auf die reellen Flächen des Systems und deren reelle Durchdringung beschränkt, jedesmal aus zwei Ovalen.
Um nun zu den elliptischen Coor- [Fr. 4. XI. 92.]
dinaten selbst zu gelangen, bemerken wir, dass die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3-\lambda}=1,$$

wenn wir darin $x_1\ x_2\ x_3$ als gegeben und λ als Unbekannte ansehen, uns 3 Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ liefert, die wir gerade als die elliptischen Coordinaten des Punktes $x_1\ x_2\ x_3$ ansprechen. Man beachte, dass die cubische Gleichung irredu-

cibel ist, d. h. nicht etwa rational in niedere Gleichungen gespalten werden kann.
Die elliptischen Coordinaten sind also 3 Zweige einer und derselben algebraischen Function der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten, die durch die obige Gleichung definiert wird, und sie nehmen gewissermassen eine Mittelstellung zwischen den Linearcoordinaten und den allgemeinsten krummlinigen Coordinaten ein, insofern sie nämlich algebraische Functionen sind, und man sich deshalb mit ihnen im Gesamtraum zurechtfinden kann, was bei den krummlinigen Coordinaten im Allgemeinen nicht stattfindet.
Beschäftigt man sich mit speciellen Problemen, so sieht man gewöhnlich die x_1, x_2, x_3 als reell an, und es ist von Wichtigkeit zu bemerken, dass in diesem Falle auch die $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reell werden, was eine einfache Folge der geometrischen Thatsache ist, dass die reellen Flächen unseres Systems den Raum gerade 3-fach ausfüllen. Man kann sogar Intervalle für die Werte der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ angeben, wenn man beachtet, dass durch jeden rel-

den Punkt $x_1\ x_2\ x_3$ ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid geht. Es folgt daraus, wenn man die Indices der λ geeignet wählt, dass

$$-\infty \leqq \lambda_3 \leqq a_3 \ ,$$
$$a_3 \leqq \lambda_2 \leqq a_2 \ ,$$
$$a_2 \leqq \lambda_1 \leqq a_1 \ .$$

Sind die elliptischen Coordinaten eines Punctes gegeben, so findet man durch folgende Formeln die rechtwinkligen

$$x_1^2 = \frac{(a_1-\lambda_1)(a_2'-\lambda_2')(a_3'-\lambda_3')}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$
$$x_2^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_3^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

— wie man durch Eintragen in die Anfangsgleichung sofort verificirt.

Diese Formeln lehren, dass zu jedem Wertsystem $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ 8 Punkte gehören, deren Coordinaten sich nur durch ihre Vorzeichen unterscheiden, was ja auch die geometrische Anschauung unmittelbar erkennen lässt. Knüpfen wir jetzt weiter an die eben aufgestellten Formeln an und denken uns 2 Flächen des Systems, etwa 2 Ellipsoide, durch 2 specielle Werte λ_3 und λ_3' gegeben, so werden für das erste Ellipsoid folgende Formeln gelten:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{(a_1-\lambda_1)(a_1-\lambda_2)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}}\,\sqrt{a_1-\lambda_3} \\ x_2 &= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_3 &= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\}$$

in denen wir λ_1 und λ_2 als krummlinige Coordinaten auf dem Ellipsoid auffassen können. Für das 2te Ellipsoid gelten entsprechende Formeln:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \sqrt{\frac{(a_1-\lambda)(a_1-\lambda_2)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}}\,\sqrt{a_1-\lambda_3'} \\ x_2' &= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_3' &= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\}$$

Wir beziehen nun die beiden Ellipsoide aufeinander, indem wir Punkte mit denselben λ_1, λ_2 einander zuordnen, was geometrisch weiter nichts heisst, als dass wir diejenigen Punkte auf den Ellipsoiden sich entsprechen lassen, die auf derselben orthonogalen Trajektorie liegen.
Der analytische Zusammenhang zwischen den Coordinaten der Punkte, auf den bei-

den Flächen wird offenbar durch folgende Formeln gegeben

$$x_1' = \sqrt{\frac{a_1 - \lambda_2'}{a_1 - \lambda_3}}\, x_1 ,$$

$$x_2' = \sqrt{\frac{a_2 - \lambda_2'}{a_2 - \lambda_3}}\, x_2 ,$$

$$x_3' = \sqrt{\frac{a_3 - \lambda_2'}{a_3 - \lambda_3}}\, x_3 ,$$

deren Anblick uns die Richtigkeit des folgenden Satzes lehrt:

Die Beziehung zwischen den beiden Flächen zweiten Grades, die durch die rechtwinkligen Trajektorien vermittelt wird, ist eine affine. (nach Möbius' Terminologie.)

Da nun bei einer affinen Transformation gerade Linien wieder in gerade Linien übergehen, weil offenbar lineare Relationen zwischen den Coordinaten bei der Transformation linear bleiben, so können wir den Satz aussprechen.

Zwei einschalige Hyperboloide des confocalen Systems sind durch ihre orthogonalen Trajektorien derart auf einander bezogen, dass den geradlinigen Erzeugenden der einen Fläche die geradlinigen Erzeugenden der andern entsprechen.

Wir können aber noch weiter behaupten:

Insbesondere sind die Stücke der geraden Linien, welche

sich auf den Hyperboloiden entsprechen, immer gleich lang."

was wir jetzt bewiesen. Zwischen den beiden Hyperboloiden, für die wir die Richtigkeit unserer Behauptung darthun wollen, liegt continuirlich noch eine ganze Schaar confocaler Hyperboloide; wir brauchen daher, um die allgemeine Richtigkeit des Satzes darzuthun, ihn nur für 2 benachbarte Hyperboloide zu beweisen. Für solche ist es aber ein einfaches Corollar des kinematischen Satzes:

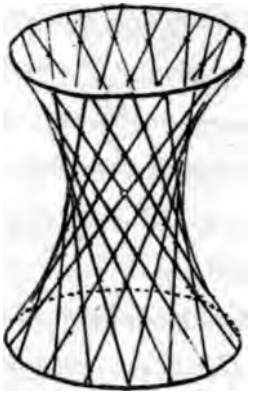
Bewegt man eine gerade Linie unendlich wenig aus ihrer Lage derart, dass die Endpunkte derselben sich normal gegen die Linie bewegen, so bleibt sie immer gleich lang. Der letztere Satz, der ja ohne weiteres plausibel ist, folgt analytisch aus dem Umstande, dass stets das Verhältniss der Längenänderung der Strecke dl zu dem Abstand derselben von ihrer Anfangslage, ds Null ist. *)

Mit Hülfe des soeben bewiesenen Satzes können wir die Theorie des sogenannten „beweglichen Hyperboloids" verstehen, dass zuerst im Jahre 1874 von Henrici in London aufgefunden wurde **). Dasselbe ist weiter nichts als ein Stabmodell, das die beiden Schaaren Erzeugender eines einschaligen Hyperboloids

*) Das soll heissen: Aus $\frac{dl}{ds} = 0$ folgt $l =$ Constans

**) Vergl. den Katalog der math. Ausstellung von Dyck, pag. 261.

enthält. Die aus starrem Material verfertigten Stäbe sind dann allemal an den Stellen, wo sie sich treffen, durch ein Charnier miteinander verbunden, so zwar, dass sie um den Befestigungspunkt sich drehen können. Das so verfertigte Modell, bei welchem alle geradlinigen Stücke Konstante Länge haben, aber sich um ihre Kreuzungspunkte drehen können, ist nach unserm Satze innerhalb eines confocalen Systems beweglich. Henrici hat das zuerst empirisch bemerkt. —



Wir gehen dazu über, eine Anwendung der elliptischen Coordinaten zu machen, indem wir die Theorie der geodätischen Linien auf den Flächen zweiten Grades entwickeln. Diese Theorie ist zuerst von

Jacobi, Crelle Bd 19, 1839 (in der bekannten Abhandlung)

rein analytisch gegeben worden, während dann

Chasles, Liouville Bd 11, 1846,

die geometrische Ergänzung dazu gegeben hat. Wir sprechen es hier gleich als Princip aus, dass wir stets die analytische und geometrische Behandlung der Probleme verknüpfen und nicht viel

viele Mathematiker einen einseitigen Standpunkt einnehmen werden. Denn die analytische Behandlung allein giebt keine anschauliche Vorstellung von den erhaltenen Resultaten und die geometrische Betrachtung allein kann vielfach nur plausible Beweisgründe liefern oder nur den qualitativen nicht aber den quantitativen Verlauf der Curven festlegen.

Wir notieren vorweg den Ausdruck des Linienelements in elliptischen Coordinaten.

1) $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \frac{1}{4}\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\,d\lambda_1^2}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)} + \cdots + \cdots$

und gehen zweitens zum Beweise des folgenden Satzes über:

Die Kegel, die von einem beliebigen Raumpunkte an die confocalen Flächen zweiten Grades laufen, bilden selbst ein confocales System, so dass immer je 2 sich orthogonal schneiden.

Der Satz bedeutet offenbar, dass die scheinbaren Umrisse, welche confocale Flächen einem beobachtenden Auge darbieten, allemal sich rechtwinklig zu kreuzen scheinen.

Um unsern Satz rechnerisch zu be- [Mo. 7. XI. 92.] weisen, knüpfen wir an die Gleichung unseres confocalen Systems an, die wir so schreiben

$\sum A_i x_i^2 = 1$, wo $A_i = \frac{1}{a_i - \lambda}$ zu setzen ist.

Die Gleichung des Systems von Kegeln, die vom Punkte x_i ausgehend die Flächen unseres Systems umhüllen, ist dann nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie in laufenden Coordinaten x_i'

$$\left(\sum A_i x_i^2 = 1\right)\left(\sum A_i x_i'^2 - 1\right) - \left(\sum A_i x_i x_i' - 1\right)^2 = 0$$

oder geordnet

$$-\sum\sum A_i A_k (x_i x_k' - x_k x_i')^2 + \sum A_i (x_i - x_i')^2 = 0.$$

Ersetzen wir in der letzten Gleichung A_i und A_k durch ihren Wert, so erhalten wir als Gleichung unseres Kegelsystems:

$$\sum \frac{(x_i - x_i')^2}{a_i - \lambda} - \sum\sum \frac{(x_i x_k' - x_k x_i')^2}{(a_i - \lambda)(a_k - \lambda)} = 0.$$

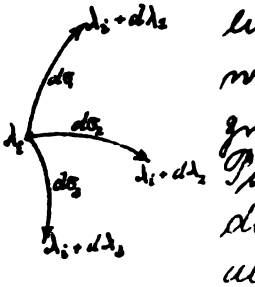
Wir wollen uns jetzt auf die Umgebung des Punktes x_i, von dem die sämtlichen Kegel ausstrahlen, beschränken und die Gleichung für die Fortschreitungsrichtungen ermitteln, die auf dem einzelnen Kegel vom Punkte x_i ausgehen. Wir setzen zu diesem Zwecke einfach $x_i' = x_i + dx_i$, wo dann dx_i eben die Coordinaten einer Fortschreitungsrichtung bedeuten, und erhalten auf diesem Wege aus unserer obigen Kegelgleichung

$$\sum \frac{d\sigma_i^2}{a_i - \lambda} - \sum \sum \frac{(x_i\, dx_k - x_k\, dx_i)^2}{(a_i - \lambda)(a_k - \lambda)} = 0.$$

Transformieren wir nun die letztere Gleichung auf elliptische Coordinaten, indem wir dem Punkte x_i die Coordinaten $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ zuertheilen, so erhalten wir:

$$\sigma = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)\cdot(\lambda_1 - \lambda_3)\cdot d\lambda_1^2}{(a_1 - \lambda_1)\cdot(a_2 - \lambda_1)\cdot(a_3 - \lambda_1)\cdot(a_4 - \lambda_1)} + \cdots\cdots + \cdots\cdots$$

Die Coordinaten einer Fortschreitungsrichtung sind jetzt $d\lambda_1$, $d\lambda_2$, $d\lambda_3$; dabei stehen die drei Richtungen, die durch die einzelnen Differentiale allein charakterisirt werden, natürlich senkrecht auf einander. Führen wir nun noch die Längen der Bogen zwischen dem Punkte λ_i und resp. den Punkten $\lambda_i + d\lambda_1$, $\lambda_i + d\lambda_2$, $\lambda_i + d\lambda_3$ die wir mit $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ bezeichnen, als Coordinaten ein, so haben wir offenbar in der Umgebung des Punktes λ_i, d. h. für unsere Fortschreitungsrichtungen, ein gewöhnliches, rechtwinkliges Coordinatensystem; für die 3 Bogendifferentiale $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ finden wir aber nach unserer allgemeinen Formel für $d\sigma^2$ die Werte:



$$d\sigma_1^2 = \frac{1}{4}\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}\,d\lambda_1^2,$$

$$d\sigma_2^2 = \ldots\ldots\ldots,$$

$$d\sigma_3^2 = \ldots\ldots\ldots,$$

sodass unter Benutzung dieser Werte die Gleichung des Kegelsystems jetzt einfach lautet:

$$0 = \frac{d\sigma_1^2}{\lambda_1-\lambda} + \frac{d\sigma_2^2}{\lambda_2-\lambda} + \frac{d\sigma_3^2}{\lambda_3-\lambda}.$$

Nennen wir die Coordinaten für die Fortschreitungsrichtungen statt $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ etwa $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$, so haben wir also die Gleichung

$$0 = \frac{\xi_1^2}{\lambda_1-\lambda} + \frac{\xi_2^2}{\lambda_2-\lambda} + \frac{\xi_3^2}{\lambda_3-\lambda}.$$

Hiermit haben wir aber in der That die Gleichung eines Systems von confocalen Kegeln 2 Grades vor Augen. Dass sich je 2 Kegel desselben senkrecht schneiden, wird ebenso bewiesen, wie früher die Orthogonalität zweier Flächen des allgemeinen Systems.

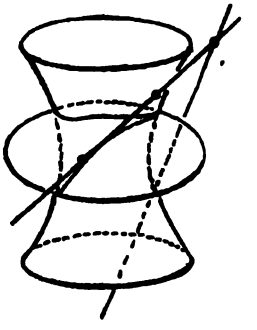
Nach dem Beweise unseres Satzes gehen wir jetzt dazu über, die gemeinsamen Tangenten an 2 Flächen unseres Systems mit den Parame-

sein λ und λ' zu betrachten. Von jedem Punkte des Raumes werden 4 solche Tangenten ausgehen, da die Gleichungen

$$\sigma = \frac{d\sigma_1^2}{\lambda_1 - \lambda} + \dots + \dots$$

$$\sigma = \frac{d\sigma_1^2}{\lambda_1 - \lambda'} + \dots + \dots$$

für die unbekannten Verhältnisse $d\sigma_1 : d\sigma_2 : d\sigma_3$ 4 Wurzeln liefern. Im Ganzen wird es 2-fach unendlich viele gemeinsame Tangenten geben. Man überlege: Von jedem Raumpunkte geht eine endliche Anzahl von solchen Tangenten aus, was eine 3-fach unendliche Mannigfaltigkeit zu geben scheint. Da aber



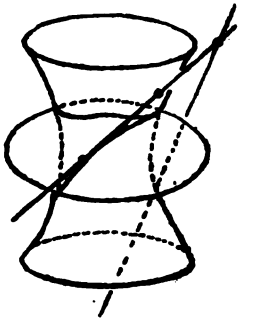
auf jeder gemeinsamen Tangente umgekehrt einfach unendlich viele Raumpunkte liegen, so bleibt eine 2-fach unendliche Mannigfaltigkeit.

Ein jedes derartige Aggregat von 2-fach unendlich vielen Linien nennt man ein Strahlensystem (nach dem Sprachgebrauche der Optik) oder eine Liniencongruenz.

Wir führen zunächst einige Definitionen und

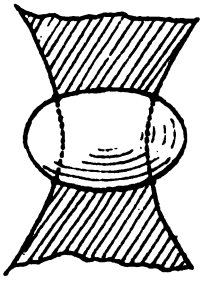
Sätze aus der Lehre von den Strahlsystemen an:
Bei jedem Strahlsysteme spricht man von einer Fläche, die von den Strahlen des Systems umhüllt wird und nennt dieselbe Brennfläche.
Jeder Strahl des Systems berührt die Brennfläche zweimal, und dementsprechend unterscheidet man 2 „Mäntel" der Brennfläche, von denen der eine jedesmal den einen, der andere den anderen Berührungspunkt trägt.
In unserem Falle werden die beiden Mäntel der Brennfläche von den beiden Flächen 2. Grades gebildet, von denen wir ausgehen. —
Wir nehmen jetzt speciell an, um die Ideen zu fixiren, dass unsere beiden Flächen ein Ellipsoid und ein einschaliges Hyperboloid seien und gehen im Folgenden darauf aus, die Umhüllungscurven unseres Strahlensystems auf dem Ellipsoid zu bestimmen, d. h. diejenigen Curven, die in jedem ihrer Punkte von einem Strahle der Liniencongruenz umhüllt werden.
Beginnen wir mit einem beliebigen Punkte des Ellipsoids und suchen die Tangentenrichtung der Umhüllungscurve in diesem Punkte zu bestimmen. Diese Richtung muss

zunächst in der Tangentialebene des Ellipsoids liegen und sodann auch das Hyperboloid berühren. Wir construiren daher in dem betreffenden Punkte des Ellipsoids die Tangentialebene, bringen diese zum Schnitt mit dem Hyperboloid und erhalten dadurch einen Kegelschnitt, an den wir vom Ausgangspunkte die beiden Tangenten legen. Diese definiren uns 2 Richtungen, von denen wir eine nach Belieben als Tangentenrichtung für die gesuchte Umhüllungscurve auswählen können. Fahren wir so fort und construiren Punkt für Punkt die Umhüllungscurve, indem wir in jedem einzelnen Punkte die Tangentenrichtung bestimmen und dann auf dieser jedesmal ein Stück vorwärts gehen, was man am besten vermittelst eines gespannten Fadens oder Drahtes realisirt, so erkennt man ohne Weiteres, dass die mittlere Zone des Ellipsoids doppelt überdeckt ist von Umhüllungscurven unserer Congruenz, deren einzelne so verläuft, dass sie alternirend die Kei-



den Ovale berührt, in denen sich unsere Flächen 2 Grades durchdringen.

Wir haben jetzt noch den Hauptschluss zu machen, dass nämlich jede solche Umhüllungscurve eine geodätische Linie unseres Ellipsoids ist. Das ist aber nicht schwer einzusehen. Denn die Osculationsebene unserer Umhüllungscurve berührt fortwährend das Hyperboloid, steht also nach dem fundamentalen Orthogonalitätstheorem über das von einem Punkte auslaufende System von Umhüllungskegeln auf der Tangentialebene des Ellipsoids senkrecht, und daraus folgt nach der früher gegebenen Definition, dass wir es in der That mit einer geodätischen Linie zu thun haben.



Das einzelne einschalige oder zweischalige Hyperboloid liefert uns auf diese Weise für das Ellipsoid einfach unendlich viele geodätische Linien, die sämmtlich ein und dieselbe Krümmungscurve tangiren, und wenn man all Hyperboloide der Reihe nach nimmt, bekommt man die Gesamtheit

er zweifach unendlich vielen Linien auf dem Ellip-
oid.

Wenn man insbesondere als Hyperboloid die Fo-
alhyperbel nimmt, so entstehen diejenigen von
ns früher besonders genannten, einfach un-
ndlich vielen geodätischen Linien, die durch
ie Nabelpunkte des Ellipsoid hindurchlau-
en. (v. Figur der vorigen Seite.)

ie geometrischen Ueberlegungen, die wir hier
m Anschluss an Chasles ausgeführt haben,
erden wir jetzt in die Sprache der Analysis
bersetzen und gelangen so unmittelbar zu
en Jacobischen Formeln.

ir hatten früher als Kegelgleichung gefunden:

$$r=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}\cdot\frac{d\lambda_1^2}{\lambda_1-\lambda}+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_3)}\cdot\frac{d\lambda_2^2}{\lambda_2-\lambda}$$
$$+\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1-\lambda_3)(a_2-\lambda_3)(a_3-\lambda_3)}\cdot\frac{d\lambda_3^2}{\lambda_3-\lambda}\,.$$

ieser Kegel, der das Hyperboloid λ umhüllt, soll
etzt von einem Punkte des Ellipsoids λ' ausstrah-
en und mit diesem zum Schnitt gebracht wer-
den; wir haben daher $\lambda_3=\lambda'=$ Const. zu setzen, wo-
durch aus obiger Gleichung einfach wird:

$$\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}\,\frac{d\lambda_1^2}{\lambda_1-\lambda} = \frac{\lambda_2-\lambda_3}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)}\,\frac{d\lambda_2^2}{\lambda_2-\lambda}$$

oder

$$d\lambda_1\sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda)}} = \pm\, d\lambda_2\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_3}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda)}}.$$

Das doppelte Vorzeichen entspricht dem Umstande, dass in jedem Punkte des Ellipsoids 2 mögliche Fortschreitungsrichtungen gegeben sind.

Wir können unsere letzten Rechnungen kurz so resumiren:

Indem wir geometrisch das Problem, der geodätischen Linien darauf zurückführen, die Umhüllungscurven von einfach unendlich vielen Strahlsystemen zu bestimmen, haben wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die geodätischen Linien auf einfach unendlich viele Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgebracht, nämlich auf die vorstehende Differentialgleichung, welche die Grösse λ als willkürliche Constante enthält.—

Merkwürdiger Weise lässt sich nun die einzelne

Differentialgleichung erster Ordnung ohne Weiteres integriren, da die Variablen in ihr separirt auftreten. Dabei entstehen hyperelliptische Integrale

$$\int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda)}}$$

$$= \text{Const.} \pm \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda)}}$$

Eben dieses sind Jacobis Formeln für die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid.

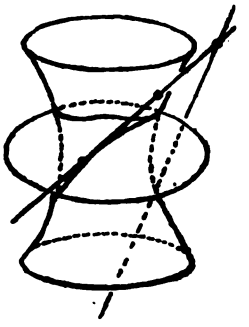
Wir haben uns bisher unter der Fläche $\lambda_3 = \text{Const.}$ immer ein Ellipsoid vorgestellt, was jedoch nur der Anschaulichkeit wegen geschehen ist. Es kann $\lambda_3 = \text{Const.}$ allgemein eine feste Fläche unseres Systems bedeuten. Nehmen wir insbesondere für $\lambda_3 = \text{Const.}$ ein einschaaliges Hyperboloid und verstehen unter $\lambda = \text{Const.}$ dasselbe Hyperboloid, so geht unsere obige Differentialgleichung in die folgende einfachere über:

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}} = \frac{\pm d\lambda_2}{\sqrt{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)}}$$

Dieselbe definirt die Richtungen der geradlinigen

Sätze aus der Lehre von den Strahlsystemen an:
Bei jedem Strahlsysteme spricht man von einer Fläche, die von den Strahlen des Systems umhüllt wird und nennt dieselbe Brennfläche.
Jeder Strahl des Systems berührt die Brennfläche zweimal, und dementsprechend unterscheidet man 2 „Mäntel" der Brennfläche, von denen der eine jedesmal den einen, der andere den anderen Berührungspunkt trägt.
In unserem Falle werden die beiden Mäntel der Brennfläche von den beiden Flächen 2. Grades gebildet, von denen wir ausgehen. —
Wir nehmen jetzt speciell an, um die Ideen zu fixiren, dass unsere beiden Flächen ein Ellipsoid und ein einschaliges Hyperboloid seien und gehen im Folgenden darauf aus, die Umhüllungscurven unseres Strahlensystems auf dem Ellipsoid zu bestimmen, d. h. diejenigen Curven, die in jedem ihrer Punkte von einem Strahle der Liniencongruenz umhüllt werden.
Wir nehmen nun einen beliebigen Punkt des Ellipsoids und suchen die Tangentenrichtung der Umhüllungscurve in diesem Punkte zu bestimmen. Diese Richtung muss

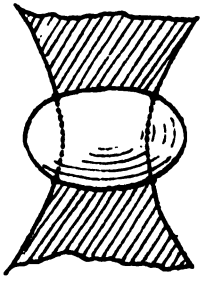
ächst in der Tangentialebene des Ellipsoids
ren und sodann auch das Hyperboloid berüh-
. Wir construiren daher in dem betreffen-
n Punkte des Ellipsoids die Tangentialebene,
ingen diese zum Schnitt mit dem Hyper-
oid und erhalten dadurch einen Kegel-
nitt, an den wir vom Ausgangspunkte
e beiden Tangenten legen
e, definiren uns 2 Richtun-
, von denen wir eine nach
lieben als Tangentenrichtung
die gesuchte Umhüllungs-
ve auswählen können.
hren wir so fort und con-
uiren Punkt für Punkt
e Umhüllungscurve, in-



n wir in jedem einzelnen Punkte die Tan-
tenrichtung bestimmen und dann auf die-
jedesmal ein Stück vorwärts gehen, was
an am besten vermittelst eines gespannten
dens oder Drahtes realisirt, so erkennt
n ohne Weiteres, dass die mittlere Zone des
ipsoids doppelt überdeckt ist von Umhül-
ngscurven unserer Congruenz, deren einzel-
e so verläuft, dass sie alternirend die bei-

den Ovale berührt, in denen sich unsere Flächen 2 Grades durchdringen.

Wir haben jetzt noch den Hauptschluss zu machen, dass nämlich jede solche Umhüllungscurve eine geodätische Linie unseres Ellipsoids ist. Das ist aber nicht schwer einzusehen. Denn die Osculationsebene unserer Umhüllungscurve berührt fortwährend das Hyperboloid, steht also nach dem fundamentalen Orthogonalitätstheorem über das von einem Punkte aus laufende System von Umhüllungskegeln auf der Tangentialebene des Ellipsoids senkrecht, und daraus folgt nach der früher gegebenen Definition, dass wir es in der That mit einer geodätischen Linie zu thun haben.



Das einzelne einschalige oder zweischalige Hyperboloid liefert uns auf diese Weise für das Ellipsoid einfach unendlich viele geodätische Linien, die sämmtlich ein und dieselbe Krümmungscurve tangiren, und wenn man alle Hyperboloide der Reihe nach nimmt, bekommt man die Gesamtheit

der zweifach unendlich vielen Linien auf dem Ellipsoid.

Wenn man insbesondere als Hyperboloid die Focalhyperbel nimmt, so entstehen diejenigen von uns früher besonders genannten, einfach unendlich vielen geodätischen Linien, die durch die Nabelpunkte des Ellipsoid hindurchlaufen. (v. Figur der vorigen Seite.)

Die geometrischen Ueberlegungen, die wir hier im Anschluss an Chasles ausgeführt haben, werden wir jetzt in die Sprache der Analysis übersetzen und gelangen so unmittelbar zu den Jacobischen Formeln.

Wir hatten früher als Kegelgleichung gefunden:

$$0 = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}\cdot\frac{d\lambda_1^2}{\lambda_1-\lambda} + \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_2)}\cdot\frac{d\lambda_2^2}{\lambda_2-\lambda}$$
$$+ \frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1-\lambda_3)(a_2-\lambda_3)(a_3-\lambda_3)}\cdot\frac{d\lambda_3^2}{\lambda_3-\lambda}.$$

Dieser Kegel, der das Hyperboloid λ umhüllt, soll jetzt von einem Punkte des Ellipsoids λ' ausstrahlen und mit diesem zum Schnitt gebracht werden; wir haben daher $\lambda_3 = \lambda' = \text{Const.}$ zu setzen, wodurch aus obiger Gleichung einfach wird:

$$\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}\,\frac{d\lambda_1^2}{\lambda_1-\lambda}=\frac{\lambda_2-\lambda_3}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)}\,\frac{d\lambda_2^2}{\lambda_2-\lambda}$$

oder

$$d\lambda_1\sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda)}}$$
$$=\pm\, d\lambda_2\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_3}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda)}}.$$

Das doppelte Vorzeichen entspricht dem Umstande, dass in jedem Punkte des Ellipsoids 2 mögliche Fortschreitungsrichtungen gegeben sind.

Wir können unsere letzten Rechnungen kurz so resumiren:

Indem wir geometrisch das Problem der geodätischen Linien darauf zurückführen, die Umhüllungscurven von einfach unendlich vielen Strahlsystemen zu bestimmen, haben wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die geodätischen Linien auf einfach unendlich viele Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgebracht, nämlich auf die vorstehende Differentialgleichung, welche die Grösse λ als willkürliche Constante enthält.—

Merkwürdiger Weise lässt sich nun die eingelne

Differentialgleichung erster Ordnung ohne Weiteres integriren, da die Variablen in ihr separirt auftreten. Dabei entstehen hyperelliptische Integrale

$$\int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda)}}$$

$$= \text{Const.} \pm \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda)}}$$

Eben dieses sind Jacobis Formeln für die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid.

Wir haben uns bisher unter der Fläche $\lambda_3 = \text{Const.}$ immer ein Ellipsoid vorgestellt, was jedoch nur der Anschaulichkeit wegen geschehen ist. Es kann $\lambda_3 = \text{Const.}$, allgemein eine feste Fläche unseres Systems bedeuten. Nehmen wir insbesondere für $\lambda_3 = \text{Const.}$ ein einschaaliges Hyperboloid und verstehen unter $\lambda = \text{Const.}$ dasselbe Hyperboloid, so geht unsere obige Differentialgleichung in die folgende einfachere über:

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}} = \frac{\pm d\lambda_2}{\sqrt{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)}}$$

Dieselbe definirt die Richtungen der geradlinigen

Erzeugenden unserer Fläche $\lambda_3 = \text{Const}$, wie geometrisch ohne weiteres einleuchtet. Denn die einzelne Grade, deren Richtung durch die obige Differentialgleichung festgelegt ist, soll die Fläche λ_3 an 2 Stellen berühren. Da eine Grade eine Fläche 2 Grader aber nur an einer Stelle berühren kann, oder ganz auf ihr liegen muss, so kann in unserem Falle nur das letztere eintreten. Die gerade Linie wird also selbst Integralcurve. Im Uebrigen kann man sich auch leicht am Modell vorstellen, wie die geodätischen Linien auf einem einschaligen Hyperboloid allmählig in die Erzeugenden übergehen, wenn man von 2 einschaligen Hyperboloiden ausgeht, sich deren gemeinsame Tangenten vorstellt und dann die Hyperboloide immer näher an einander bringt, bis sie schliesslich zusammenfallen.

Um später noch einige weitere geometrische Folgerungen analytisch zu beweisen, stellen wir hier zunächst einige Formeln zusammen, die uns die Längen der Bogenelemente einiger bisher betrachteten Curven angeben. In diesen Formeln können die auftretenden Quadratwurzeln mit irgend welchem Zeichen genommen werden.

1) Bogenelement einer Tangente, welche die Flächen λ und λ' berührt:

$$ds_1 = \frac{d\lambda_1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda'-\lambda_1)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}} + \frac{d\lambda_2}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda'-\lambda_1)}{\cdots\cdots\cdots}}$$

$$+ \frac{d\lambda_3}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_3)(\lambda'-\lambda_3)}{\cdots\cdots\cdots\cdots}} ;$$

2) Bogenelement einer geodätischen Linie auf der Fläche $\lambda' = \lambda_3 = \text{Const.}$, deren Tangenten die Fläche λ berühren:

$$ds_2 = \frac{d\lambda_1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}} + \frac{d\lambda_2}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)}} ;$$

3) Bogenelement einer Krümmungscurve; die den Flächen $\lambda' = \lambda_3 = \text{Const.}$ und $\lambda = \lambda_2 = \text{Const.}$ gemeinsam angehört:

$$ds_3 = \frac{d\lambda_1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}} .$$

Wir bemerken ad 1), dass die Formel aus dem allgemeinen Ausdruck für ds in elliptischen Coordinaten mit Hülfe der beiden Relationen

$$0 = d\lambda_1^2 \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)(\lambda-\lambda_1)} + \cdots + \cdots$$

$$0 = d\lambda_1^2 \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)(\lambda'-\lambda_1)} + \cdots + \cdots$$

hergeleitet ist, die wir als Differentialgleichungen für die vom Punkte $\lambda_1, \lambda_2 \lambda_3$ an die Flächen λ und λ' gehenden Umhüllungskegel kennen gelernt haben. Die nähere Rechnung führen wir hier nicht durch.

Auch betreffs der Formeln 2) u. 3) brauchen wir wohl nicht näher anzugeben, wie sie aus 1) durch Specialisirung entstanden sind, da die vorzunehmenden Specialisirungen ja schon in den Ueberschriften zu den Formeln implicite enthalten sind.

Wir gehen vielmehr jetzt gleich dazu über, geometrische Folgerungen aus unsern Formeln zu ziehen und wollen

1) <u>das Theorem, auf dem Henrici's bewegliches Hyperboloid beruht, analytisch verificiren.</u>

Das Theorem lautete ja:

<u>Die entsprechenden Stücke geradliniger Erzeugenden auf 2 confocalen einschaaligen Hyperboloiden sind stets gleich lang.</u>

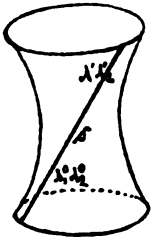
Zum Beweise dieses Theorems stellen wir uns unter λ_3 = Const. ein einschaaliges Hyperboloid vor und sehen λ_1, λ_2 als ein krummliniges Coordinatensystem auf diesem Hyperboloid an. Wir erhalten dann nach For-

For-

mit 2) als Bogenelement einer geradlinigen Erzeugenden, indem wir $\lambda = \lambda_3$ setzen:

$$d\sigma = \pm \frac{d\lambda_1}{2} \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\sqrt{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}} \pm \frac{d\lambda_2}{2} \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\sqrt{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)}};$$

ich habe dabei die doppelten Vorzeichen, über die wir bisher noch nichts festgesetzt hatten, explicite hervortreten lassen.



Um daraufhin die Länge σ der geradlinigen Erzeugenden zwischen den beiden Punkten λ^0_1, λ^0_2 und λ'_1, λ'_2 zu ermitteln, haben wir einfach zwischen diesen Grenzen zu integriren, also

$$= \pm \int_{\lambda^0_1}^{\lambda'_1} \frac{d\lambda_1}{2} \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\sqrt{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}} \pm \int_{\lambda^0_2}^{\lambda'_2} \frac{d\lambda_2}{2} \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\sqrt{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)}}$$

In der letzten Gleichung heben sich nun infolge der oben mitgetheilten Differentialgleichung der geradlinigen Erzeugenden die Glieder mit λ_3 weg [was wir streng allerdings nur mit genauer Discussion der Wurzelvorzeichen schliessen können, worauf wir jedoch nicht näher

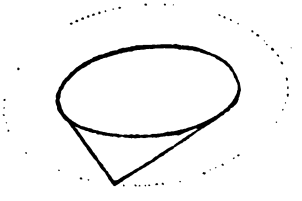
eingehen. Genauer gesagt: Es handelt sich darum festzulegen, wie in der Differentialgleichung der geradlinigen Erzeugenden einerseits, in der Formel für ihr Bogenelement andrerseits die doppelten Vorzeichen zusammengehören]. Darin liegt aber gerade das Hentricische Theorem, denn die Unabhängigkeit der Länge von λ_3 bedeutet doch weiter nichts, als dass wir zwischen 2 entsprechenden Punkten stets dieselbe Länge erhalten werden, auf welchem Hyperboloid λ_3 wir auch messen mögen.

Zusammenfassend können wir daher sagen: Indem in unserem Ausdruck für ds die Glieder mit λ_3 vermöge der Differentialgleichung der geradlinigen Erzeugenden herausfallen, wird die Länge eines Stückes s auf einer geradlinigen Erzeugenden, welche von einem Punkte λ_1, λ_2 zum Punkte λ'_1, λ'_2 auf dem Hyperboloid λ_3 hinführt, von λ_3 ganz unabhängig, ist also für alle Hyperboloide $\lambda_3 = \text{Const.}$ dieselbe, und eben dieses war die Aussage des Hentricischen Satzes.

2) Als 2. geometrische Anwendung wollen wir eine <u>Fadenconstruction der Flächen 2.</u>

Grades speciell des Ellipsoids kennen lernen, die zuerst Staude gefunden und in den Mathem. Annalen Bd. 20, 1882 publicirt hat. Staude war damals als junger Doctor Mitglied des Leipziger Seminars.

Wir erinnern zu dem Zwecke zunächst an eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Fadenconstruction der Ellipse, die Graves Dublin 1850 (cf. Salmon, Kegelschnitte) angegeben hat. Er befestigt den Faden von constanter Länge nicht in den beiden Brennpunkten der zu erzeugenden Ellipse, sondern legt ihn gespannt um eine Ellipse, wie es in der nebenstehenden Figur zu sehen ist, und erzeugt dann durch Bewegung des Stiftes eine zu der zu Grunde gelegten confocale Ellipse. Die gewöhnliche Construction erhält man aus dieser allgemeinern, wenn man die zu Grunde gelegte Ellipse in eine Grade, man könnte sagen, die „Focalgerade" zusammenschrumpfen lässt. Diese Construction hat Staude für den Raum verallgemeinert, in-



dem er ein Ellipsoid und ein confocales Hyperboloid zu Grunde legte, um mit ihrer Hülfe ein confocales Ellipsoid zu construiren. Er schlang einen Faden von constanter Länge so um die Fläche, dass er, soweit er auf den Flächen liegt, stets auf einer zugehörigen geodätischen Linie oder der Krümmungscurve, in der sich beide durchdringen, verläuft. Weiterhin erstreckt sich im Raume der Faden geradlinig, natürlich so, dass er in seiner Richtung stets eine gemeinsame Tangente beider Flächen liefert. Knüpft man dann die Enden des Fadens an einem Stifte zusammen und bewegt den Stift unter Innehaltung der eben angegebenen Bedingungen, d.h. einfach unter Spannung des Fadens, im übrigen beliebig im Raume, so beschreibt derselbe ein Ellipsoid, das mit den beiden Ausgangsflächen confocal ist. Die Construction wird besonders einfach und anschaulich, wenn man ihr als confocale Flächen die Focalellipse und Focalhyperbel zu Grunde legt. Um übrigens die Verhältnisse ganz klar zu überschauen, muss man durchaus Modelle

zur Hand haben, wie sie von Stäude im Brill'schen Verlag veröffentlicht sind. Andererseits verweise ich auf die sehr eingehende Darstellung Stäudes in der bereits genannten Abhandlung (Annalen 20).

Auch betreffs des analytischen [Do. 10.XI.92.] Beweises der allgemeinen Stäude'schen Fadenconstruction, der sich aus den früher mitgeteilten Bogenelementen unter gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen ergiebt, müssen wir auf diese Abhandlung verweisen, während wir uns hier der Kürze halber auf den einfacheren, aber doch durchaus analogen Beweis der Theorems von Graves beschränken.

Wir legen zu dem Zwecke ein System confocaler Kegelschnitte

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}=1$$

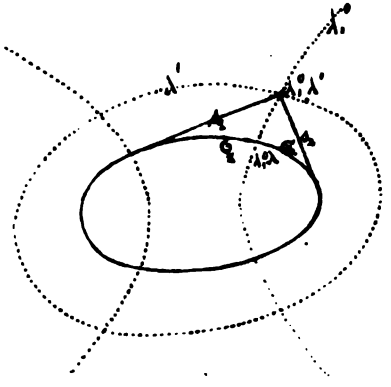
zu Grunde, wobei wir die Annahme machen, dass

$$-\infty < a_2 < a_1 \text{ ist.}$$

Liegt dann λ zwischen $-\infty$ und a_2, so wol-

den wir es mit λ_2 bezeichnen, liegt es zwischen a_2 und a_1, mit λ_1, sodass also $\lambda_2 = \text{Const.}$ die Gleichung einer Ellipse, $\lambda_1 = \text{Const.}$ die Gleichung einer Hyperbel vorstellt. Das System confocaler Kegelschnitte verläuft dann offenbar so, dass mit wachsendem λ_2 die Ellipsen sich immer mehr zusammenziehen, und dass, mit wachsendem λ_1, die Hyperbeln immer steiler werden, d. h. immer mehr an die x_2-Axe herangehen. Für $\lambda = a_1$ erhält man als degenerirte Ellipse das Stück der x_1-Axe zwischen den beiden Brennpunkten, und als degenerirte Hyperbel das Stück ausserhalb derselben, für $\lambda = a_2$ sind die Hyperbeln in die x_2-Axe übergegangen.

Wir wählen nun 2 beliebige Ellipsen, $\lambda_2 = \lambda'$ und $\lambda_2 = \lambda > \lambda'$ aus der Schaar aus und ziehen von einem Punkte λ_1^0, λ' der letzteren die beiden Tangenten an die innere Ellipse, deren Längen wir mit s_1 und s_2 bezeichnen. (s. Figur)



Durch den Punkt N_1^0, N' geht weiter eine Hyperbel $N_1 = N_1^0$, die die innere Ellipse im Punkte N_1^0, N schneidet. Durch diesen Schnittpunkt wird der Ellipsenbogen zwischen den Berührungspunkten der beiden vorher construirten Tangenten in 2 Teile zerlegt, deren Längen wir den geradlinigen Stücken s_1, s_2 entsprechend mit σ_1 und σ_2 bezeichnen. Ist nun L die Länge des Umfanges der inneren Ellipse, so kommt der Satz von Graves offenbar darauf hinaus, dass der Ausdruck

$$L + (s_1 - \sigma_1) + (s_2 - \sigma_2)$$

konstant bleiben muss, wie man auch den Anfangspunkt der Construction auf der äusseren Ellipse wählen möge, d. h. dass der Ausdruck von N_1^0 unabhängig sein muss. Nun ist L sicher von N_1^0 unabhängig; wir haben also nur noch nachzuweisen, dass auch $s_1 - \sigma_1$ und $s_2 - \sigma_2$ nicht von N_1^0 abhängen, und dazu müssen wir diese Längen berechnen.

Das Bogenelement der Tangente s_1 finden wir durch Specialisirung unserer früheren Formeln:

$$ds_1 = \frac{d\lambda_1 \sqrt{\nu - \lambda_1}}{2\sqrt{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)}} + \frac{d\lambda_2 \sqrt{\nu - \lambda_2}}{2\sqrt{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)}},$$

wo wir beiden Gliedern das positive Vorzeichen gegeben haben, weil die Tangente t_2 sich im Sinne der wachsenden λ_1 und λ_2 bewegt. Durch Integration erhalten wir dann:

$$s_1 = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1'} \frac{d\lambda_1 \sqrt{\nu - \lambda_1}}{2\sqrt{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)}} + \int_{\lambda_1'}^{\lambda} \frac{d\lambda_2 \sqrt{\nu - \lambda_2}}{2\sqrt{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)}}.$$

Weiter finden wir für das Bogenelement der Ellipse:

$$d\sigma_1 = \frac{d\lambda_1 \sqrt{\nu - \lambda_1}}{2\sqrt{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)}}, \text{ also}$$

$$\sigma_1 = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1'} \frac{d\lambda_1 \sqrt{\nu - \lambda_1}}{2\sqrt{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)}} \quad \text{und daher}$$

$$s_1 - \sigma_1 = \int_{\lambda'}^{\lambda} \frac{d\lambda_2}{2} \sqrt{\frac{\nu - \lambda_1}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)}}$$

In ganz analoger Weise ergiebt sich unter Berücksichtigung der Vorzeichen

$$\sigma_2 - \sigma_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda_1}{2} \sqrt{\frac{\lambda - \lambda}{(a_2 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)}}$$ d. h. denselbe Betrag wie für $\sigma_1 - \sigma_1$. Wir erkennen daher, dass $\sigma_1 - \sigma_1$ und $\sigma_2 - \sigma_2$ von λ_1^0 ganz unabhängig sind und aus dieser Unabhängigkeit unserer Differenzen von λ_1^0 folgt jetzt, dass die gesamte Fadenlänge in der That constant ist, wie es das Theorem von Graves behauptet.
Indem wir noch bemerken, dass dieser ganze Beweisgang sich im Gebiete der elliptischen Integrale bewegte, verlassen wir die Theorie der elliptischen Coordinaten und gehen wie beabsichtigt über zu den

2) Pentasphärischen Coordinaten,

die ihren Namen dem Umstande verdanken, dass 5 Kugeln der Coordinatenbestimmung im Raume zu Grunde liegen. In der Ebene operirt man entsprechend mit 4 Kreisen, so dass man die Coordinaten in der Ebene als tetracyclische bezeichnen könnte. Ehe wir jedoch zur Theorie dieser Coordinaten selbst übergehen, wollen wir noch eine längere Einleitung über

die Lehre von den Kreisen und Kugeln

vorausschicken und gleich hervorheben, welch

grosse Rolle diese Gebilde in der Entwicklung der neuern Geometrie gespielt haben. Man findet nämlich häufig die Ansicht, als ob nur die gerade Linie resp. die Ebene von fundamentaler Bedeutung für die Entwicklung der neuern Geometrie gewesen; demgegenüber möchten wir aber darauf hinweisen, dass seit Beginn dieses Jahrhunderts neben den Betrachtungen über Gerade und Ebene (also den projectiven Betrachtungen im engeren Sinne) Betrachtungen über Kreis und Kugel immer nebenhergelaufen sind.

Wir erinnern hier zunächst an ein Werk, das an der Schwelle dieses Jahrhunderts erschienen, heute vielfach in Vergessenheit gerathen ist:

Mascheroni, La geometria del compasso. Pavia 179.

Sein Werk verfolgt die elementar-geometrische Tendenz, alle Constructionen mit dem Zirkel allein auszuführen und das Lineal ganz zu verbannen. Den Verfasser leitet dabei ein praktischer Gesichtspunkt; er will den Mechanikern Vorschriften für ihre Constructionen, speciell für die Ausführung der Kreistheilung geben, weil er der Ansicht ist, dass jedenfalls bei Constructionen auf Metallplatten der Zirkel zuverlässiger arbeitet als das Lineal.

Die eigentlich neue Entwicklung der Kreistheorie, welche hier für uns in Betracht kommt, wurde bald darauf in Frankreich angebahnt, nämlich innerhalb der Schule von Monge. Ich erwähne hier beiläufig, dass Monge 1794 die École polytechnique mit begründete und dann auch bis 1815 bis zur Restauration an ihr lehrte. Monge's Hauptarbeiten sind:

1) Die Géométrie descriptive, ein Werk, das der darstellenden Geometrie, die bis dahin nur eine Summe von praktischen Regeln war, den Rang einer Wissenschaft gab; dann die schon früher von uns genannten

2) Applications d'analyse à la Géométrie (Differential-Geometrie).

Monge's Verdienst liegt jedoch keineswegs allein in diesen wissenschaftlichen Veröffentlichungen, sondern er hat noch viel mehr indirect durch seine Lehrthätigkeit gewirkt, aus der eine ganze Schule bedeutender Geometer hervorgegangen ist. Diese Schule, die von Monge hinterlassen wurde, schuf sich bald ein eigenes Publicationsorgan, die erste mathematische Zeitschrift, die überhaupt erschienen ist. Früher gab es ja nur die Mémoires de l'Académie,*) und an diese

*) bez. der anderen Academieen.

schloss sich bei Begründung der polytechnischen Schule das Journal de l'École Polytechnique, das jedoch auch nur in längeren Zeiträumen erschien. Bei der nun erwachenden vielseitigen mathematischen Production machte sich das Bedürfniss nach rascherer Publication in einem nur für die Mathematik bestimmten Organe geltend, und so entstanden

1) Gergonne's Annales de Mathématiques,

die von 1810–1831 erschienen sind. An diese schlossen sich dann weiter an:

2) Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik von 1826 an, und

3) Liouville's Journal von 1836 an.

Die Arbeiten der Schüler von Monge sind zum Teil im Journal de l'École Polytechnique, zum Theil in Gergonne's Annalen erschienen. Für die Theorie der Kreise und Kugeln, die wir hier im Auge haben, sind besonders folgende Arbeiten von Bedeutung:

1) Gaultier 1812, im Journal de l'École Polyt., wo insbesondere Orthogonalkreise untersucht werden.

2) Gergonne 1816, in den eigenen Annalen,*) wo sich berührende Kreise behandelt werden.

In diesen beiden Arbeiten werden teils ganz neue End-

*) Bd. 7.

wicklungen geliefert, teils bekannte Sätze mit neuen eleganten Beweisen versehen; so wird z. B. in der Arbeit von Gergonne das bekannte Faktionsproblem des Appollonius in musterhafter Weise behandelt.

10 Jahre später als in Frankreich begann auch in Deutschland eine neue Periode, wie für geometrische Forschung überhaupt, so insbesondere für unsere Theorie. Wir haben die beiden Arbeiten zu nennen:

Steiner 1826, Crelle's Journal Bd. I Einige geometrische Betrachtungen und

Plücker 1827/28 in Bd. I. der analyt.-geometrischen Entwicklungen.

Hier zunächst einiges Nähere über Steiners Untersuchungen und seine Persönlichkeit.

Steiner verallgemeinerte in seinen Untersuchungen die bisherige Theorie der Kreise dahin, dass er nicht, wie die Franzosen, nur sich senkrecht schneidende, oder sich berührende Kreise betrachtete, sondern solche, die sich unter einem beliebig gegebenen Winkel schneiden. Es ist dabei seine Eigenart, dass er alle Aufgaben rein construktiv ohne jegliche Formeln behandelt, wobei er dann allerdings vielfach die Beweise unterdrückt, sodass das Princip, aus dem heraus er seine Entwicklungen genommen hat, nicht recht zu Tage tritt. (cf. was die Kreisuntersuchungen angeht, die Vorrede zu Fiedler, Cyclographie 1883)

Die ausschliessliche Vorliebe Steiners für das Anschauliche und seine Abneigung gegen alle analytischen Formeln wird uns erklärlich, wenn wir an seinen Bildungsgang denken, wenn wir uns erinnern, dass er aus der Schule des berühmten Pestalozzi hervorgegangen ist, der ja als Pädagog das Hauptgewicht auf Anschauung und anschauungsmässigen Unterricht legte. Auch hat Steiner in seiner Jugend keine gründliche mathematische Bildung genossen, ist überhaupt Autodidakt gewesen, sodass er wohl in der Behandlung analytischer Formeln nicht sehr gewandt war. Steiner war von 1835/65 Professor in Berlin und hat von dort durch seine Werke und seine Lehrthätigkeit das Interesse für reine Geometrie in Deutschland bedeutend gehoben. Insbesondere geht auf ihn die deutsche Schule der neueren Synthetiker zurück, welche immer noch besteht und jede Bezugnahme auf analytische Formeln möglichst vermeidet.
Steiners Hauptpublicationen sind die folgenden:
1832: Systematische Entwicklungen der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander,
1833. Geometrische Constructionen, ausgeführt mittelst der Lineals und eines festen Kreises (Gegensatz zu Mascheroni),
1881/82 Steiners Werke 2 Bde. herausgegeben von Weierstrass.
Ferner sind noch Steiners Vorlesungen über synthet. Geometrie herausgegeben und zwar
Teil I von Geiser in Zürich: Die Theorie der Kegelschnitte in

elementare Darstellung 2. Aufl. Lpzg. 1875.
Teil I von Schröter in Breslau: Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projective Eigenschaften. 2 Aufl. Lpzg. 1876.
Nach diesen historischen Notizen gehen wir dazu über, einige elementare Entwicklungen aus der Kreistheorie mitzuteilen, wie sie z.B. bei Plücker in dem genannten Werke zu finden sind. Die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt α, β und dem Radius r lautet in rechtwinkl. Coordinaten: [Fr. 11.XI.92]

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0.$$

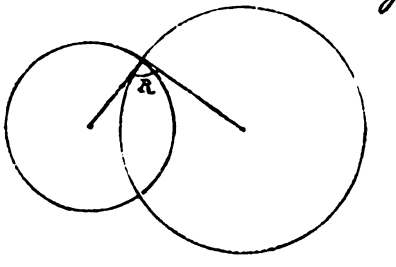
Die linke Seite dieser Gleichung, die wir abkürzend mit S bezeichnen wollen, ist einer einfachen geometrischen Interpretation fähig, wenn man vom Punkte x, y die Tangente an den durch obige Gleichung dargestellten Kreis zieht. S ist nämlich einfach das Quadrat der Länge dieser Tangente vom Punkte x, y bis zum Berührungspunkte. Man kann diesen Ausdruck S, den Steiner als die Potenz des Punktes x, y in Bezug auf den Kreis bezeichnete, auch in folgende Gestalt setzen:

$$S = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - C, \text{ wo } C = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \text{ ist.}$$

Wir notiren hier zunächst einige elementare Formeln, die wir im Folgenden benutzen wollen:

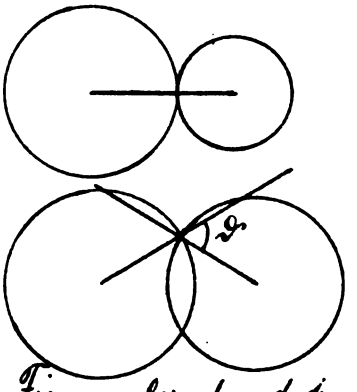
1) 2 Kreise $S = 0$ und $S' = 0$ schneiden einander rechtwinklig, wenn $\sigma = 2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' - C - C'$;

2) 2 Kreise berühren sich von Aussen oder Innen, wenn $\sigma = 2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' - C - C' + 2rr'$



wo $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - C}$, $r' = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 - C'}$ ist.

3) 2 Kreise schneiden sich unter dem $\angle \varphi$, wenn $0 = 2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' - C - C' - 2rr'\cos\varphi$.



Die 3 oben aufgestellten Bedingungen resultiren aus folgenden Gleichungen

1) $(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 = r^2 + r'^2$,

2) $(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 = (r \pm r')^2$,

3) $(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 = r^2 + r'^2 + 2rr'$,

deren Richtigkeit aus den nebenstehenden Figuren, bez. den dort auftretenden geradlinigen Dreiecken abzulesen ist. Im Übrigen bemerken wir noch, dass die Formel 1, die Orthogonalitäts-Bedingung, in den Constanten beider Kreise bilinear ist, und dass in der Formel 3, die ersten beiden für $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$ resp. $\varphi = \pi$ enthalten sind. In den eben mitgetheilten Formeln aus der Theorie der Kreise prägt sich nun gleich eine 2-Theilung in analytischer Beziehung entgegen. Wir können die Formeln nämlich scheiden in

1) Elementare Formeln, die in α, β, C rational sind,

2) Höhere Formeln, die in α, β, C, r rational sind (in denen r in ungrader Potenz vorkommt.)

Dementsprechend giebt es auch eine niedere Lehre vom Kreise, in der immer nur α, β, C vorkommen, und eine höhere, in der α, β, C und r neben einander vorkommen.

Wir werden Beispiele für beide Theile der Kreislehre geben und beginnen zunächst mit dem

1) niederen Teile der Kreislehre.

In diesem Teile spielt die Chordale (nach Plückers Ausdrucksweise) oder Radicalaxe (nach Gaultier) zweier Kreise eine hervorragende Rolle. Dieselbe stellt den Ort gleicher Potenzen in Bezug auf beide Kreise dar, ist also durch die Gleichung $S - S' = 0$ gegeben. Indem wir entwickeln, kommt

$$2(\alpha' - \alpha)x + 2(\beta' - \beta)y + c - c' = 0$$

woraus ersichtlich, dass es sich um eine gerade Linie handelt. Die Chordale geht andrerseits notwendig durch die beiden Schnittpunkte der Kreise, da in diesen für beide Kreise die Potenz Null vorhanden ist. Man kann die Radicalaxe zweier Kreise also auch definiren, als die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte. Nun verliert diese scheinbar einfachere Definition ihre unmittelbare Bedeutung, wenn die Schnittpunkte imaginär werden.

Ein Hauptsatz der Chordalentheorie ist der folgende:
Construirt man zu je zweien von 3 Kreisen die Radicalaxe, so gehen dieselben durch einen Punkt, das sogen. Radicalcentrum.
Der analytische Beweis dieses Satzes ist einfach der folgende:
Es seien die Gleichungen der 3 Kreise:

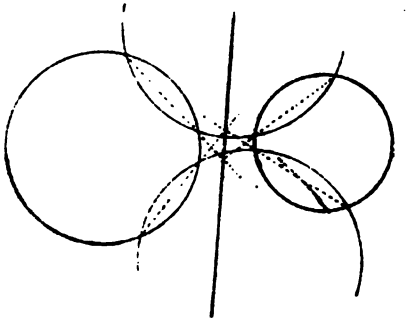
$$S = 0, \quad S' = 0, \quad S'' = 0,$$

dann sind die Gleichungen zweier Chordalen

$$S = S', \quad S = S''.$$

Wo diese beiden Gleichungen gelten, d. h. im Schnittpunkt der beiden Radicalaxen, muss aber auch die Gleichung $S' = S''$ gel-

den und das ist grade die Gleichung der 3. Radicalaxe, woraus man unmittelbar auf die Richtigkeit unseres Satzes schliesst.
Man sieht hier sehr deutlich, wie einfach die Methode der abgekürzten Bezeichnung sich gestaltet. Aus unserem Hauptsatze kann man nun verschiedene schöne Folgerungen ziehen,



z. B. die Construction der Radicalaxe zweier Kreise, mit imaginären Schnittpunkte daraus herleiten. In diesem Falle zeichnet man nämlich einfach 2 Kreise, die die gegebenen Kreise in reellen Punkten schneiden und zieht Sehnen, die jeder der beiden Hilfskreise mit den gegebenen gemeinsam hat. Die beiden Schnittpunkte der ersten und zweiten Sehnenpaares liefern uns dann 2 Punkte, durch die die gesuchte Chordale hindurchgehen muss.
Auch der elementare Satz, dass die 3 Mittelsenkrechten auf den Seiten eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden, ist ein specieller Fall unseres Satzes.
Führt man nämlich den Null- oder Punktkreis mit dem Radius Null ein, der geometrisch sich auf einen Punkt reducirt, so erkennt man leicht, dass die Radicalaxe zweier Nullkreise, die Mittelsenkrechte ist auf der Verbindungslinie der beiden sie repraesentirenden Punkte, und da-

mit ist ja die Beziehung des oben angeführten Satzes zum Hauptsatze klar gelegt.

Wir müssen jetzt einen wichtigen Begriff in der Kreislehre, den Begriff des Kreisbüschels, kennen lernen, den wir auf folgende Weise erhalten. Sind

$$S' = 0 \text{ und } S'' = 0$$

die Gleichungen zweier Kreise, so bilden wir uns die Gleichung $S' - \rho S'' = 0$

Diese lautet explicit geschrieben:

$$(1-\rho)(x^2+y^2) - 2(\alpha' - \rho\alpha'')x - 2(\beta' - \rho\beta'')y + C' - \rho C'' = 0,$$

woraus sich ergiebt, dass sie für jeden Wert von ρ einen Kreis darstellt, dessen Coordinaten

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha' - \rho\alpha''}{1-\rho}$$

$$\overline{\beta} = \frac{\beta' - \rho\beta''}{1-\rho}$$

$$\overline{C} = \frac{C' - \rho C''}{1-\rho} \text{ sind.}$$

Das System aller Kreise, das man auf diese Weise erhält, nennt man ein Kreisbüschel. Aus der Gleichung desselben folgt unmittelbar, dass alle seine Kreise durch die nämlichen 2 Schnittpunkte laufen, und dass sie in Folge dessen auch dieselbe Radicalaxe $S' - S'' = 0$ haben, die selbst ein Kreis der Büschels ist. Man kann gradezu ein Kreisbüschel so definiren:

Unter einem Kreisbüschel versteht man das System aller derjenigen Kreise, welche durch 2 reelle oder imaginäre

Punkte gemeinsam hindurchlaufen.

Nachdem wir so das Kreisbüschel definirt haben, wollen wir jetzt folgenden sehr wichtigen Satz aus seiner Theorie beweisen:

Steht ein Kreis auf 2 Kreisen S' und S'' senkrecht, so steht er auch auf allen Kreisen des Büschels $S' - \rho S''$ senkrecht.

Der Beweis des Satzes ist ganz einfach:

Damit der Kreis S auf den beiden Kreisen S' und S'' senkrecht steht, müssen die beiden Bedingungen erfüllt sein:

$$C + C' - 2\alpha\alpha' - 2\beta\beta' = 0,$$
$$C + C'' - 2\alpha\alpha'' - 2\beta\beta'' = 0.$$

Aus diesen beiden folgt aber, wenn man die 2. mit ρ multiplicirt und von der 1. subtrahirt:

$$(1-\rho)C + (C' - \rho C'') - 2\alpha(\alpha' - \rho\alpha'') - 2\beta(\beta' - \rho\beta'') = 0$$

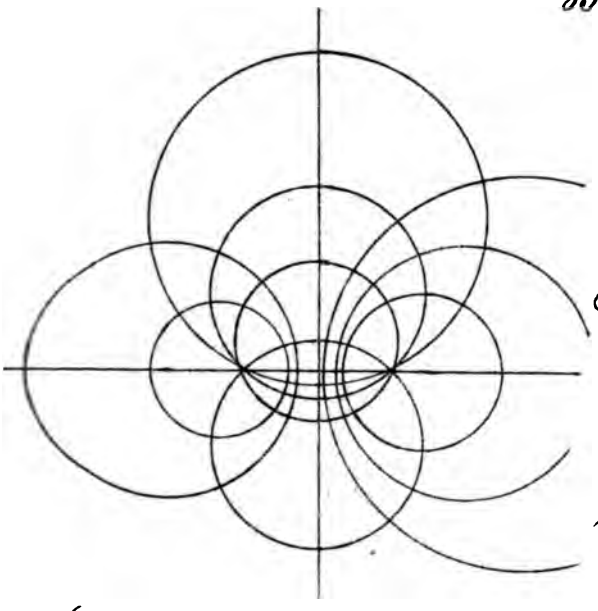
oder nach Division mit $1-\rho$:

$$C + \bar{C} - 2\alpha\bar{\alpha} - 2\beta\bar{\beta} = 0.$$

Die letzte Gleichung drückt aber gerade die Bedingung aus, dass der Kreis S den Kreis $S' - \rho S''$ senkrecht schneidet.

Der Nerv dieses ganzen Beweises liegt offenbar darin, dass die Orthogonalitätsbedingung in den Constanten des Kreises linear ist. — Der Mittelpunkt eines solchen Orthogonalkreises liegt in irgend einem Punkte der Radicalaxe.

Wir können daraufhin eine ganze Schaar von Kreisen construiren, die das 1. Büschel orthogonal durchsetzen. Diese neue Schaar von Kreisen bildet wieder ein Kreisbüschel



in dem oben definierten Sinne, wie wir jetzt beweisen wollen. Wir haben in dieser Hinsicht den Satz:
Zu einem ersten Büschel von Kreisen gehört immer ein zweites Büschel von Orthogonalkreisen, und hat das eine Büschel reelle Grundpunkte, so hat das andere imaginäre.

Zum Beweise dieses Satzes fragen wir uns zunächst, ob es in dem ersten Büschel Nullkreise gibt. Die allgemeine Bedingung dafür, dass ein Kreis Nullkreis ist, ist offenbar:

$$r^2 = 0, \quad \text{oder} \quad \alpha^2 + \beta^2 - C = 0.$$

Soll also der Kreis $S' - \rho S'' = 0$ ein Nullkreis sein, so muss

$$(\alpha' - \rho\alpha'')^2 + (\beta' - \rho\beta'')^2 - (C' - \rho C'')(1 - \rho) = 0 \text{ sein.}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für ρ, es existieren daher in unserem System stets 2 reelle oder imaginäre Nullkreise.
Die Kreise des Orthogonalsystems müssen natürlich auch auf diesen beiden Nullkreisen senkrecht stehen, und wir fragen uns nun, was dies für eine geometrische Bedeutung hat.
Damit sich 2 Kreise S und S' orthogonal schneiden, muss

$$C + C' - 2\alpha\alpha' - 2\beta\beta' = 0 \quad \text{sein.}$$

Ist Γ' ein Nullkreis, so ist $C' = \alpha'^2 + \beta'^2$. Dies eingesetzt giebt:

$$\alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha\alpha' - 2\beta\beta' + C = 0,$$

was nichts anderes heisst, als dass der den Nullkreis repräsentirende Punkt auf dem Orthogonalkreise liegt. Da nun im einzelnen Büschel 2 Nullkreise vorhanden sind, so werden alle Kreise des Orthogonalsystems durch diese beiden festen Punkte hindurchlaufen; das Orthogonalsystem hat also auch die charakteristische Eigenschaft des Kreisbüschels.

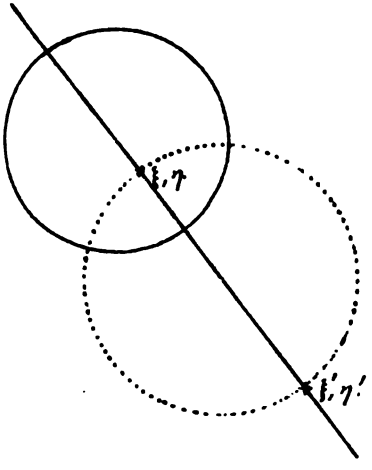
Damit ist der 1. Teil des Satzes bewiesen, der 2. Teil wird unmittelbar klar, wenn man sich 2 solche Kreisbüschel zeichnet.

Wir verlassen damit diese elementaren Erläuterungen und bemerken nur noch, dass eine Reihe wohlbekannter Theorien: die Lehre von den Aehnlichkeitspunkten, von den gemeinsamen Tangenten zweier Kreise, die Aufgabe des Apollonius u. s. w. in den vorhin bezeichneten, höheren Teil der Kreislehre hineingehört; in der That treten in die bezügl. analytischen Formeln die Radien der beteiligten Kreise, also solche, mit ein. —

In Fortsetzung unserer elementaren Betrachtungen [Mo. 14. II. 9 über den Kreis kommen wir jetzt zu der Lehre von den reciproken Polen, die wir folgendermaassen definiren:

<u>Zwei Punkte ξ, η und ξ', η' heissen reciproke Pole in Bezug auf einen Kreis, wenn sie, als Nullkreis betrachtet, dem-</u>

selben Büschel angehören, wie der Grundkreis.



Ist
$x^2+y^2-r^2=0$ die Gleichung des Grundkreises und sind
$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=0$
$(x-\xi')^2+(y-\eta')^2=0$
die Gleichungen der beiden Pole als Nullkreise, so werden wir als Bedingung dafür, dass ξ,η u. ξ',η' reciproke Pole sind, finden:

$$\xi'=\frac{r^2\xi}{\xi^2+\eta^2}\,,\quad \eta'=\frac{r^2\eta}{\xi^2+\eta^2}\,.$$

Dass die Bedingungen richtig sind, erkennt man aus folgender kleinen Rechnung:
Trägt man zunächst die Werte ξ' u η' in die 3te Gleichung ein, so ergibt sich:

$$(x\cdot(\xi^2+\eta^2)-r^2\xi)^2+(y\cdot(\xi^2+\eta^2)-r^2\eta)^2=0 \text{ oder nach}$$

Division mit $\xi^2+\eta^2$:

$$(x^2+y^2)\cdot(\xi^2+\eta^2)-2r^2\xi x-2r^2\eta y-r^4=0.$$

Die letztere Gleichung müssen wir nun als lineare Verbindung der ersten beiden Kreisgleichungen darstellen können, wenn die obigen Bedingungen richtig sein sollen.

Dies gelingt aber sehr leicht, indem wir sie in folgende Form setzen:

$$(\xi^2+\eta^2-r^2)(x^2+y^2-r^2)+r^2(x^2+y^2-2\xi x-2\eta y+\xi^2+\eta^2)=0$$

Aus unserer früher entwickelten Theorie der Kreisbüschel können wir jetzt sofort diesen Satz ableiten:
Jeder Kreis, welcher durch 2 reciproke Pole geht, schneidet den Grundkreis orthogonal, denn da der Kreis durch die beiden reciproken Pole geht, so schneidet er dieselben als Nullkreise betrachtet rechtwinklig; er schneidet also zwei Kreise des Büschels, dem die reciproken Pole als Grundpunkte angehören, rechtwinklig u. daher alle, also auch unsern Grundkreis.
Zu den Kreisen, die durch die reciproken Pole gehn, gehört natürlich auch ihre Verbindungsgerade, die in Folge des eben ausgesprochenen Satzes ein Durchmesser des Grundkreises sein muss. Zwischen den Abschnitten dieser Geraden, die vom Mittelpunkt des Grundkreises einerseits und von den reciproken Polen anderseits begrenzt werden, besteht die einfache Beziehung, dass ihr Product constant und zwar r^2 ist, in Formel:

$$\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}\cdot\sqrt{\xi^2+\eta^2}=r^2.$$

Die Richtigkeit letzterer Gleichung folgt ohne Weiteres

aus den Formeln, die die Beziehung zwischen $\xi' \eta'$ u. $\xi \eta$ vermitteln. Von hier aus schreibt sich auch die meistens gebräuchliche Redensart, dass man sagt: unsere reciproken Pole seien nach dem Princip der reciproken Radii vectores zusammengeordnet.

Die elementaren Betrachtungen der Kreistheorie haben einen besondern Aufschwung genommen, seit man diese Zuordnung als Transformation aufgefasst hat, seit man Untersuchungen angestellt hat darüber, wie sich etwa der eine der beiden Pole bewegt, wenn man den andern eine vorgeschriebene Curve durchlaufen lässt. Diese Auffassungsweise ist zuerst von Plücker in Crelle's Journal Bd 11. 1834 angewendet worden, dem dann andere Geometer nachfolgten; sie wurde jedoch erst später, im Jahre 1845, allgemein beachtet, als William Thomson in Liouville's Journal Bd 10 auf die Wichtigkeit dieser Transformation für die Potentialtheorie hinwies.

Im Folgenden wollen wir jetzt einige fundamentale Eigenschaften dieser Verwandtschaft kennen lernen.

1.) Zunächst erinnern wir daran, dass man diese Verwandtschaft auch als involutorisch bezeichnet, was indess nicht mehr und nicht weniger als reciprok besagt. Es wird eben vermittelst dieser Verwandtschaft jedem Punkte der Ebene in eindeutig-umkehrbarer Weise ein anderer Punkt zugeordnet und zwar so, dass

das Innere des Grundkreises dem Aussen entspricht. Nur beim Mittelpunkt des Grundkreises versagt die Zuordnung. Lassen wir einen Punkt dem Mittelpunkt immer näher und näher kommen, so rückt der Bildpunkt immer weiter und weiter weg und geht schliesslich ins Unendliche und zwar in verschiedener Richtung, entsprechend den verschiedenen Richtungen, in denen man den reciproken Punkt in den Mittelpunkt des Grundkreises rücken lässt. Der Mittelpunkt selbst erscheint also als Bild der Unendlichweiten. Von hier aus hat sich die Ausdrucksweise gebildet, dass es nur einen unendlich fernen Punkt der Ebene giebt. Hiermit soll aber durchaus kein Satz über die Natur des Unendlichen ausgesprochen sein, sondern es ist damit nur abkürzend gemeint, dass sich das Unendlichweite bei der Inversion so verhält, als ob es ein einzelner Punkt wäre. Vermöge dieser Ausdrucksweise ist dann die Transformation durch reciproke Radien ausnahmslos eindeutig umkehrbar. Genau denselben Wert einer abgekürzten Ausdrucksweise hat die Aussage der projectiven Geometrie, dass die unendlich fernen Punkte einer Ebene eine gerade Linie bilden. Sie liefern eine gerade Linie als Abbild, wenn man mit Centralprojection operirt. Eine zweite wesentliche Eigenschaft unserer Ver-

n'andlschaft ist die, dass ein Kreis, durch sie wieder in einen Kreis transformirt wird, weshalb man, dieselbe auch, als „Kreisverwandtschaft" bezeichnet. Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Behauptung einfach durch Ausrechnung.

Sind α, β, C die Constanten des ursprünglichen Kreises, so haben die Constanten des transformirten Kreises, wie man sofort findet folgende Werte:

$$\alpha' = \frac{\alpha r^2}{C}, \quad \beta' = \frac{\beta r^2}{C}, \quad C' = \frac{r^4}{C},$$

wo r den Radius des Inversionskreises bedeutet, u. C u. C', die Potenzen sind, welche der Mittelpunkt der Inversion in Bezug auf die beiden in Betracht kommenden Kreise hat. Zwischen den Radien der zugeordneten Kreise besteht die Beziehung

$$\rho'^2 = \frac{\rho^2 r^4}{C^2}$$

3.) Geht der Kreis φ durch den Mittelpunkt des Grundkreises, so wird er in eine gerade Linie transformirt, da die dritte Constante, also auch der Radius des transformirenden Kreises unendlich werden. Man kann also eine gerade Linie geradezu, als einen Kreis definiren, der den unendlich fernen Punkt enthält, wodurch wieder bestätigt wird, dass man das Recht hat, in unserem Gebiet von „dem" unendlich fernen Punkte zu reden.

4. Die Polare seines Punktes in Bezug auf einen Kreis hängt mit der Polare S' des transformirten Punktes in Bezug auf den transformirten Kreis durch folgende Formel zusammen:

$$S' = \frac{C'}{\xi^2 + \eta^2} \cdot S,$$

wie man durch analoge Rechnung wie unter 2.) findet. Man kann diese Relation auch so schreiben:

$$\left(\frac{S'}{\rho'}\right) = \pm \frac{r^2}{\xi^2 + \eta^2} \cdot \left(\frac{S}{\rho}\right)$$

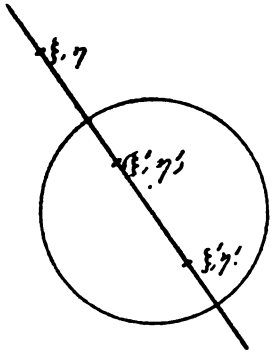
woraus der Satz folgt.

Die Grösse $\frac{S}{\rho}$ erhält bei Inversion einen Faktor, der für alle Kreise ρ der Ebene derselbe ist. Das doppelte Vorzeichen in obiger Formel ist notwendig, sofern man ρ u. ρ' in gewöhnlicher Weise beide als positiv ansehen will, denn S u. S' haben unter Umständen verschiedene Vorzeichen. Für den Grundkreis selbst, der bei der Transformation in sich übergeführt wird, gilt die Bezeichnung:

$$S' = -\frac{r^2}{\xi^2 + \eta^2} \cdot S.$$

In diesem Falle hat stets das negative Zeichen zu stehen, da S für einen äussern Punkt positiv, für einen innern negativ ist. Wir machen beiläufig darauf aufmerksam, dass eine reelle Kreisgleichung eventuell einen Kreis mit rein imaginärem Radius, also, wie wir sagen, einen nullteiligen Kreis vorstellt. Die zugehörige

Transformation durch reciproke Radien bleibt dann stets dem reell. So werden z.B. für den Kreis $x^2+y^2=1$ die Zuordnungsformeln lauten



$$\xi' = -\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\cdot\xi, \quad \eta' = -\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\eta,$$

woraus man erkennt, dass sich diese Zuordnung von derjenigen durch den Kreis $x^2+y^2=1$, nur dadurch unterscheidet, dass die Coordinaten der zugeordneten Punkte das Zeichen gewechselt haben.

Wir haben daher den Satz:

<u>Auch sogenannte nullteilige Kreise ergeben eine reelle Transformation durch reciproke Radien, nur dass der Bildpunkt gegen seine von den reellen Kreisen her bekannte Lage um das Centrum der Inversion um 180° gedreht ist.</u>

6.) Endlich erwähnen wir noch die Eigenschaft der <u>Winkeltreue</u> unserer Abbildung, in Folge deren man sie als eine <u>conforme</u> Abbildung bezeichnet. Eben hierin liegt die Wichtigkeit unserer Abbildung für Functionentheorie. Um diese Eigenschaft nachzuweisen, brauchen wir nicht von allgemeinen Kurven auszugehen, sondern können uns auf Kreise beschränken, da die ersteren sich doch im Mittelpunkte wie

denselben Winkeln schneiden, wie die dort sie berührenden Kreise.

Sind nun α_1, β_1, C_1 und α_2, β_2, C_2 die Constanten zweier Kreise, so werden die Kreise sich unter einem Winkel schneiden, dessen Cosinus folgenden Wert hat:

$$\cos\gamma = \frac{2\alpha_1\alpha_2 + 2\beta_1\beta_2 - C_1 - C_2}{2S_1S_2},$$

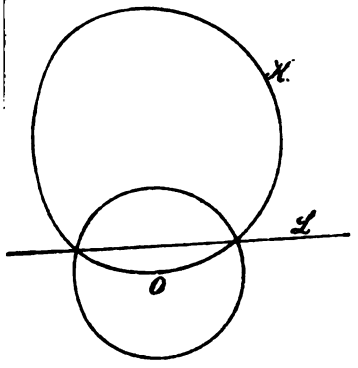
setzt man in diese Formel für die Constanten diejenigen der transformirten Kreise aus 2.) ein, so zeigt sich der ebenfalls

$$\cos\gamma = \frac{2\alpha_1'\alpha_2' + 2\beta_1'\beta_2' - C_1' - C_2'}{2S_1'S_2'},$$

wodurch die Richtigkeit obiger Behauptung erwiesen ist.

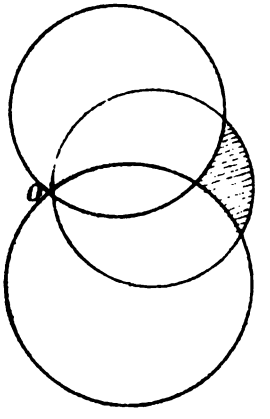
Wir gehen jetzt dazu über, einige Anwendungen der Lehre von den reciproken Polen zu geben. [Di. 15. XI. 92.] Zunächst ist es mit Hülfe dieser Theorie möglich, jeden Kreis einer Figur in eine gerade Linie zu transformiren und dadurch sehr oft Vereinfachungen zu erzielen. Man benutzt zu diesem Zwecke nur das Inversionscentrum auf den Kreis selbst zu legen. Reciproke Pole gehen dabei in solche Punkte über, die symmetrisch zu der Geraden liegen. Insbesondere benutzt man diese Regel, wenn es sich um mehrere Kreise handelt, die durch einen Punkt

laufen, wobei man natürlich den letztern zum Inversions-Centrum machen muss. So folgt z.B. nach dieser Methode ohne Weiteres, dass ein Dreieck, welches von drei durch einen Punkt gehenden Kreisen begrenzt wird, eine Winkelsumme von 180° haben muss.



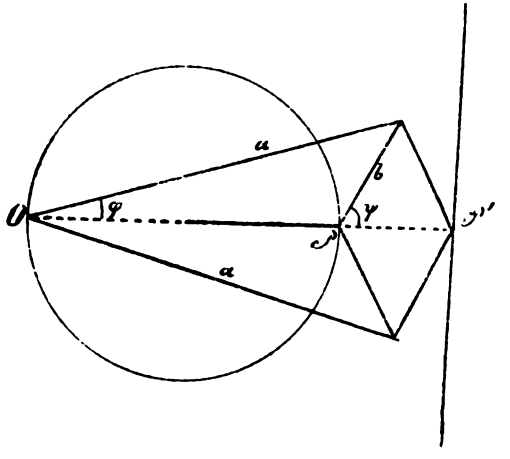
Eine zweite Anwendung, die wir jetzt erwähnen wollen, ist mehr auf das Praktische gerichtet, es ist:

Peaucellier's Geradführung, die 1864 in den „Nouvelles Annales de mathématique" in Form einer Aufgabe publicirt wurde. Im praktischen Maschinenwesen lässt sich zunächst ja nur die Kreisbewegung realisiren; da aber auch sehr häufig geradlinige Bewegungen benöthigt werden, so ist in der Maschinenkinematik das Problem der Geradführung ein sehr wichtiges, d.h. das Problem geradli-



nige Bewegungen, aus kreisförmigen zusammenzusetzen. In der Praxis hat man sich in dieser Hinsicht vielfach mit approximativer Geradführung begnügt, z. B. beim Watt'schen Parallelogramm, wo das Ende der Kolbenstange auf dem lang gestreckten Stück einer 8-förmigen Curve (viel sichrer) hin und hergeführt wird. Dagegen hat der oben erwähnte Peaucellier die erste genaue Geradführung angegeben. Den Hauptbestandteil seines Apparates zur Realisation der geradlinigen Bewegung nennt man „Inversor", weil er die Verwandtschaft der Inversion in einfachster Weise vermittelt.

Der Inversor besteht aus zwei gleichlangen Stäben, die im Punkte O (siehe Figur) mit einander verbunden, und zwischen die ein rautenförmiges Stabsystem eingeklemmt ist. An den Verbindungsstellen der Stäbe befinden sich überall Charniere, so dass das ganze System beweglich ist. Hält man nun den Punkt O fest und bewegt P, die eine Rau-



tenecke beliebig, so wird die andere Ecke P' stets inverse Lage zu P inne haben. Wendet man nämlich die Bezeichnungen an, die in der Figur angegeben sind, so ist offenbar:

$$a \sin\varphi = b \sin\psi \text{ woraus folgt}$$

$$0 = a^2 \sin^2\varphi - b^2 \sin^2\psi$$

Ferner ist:

$$OP = a\cos\varphi - b\cos\psi$$

$$\underline{OP' = a\cos\varphi + b\cos\psi}$$

$$OP.\,OP' = a^2\cos^2\varphi - b^2\cos^2\psi$$

Dazu obige Gleichung $\underline{0 = a^2\sin^2\varphi - b^2\sin^2\psi}$, gibt

$$OP.\,OP' = a^2 - b^2.$$

Unser Inversor realisirt also die Transformation durch reciproke Radien in Bezug auf einen Kreis der um O mit dem Radius $\sqrt{a^2-b^2}$ beschrieben ist. Daraufhin ist es nun sehr leicht, einige geradlinige Bewegung zu erzeugen, denn wir brauchen offenbar nur dafür zu sorgen, dass P einen Kreis beschreibt, der durch O geht, dann wird P' eine gerade Linie beschreiben. Um dies zu realisiren, bringt man noch eine siebente Stange im Punkte P an, deren anderes Ende im Mittelpunkt von OP befestigt ist. Mit Hülfe dieser Vorrichtung wird sich offenbar P auf einem Kreise, der durch O geht, bewegen. Um keine falsche Vorstellung von dem Apparat hervorzurufen, bemerken wir noch, dass derselbe so functionirt, dass der Punkt P nur auf einem <u>Stücke</u> seines Kreises und der Punkt P' nur auf einem <u>Stücke</u> seiner geraden Linie hin und hergeführt wird.

Ausser dem Peaucellier'schen Apparat giebt es noch manche andere, die dasselbe Problem lösen, worüber man bei Kempe, How to draw a straight line. London, Macmillan 1877 nachsehen kann. Nach dieser Einleitung gehen wir jetzt zu den

Pentasphärischen Coordinaten

selbst über, indem wir vorab nur bemerken, dass alles das, was wir bisher in Bezug auf Kreise entwickelt haben, auch für Kugeln in ähnlicher Weise Gültigkeit hat. Um unsere Coordinaten zu definiren, legen wir 5 Kugeln zu Grunde. Sind dann S_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, die fünf Potenzen eines Punktes in Bezug auf die zugrunde gelegten Kugeln, so sind die pentasphärischen Coordinaten oder vielmehr ihre Verhältnisse, nur auf diese kommt es an, durch folgende Gleichungen festgelegt:

$$\sigma x_i = k_i S_i, (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

wo die k_i willkürliche Constanten und σ den Proportionalitätsfactor bezeichnen.

Die pentasphärischen Coordinaten sind also homogene und gleichzeitig ihrer Fünfzahl entsprechend überzählige Coordinaten, welche demnach einer homogenen, später noch zu bestimmenden Bedingungsgleichung $R = 0$ gebunden erscheinen. Schreiben wir die Ausdrücke S_i explicit, so haben wir Gleichungen folgender Art:

$$\begin{aligned}
\sigma x_1 &= a_1(x^2+y^2+z^2) + b_1 x + c_1 y + d_1 z + e_1,\\
\sigma x_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sigma x_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sigma x_4 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sigma x_5 &= a_5(x^2+y^2+z^2) + b_5 x + c_5 y + d_5 z + e_5
\end{aligned}$$

Hier werden wir nun voraussetzen, dass die Determinante $|a\ b\ c\ d\ e|$ von Null verschieden sei, dass also zwischen den Gleichungen der 5 Kugeln keine lineare Relation bestehe. Unter diesen Voraussetzungen können wir die obigen 5 Gleichungen auflösen, indem wir

$\sigma,\ x^2+y^2+z^2,\ x, y, z$ als Unbekannte ansehen.

Wir erhalten dann als Resultat

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{z_1}{N};\quad x = \frac{z_2}{N};\quad y = \frac{z_3}{N};\quad z = \frac{z_4}{N},$$

wo Zähler und Nenner homogene lineare Functionen der x_i sind. Zugleich ergiebt sich aus obigen Auflösungen in Folge der Identität $x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+z^2$ die oben erwähnte Relation $\Delta = 0$ in der Gestalt:

$$N z_1 = z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \text{ oder}$$
$$z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - N z_1 = 0$$

Die pentasphaerischen Coordinaten sind also an eine homogene Bedingungsgleichung 2ten Grades gebunden.

Uebrigens können wir jetzt überall statt der gewöhnlichen Coordinaten die pentasphaerischen einführen, z. B. wird

die Gleichung der Kugel

$$A(x^2+y^2+z^2)+Bx+Cy+Dz+E=0$$

in pentasphaerischen Coordinaten:

$$AZ_1+BZ_2+CZ_3+DZ_4+EN=0.$$

Jede Kugel wird also durch eine lineare Gleichung zwischen pentasphärischen Coordinaten vorgestellt, wie umgekehrt auch jede lineare Gleichung zwischen pentasphärischen Coordinaten eine Kugel vorstellt, wobei Punkt und Ebene beide als Specialfälle eingeschlossen sind und zwar als Kugeln mit den resp. Radien 0 u ∞.

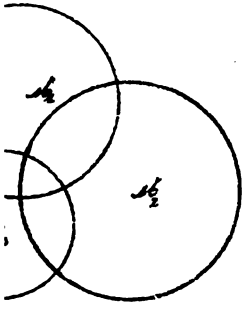
Sehr häufig legt man dem pentasphärischen Coordinatensystem 5 Kugeln zu Grunde, die sich wechselseitig orthogonal durchsetzen. Wir müssen uns deshalb erst einmal vergegenwärtigen, wie solche 5 Orthogonalkugeln, die wir alle als reelle Kugeln voraussetzen, im Raume liegen, wie viele einen reellen, wie viele einen imaginären Radius haben werden. Wir stellen in dieser Hinsicht gleich den Satz hin: <u>Von 5 reellen Orthogonalkugeln ist immer notwendig eine nulleilig und die 4 andern einteilig.</u>

Der Beweis dieses Satzes gliedert sich, wie folgt: [Do. 17. Nov. 92

Zunächst ist es leicht nachzuweisen, <u>dass überhaupt niemals 2 reelle, nulleilige Kugeln aufeinander senkrecht stehen können.</u> Denn seien $\alpha\beta\gamma$ und ϱ, resp. $\alpha'\beta'\gamma'$ u. ϱ' die Mittelpunktscoordinaten u. Radien zweier Kugeln, so gilt als Bedingung ihrer senkrechten Durchdringung:

$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2=\rho^2+\rho'^2.$$

würde für 2 nullteilige Kugeln, die rechte Seite dieser
hung negativ sein, während die linke jedenfalls po-
bleibt; dies aber ist mit einander nicht verträglich.
chliessen solcherweise, dass unter unsern 5 Orthogo-
ugeln sicher wenigstens 4 einteilige sich befin-
müssen. Es bleibt zu zeigen, dass andererseits die 5te
notwendig nullteilig sein muss. Zu dem Zwecke
en wir uns durch die Mittelpunkte von dreien der
eiligen Kugeln eine Ebene gelegt, welche die letzteren
wechselseitig auf einander senkrecht stehenden grösso-
reisen schneidet. Ein Blick auf die Figur zeigt dann,
die zugehörigen drei Kugeln sich in 2 reellen Punkt-
chneiden. Einen dieser Punkte wählen wir als In-



versionscentrum und führen ei-
ne Transformation durch reci-
proke Radien aus, die drei Ku-
geln gehen hierdurch in drei auf-
einander senkrecht stehende Ebe-
nen über, die wir weiterhin als
x, y, z Coordinatensystem zu Grun-
de legen. Die Gleichungen dieser
Kugeln sind daher einfach $x=0$;
; $z=0$. Wir stellen sich nun die weitern 2 Kugeln
es Systems nach der Transformation dar? Der Mittel-

punkt der 4ten und 5ten Orthogonalkugel muss jedenfalls im Coordinatenanfangspunkt liegen; ihre Gleichung lautet demnach:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ beziehungsweise: } x^2 + y^2 + z^2 = a'^2.$$

Sollen nun die beiden letzten Kugeln ebenfalls auf einander senkrecht stehn, so ergiebt sich aus der allgemeinen Bedingung hierfür die Gleichung: $0 = a^2 + a'^2$, d. h. es muss $a'^2 = -a^2$ sein. Wir werden a^2 als beliebige positive Grösse annehmen dürfen. Die Gleichung der 5ten Kugel lautet daher: $x^2 + y^2 + z^2 = -a^2$,

was in der That eine nulltheilige Kugel vorstellt.

Aus diesem speciellen System von 5 Orthogonalkugeln erhält man dann zunächst durch Inversion das allgemeinste System, für welches solcherweise die auf der letzten Seite ausgesprochene Behauptung nachgewiesen ist, dass stets eine und nur eine der 5 reellen Kugeln nulltheilig ist.

In Bezug auf solche 5 Orthogonalkugeln wollen wir nun die pentasphärischen Coordinaten folgendermassen definiren: $\sigma x_i = \frac{s_i}{S_i}$.

Die sich uns zunächst aufdrängende Frage wird dann die nach der Identität $R = 0$ zwischen den 5 Coordinaten x_i sein. Um diese letztere zu finden, gehen wir wieder zu unserer speciellen Form der 5 Orthogonal-

eln, die wir durch Inversion erhalten hatten, zu-
k, um an ihr die Frage zu erledigen, und machen
-zunächst klar, was wir unter dem Ausdruck $\frac{S}{\rho}$ zu
tehen haben, wenn eine der Kugeln in eine Ebene
geartet ist. Wir werden letzteres nur durch einen Grenz-
gang erkennen. Wir nehmen z. B. statt der yz-Ebe-
zunächst eine Kugel mit unendlichem Radius,
che die yz Ebene im 0-Punkt berührt und de-
Mittelpunkt daher auf der x-Achse und zwar
a auf der positiven Seite liegt, bilden für sie den
druck $\frac{S_i}{\rho_i}$ und lassen dann den Radius ins Unend-
e wachsen. Die Gleichung der substituirten Ku-
ist: $S = (x-\rho)^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0$, oder $x^2 + y^2 + z^2 - 2\rho x = 0$,
Ausdruck $\frac{S}{\rho}$ demnach gleich $x^2 + y^2 + z^2 - 2\rho x$.
Lim $\rho = \infty$ ergiebt sich aus ihm dann leicht:
$\frac{S}{\rho} = -2x$ als gültig für die yz Ebene. In gleicher
e hätten wir auch $+2x$ als Grenzwert erhalten
nen, wenn wir nämlich den Mittelpunkt der
fskugel auf der negativen Hälfte der x-Axe ge-
hlt hätten und ihn auf ihr ins Unendliche hät-
fliehen lassen. Das besagt also: <u>Wenn eine der
ogonalkugeln zur Ebene wird, so geht die Grösse
n den mit beliebigen Vorzeichen genommenen
ppelten Abstand des Raumpunktes von der Ebe-
über.</u>

In unserem speciellen System der Orthogonalkugeln werden wir daher die pentasphärischen Coordinaten, wie folgt, einführen:

$$\sigma x_1 = \pm 2x$$
$$\sigma x_2 = \pm 2y$$
$$\sigma x_3 = \pm 2z$$
$$\sigma x_4 = \frac{x^2+y^2+z^2-a^2}{\pm a}$$
$$\sigma x_5 = \frac{x^2+y^2+z^2+a^2}{\pm a\sqrt{-1}}$$

Aus diesen Formeln entnehmen wir nun leicht das Resultat, dass: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0$ ist, d. h.
Die pentasphärischen Coordinaten, die wir in unserem einfachen Fall eingeführt haben, befriedigen die Identität, dass die Summe der Quadrate gleich Null ist.
Wie stellt sich diese Identität nun für das allgemeine System der 5 Orthogonalkugeln dar? Auch in Bezug auf letzteres setzen wir unsere pentasphärischen Coordinaten proportional mit S_i. Nun haben wir aber bei der Betrachtung der Transformation durch reciproke Radien gelernt, dass $\frac{S_i'}{S_i} = \frac{S_i}{S_i'} M$ gesetzt werden kann, wo M einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Also gilt die einfache Beziehung

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' : x_5' = x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5.$$

Hieraus folgt sofort der Satz, dass die oben gefundene Iden-

setzt $\sum_1^5 x_i^2 = 0$ sich unverändert von unserem beso
5-Kugelsystem, auf das allgemeinste 5-Kugelsystem
bezüglich.

Um kurz zu recapitulieren, gelten also in unserem Coor
dinatensystem, der 5 Orthogonalkugeln, die beiden Be
ziehungen für die Coordinaten: 1) $\sigma x_i = \frac{s_i}{p_i}$ und
2.) $\sum_1^5 x_i = 0$. Die solcherweise definierten pentasphäüsch
Coordinaten sind bei allen Untersuchungen, die auf
Kugeln Bezug haben, sehr zweckmässig.

Wir wollen für einige der Fundamentalaufgaben im Fol-
genden die bezüglichen Formeln in Kürze zusammenstel-
len, die man sofort ablesen kann, indem man
auf jenes specielle Coordinatensystem zurückgeht
und sich überzeugt, dass die Formeln unverän-
dert richtig bleiben, auch wenn man eine beliebige
Inversion anwendet.

1.) Die Gleichung einer beliebigen Kugel lautet
$\sum_1^5 \alpha_\kappa x_\kappa = 0$; dieselbe ist also linear in den Coordina-
ten. Umgekehrt stellt jede solche Gleichung eine Ku-
gel dar.

2.) Ist noch eine zweite Kugel $\sum_1^5 \alpha'_\kappa x_\kappa = 0$ gegeben,
so gibt die Formel $\sum_1^5 \alpha_\kappa \alpha'_\kappa = 0$ die Bedingung für die
orthogonale Durchdringung der beiden Kugeln an.

3.) Eine Kugel $\sum_1^5 \alpha_\kappa x_\kappa$ ist einen Punkt (Punktkugel) aus-
gedrückt, sobald $\sum_1^5 \alpha_\kappa^2 = 0$ ist. Die Grössen α_κ sind dann ge-

radezu die pentasphärischen Coordinaten des Punktes.

4.) Es sei eine Kugel $\sum_1^5 \alpha_\kappa x_\kappa = 0$, sowie ein beliebiger Punkt x_i gegeben. Die Coordinaten x_i' des reciproken Poles zu letzterem werden dann durch die Gleichungen geliefert:

$$\sigma x_i' = x_i \sum_1^5 \alpha_\kappa^2 - 2\alpha_i \sum_1^5 \alpha_\kappa x_\kappa$$

5.) Wie gestalten sich die letzten Gleichungen insbesondere wenn man den reciproken Pol eines Punktes x_i in Bezug auf eine Kugel des Coordinatensystems bestimmen will? – Wir haben in der vorstehenden Formel einfach eines der α_κ gleich 1, die andern gleich Null zu setzen. Man bekommt den Pol eines Punktes in Bezug auf eine Kugel des Coordinatensystems indem man das zugehörige x im Vorzeichen umkehrt.

6.) Die weiteren Formeln gründen sich auf die Einführung des ∞ weiten Punktes, der die Coordinaten $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_3}, \frac{1}{\rho_4}, \frac{1}{\rho_5}$ bekommt, (für welche $\sum \left(\frac{1}{\rho_\kappa}\right)^2 = 0$ sein muss.). Von hier aus folgt:

7.) Eine Kugel ist eine Ebene, wenn $\sum \frac{x_\kappa}{\rho_\kappa} = 0$ ist, d. h. wenn sie den unendlich fernen Punkt enthält.

8.) Den Radius einer beliebigen Kugel $\sum_1^5 x_\kappa x_\kappa = 0$ liefert die Formel

$$\rho = \frac{\sqrt{\sum_1^5 \alpha_\kappa^2}}{\sum \alpha_\kappa \frac{1}{\rho_\kappa}}$$

Nach Satz 3 u. 7 wird

die rechte Seite wirklich gleich 0, oder ∞, je nachdem wir es mit einer Punktkugel, oder einer Ebene zu thun haben.

Wir fügen wieder einige geschichtliche Bemerkungen hinzu. Die pentasphärischen Coordinaten sind hauptsächlich von Darboux im Jahre 1873 eingeführt worden in seiner Schrift: "Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques." Seine Untersuchungen gehen jedoch bis auf die Jahre 69-70 zurück, in welcher Zeit Lie u. ich mit Darboux vielfach in Beziehung traten. Demgemäss tritt dann auch bei unseren Untersuchungen öfter eine Bezugnahme auf pentasphärische Coordinaten ein. (vgl. unsere Arbeiten in Anm. 5.)

Darboux ist seit 1878 professeur de la géométrie supérieure an der Sorbonne in Paris. Dieser Lehrstuhl war seiner Zeit (1846) für Chasles gegründet, nach dessen Tod er auf Darboux überging. Das Ausgezeichnete des Darboux'schen Unterrichts ist insbesondere die grosse Vielseitigkeit, mit welcher derselbe sämmtliche Teile der Geometrie zur Geltung bringt. Zeugniss hiervon legt besonders auch sein wiederholt genanntes, noch nicht vollständig erschienenes Buch der théorie générale des surfaces ab, ferner aber die Arbeiten seiner zahlreichen Schüler, wie König. Es wäre zu wünschen, dass auch in Deutschland irgendwo in ähnlicher vielseitiger Weise

vorgegangen würde. In seinem oben genannten Werke vom Jahre 1879 werden insbesondere behandelt: 1.) die cyclischen Curven. 2.) die Cycliden. Um [Fr. 18. XI. 92] nur von letzteren zu berichten, – die cyclischen Curven sind einfach das Analogon der Cycliden in der Ebene und werden dementsprechend am besten mit tetracyclischen Coordinaten behandelt, – so kann man allgemein die Cycliden durch eine Gleichung 2ten Grades zwischen pentasphärischen Coordinaten definiren. Nun wissen wir, dass die pentasphärischen Coordinaten sich als lineare Functionen der folgenden Grössen darstellen lassen:

$x_2^2 + y^2 + z^2,\ x, y, z, 1$. Folglich können wir die Cycliden auch ansehen als solche Flächen, die durch Gleichungen 2ten Grades zwischen diesen Grössen dargestellt werden, und ihre allgemeine Gleichungsform in gewöhnlichen Coordinaten lautet dementsprechend:

$$A(x^2+y^2+z^2)^2 + B(x^2+y^2+z^2)x + \ldots\ldots + Cx^2 + D(xy) + \ldots\ldots + N = 0.$$

Wir sehen hieraus, dass die Cycliden im Allgemeinen Flächen 4ter Ordnung sind. In dem besonderen Fall, dass der Coefficient A verschwindet, haben wir es mit einer Fläche 3. Ordnung zu thun; indem jedoch auch noch die Coefficienten der Glieder 3. Ordnung verschwinden können, gehören auch noch alle Flächen 2ter Ordnung als Specialfälle zu den Cycliden.

Neben die Definitionsgleichung 2ten Grades der Cycliden in pentasphärischen Coordinaten $F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0$ stellt sich noch die ebenfalls quadratische Identität $\Lambda(x_1 \ldots\ldots x_5) = 0$, die zwischen denselben ohnehin besteht. Es ist nun eine Aufgabe, die sich analog immer darbietet, wenn zwei quadratische Gleichungen zwischen denselben, übrigens beliebig vielen Variabeln vorliegen, durch geeignetes Einführen neuer Variabeln mittelst linearer Substitution diese Gleichungen auf eine Normalform zurückzuführen. Als solche werden wir wählen dürfen:

$$F_2 = \frac{y_1^2}{a_1} + \frac{y_2^2}{a_2} + \ldots\ldots + \frac{y_5^2}{a_5} = 0 \text{ und}$$

$$\Lambda_2' = y_1^2 + y_2^2 + \ldots\ldots + y_5^2 = 0.$$

Doch müssen wir bemerken, dass diese Transformation nur im Allgemeinen gilt; wie dieselbe sich im speciellen verhält, davon vielleicht später. Das dieser canonischen Form der beiden Gleichungen zu Grunde liegende pentasphärische Coordinatensystem ist dann gerade ein solches System von 5 Orthogonalkugeln, wie wir es in letzter Stunde besonders besprachen.

Diese Transformation auf eine kanonische Form gestattet nun einmal, allgemein die Eigenschaften der einzelnen Cyclide bequem zu untersuchen; dann jedoch veranlasst sie uns insbesondere, das folgen-

de Flächensystem näher zu betrachten:

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1 - \lambda} + \frac{y_2^2}{\alpha_2 - \lambda} + \cdots \frac{y_5^2}{\alpha_5 - \lambda} = 0.$$

Diese Gleichung erweitert sich auf den ersten Blick ganz analog der früher behandelten Gleichung der confocalen Flächen 2ten Grades; dementsprechend werden wir die durch die letzte Gleichung bei variablem λ definirte Flächenschaar als confocale Cycliden" benennen. Die nächste Frage wird die sein, wieviele dieser Flächen durch einen gegebenen Raumpunkt y_i hindurchgehen? Entwickelt man die Gleichung, indem man die Nenner fortschafft, so erhält man eine Form, die mit dem Gliede

$$y_1^2(\alpha_2 - \lambda)(\alpha_3 - \lambda)(\alpha_4 - \lambda)(\alpha_5 - \lambda) \quad \text{beginnt.}$$

Man würde dementsprechend vielleicht schliessen, für λ eine Gleichung 4ten Grades zu haben. Doch man erkennt leicht, dass der Gesammtcoefficient für λ^4 gerade $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ beträgt und der Bedingung $R = 0$ gemäss fortfällt, so dass man nur eine Gleichung 3ten Grades für λ behält. Wir entnehmen hieraus den Satz:

Im System der confocalen Cycliden gehen durch jeden Raumpunkt gerade ∞^3 Flächen, wie wir das für das System confocaler F_2 kennen.

Anschliessend an die canonische Form, auf die wir die Gl. der Cycliden im Allgemeinen gebracht haben, lässt sich nun mit Hülfe der für pentasphaerische Coordinaten aufgestellten Formeln weiter nachweisen, dass die confocalen Cycliden sich gegenseitig rechtwinklich durchsetzen. Wir haben in der Schaar der confocalen Cycliden ein neues dreifaches Orthogonalsystem im Raum, dem das System der confocalen F₂ als specieller Fall unterzuordnen ist.

Dies neue Orthogonalsystem ist im Jahre 1864 gleichzeitig von Mouton u. Darboux aufgefunden worden (vgl. Comptes-rendus d. J.)

Was die fernere Litteratur dieses Gegenstandes anbetrifft, so will ich mich darauf beschränken, auf meine im W. S. 1889/90 gehaltene Vorlesung über Lamé'sche Functionen, sowie auf die Preisarbeit von Böcher, Göttingen 1891, zu verweisen. In letzterer findet sich neben genauen Citaten die ganze Theorie der confocalen Cycliden, mit allen Specialfällen behandelt.

Unter den allgemeinen Cycliden, von denen wir bisher handelten, nehmen nun eine besondere Stelle diejenigen ein, die man als Dupin'sche Cycliden bezeichnet, auf welche sich auch die im Brill'schen Verlag (Darmstadt) erschienen Modelle beziehen. Von der allgemeinen Erzeugung derselben werden wir sofort sprechen, vorerst wollen wir uns nur von der Gestalt derselben eine klare Vorstellung

zu verschaffen suchen. Man unterscheidet die Dupin'schen Cycliden in solche, welche zwei reelle Knotenpunkte haben und solche, welche keine reellen Knotenpunkte haben.

1.) Dupin'sche Cycliden mit 2 reellen Knotenpunkten: Von diesen können wir uns sehr leicht eine Anschauung ihrer Eigenschaften verschaffen, indem dieselben nämlich als durch Inversion aus einem gewöhnlichen geraden Kreiskegel entstanden aufgefasst werden können. Die reellen Knotenpunkte ergeben sich vermöge der Inversion insbesondere aus der Spitze des Kreiskegels [Doppelkegels] und dem ∞ fernen Punkte des Raumes. Je nachdem wir nun das Inversionscentrum im Innern, im Aussern oder auf dem Kreiskegel wählen, werden wir drei Unterarten zu unterscheiden haben, von denen die letzte ersichtlich den Uebergangsfall der beiden andern vorstellt. Im ersten Fall erhalten wir die sogenannte Spindelcyclide, welche aus zwei in einander liegenden Flächenmänteln besteht, die in den beiden Knotenpunkten zusammenliegen. Im zweiten Falle ergiebt sich die Horncyclide, bei der die Flächenmäntel aus einander liegen. Der dritte Fall endlich stellt die parabolische Horncyclide dar, die sich ins Unendliche erstreckt und übrigens nur vom 3ten Grade ist. Alle diese Flächen haben ihrer Entstehung aus dem Rotationskegel gemäss eine besonders einfache Eigenschaft. Wenn wir nämlich unser Augenmerk zunächst auf die

Tangentialebenen, des Kreiskegels richten, welche diesen also umhüllen, so werden offenbar bei der Inversion aus diesen Kugeln werden, die den geradlinigen Erzeugenden des Kegels entsprechend die Dupin'sche Cyclide nach Erstreckung von Kreisen berühren. Alle diese Kreise resp. Kugeln müssen überdies durch die beiden Knotenpunkte gehn. Im Falle der Horncyclide finden sich unter den genannten Kugeln zwei Ebenen, die bei der parabolischen Cyclide in eine Ebene zusammenfallen und bei der Spindelcyclide imaginär sind.

Doch ist dieses System der Kreise keineswegs das einzige auf der Dupin'schen Cyclide. Denken wir uns nun z. B. in die obere Oeffnung des Kreiskegels eine Kugel von beliebigem Radius hineingebracht, so wird dieselbe den Kreiskegel längs einer Kreises berühren, der die geradlinigen Erzeugenden rechtwinklig durchschneidet. Nach der Inversion wird aus dieser Kugel und ihrem Berührungskreis wieder eine die Dupin'sche Cyclide berührende Kugel geworden sein. Und indem wir den Radius der Kugel variabel denken, erhalten wir solcherweise auf dem Kegel die bekannte Kreisschaar, der dann auf der Dupin'schen Cyclide eine zweite Kreisschaar, als die Berührungscurven derselben mit einer zweiten Kugelschaar entspricht. Und wie wir bereits andeuten; wird diese zweite Kreisschaar die erste

rechtwinklig durchsetzen so dass beide ein Orthogonalsystem auf der Cyclide bilden. Wie leicht zu sehen und wir später noch beweisen wollen, bilden beide Kreisschaaren zugleich das System der Krümmungscurven der Fläche. Im Falle der Spindelcyclide finden sich unter den Kugeln dieser zweiten Schaar zwei reelle Ebenen, die im Übergangsfalle wieder zusammenfallen und bei der Horncyclide fehlen, beziehungsweise imaginär sind.

2.) Dupin'sche Cyclide ohne reelle Doppelpunkte. Diese Fläche hat im Allgemeinen die Gestalt einer Ringfläche und kann im Speciellen durch entsprechende Inversion die parabolische Form erhalten, (parabolische Ringcyclide), die sich ins Unendliche erstreckt. Die Eigenschaften, welche wir bei der Cyclide mit 2 reellen Doppelpunkten fanden, sehen wir auch hier bei den Flächen mit nur imaginären Doppelpunkten erhalten. Es existiren wiederum die beiden Schaaren von Kugeln, wo jede Kugel nach Erstreckung eines Kreises die Cyclide berührt. Die eine Schaar der Kugeln füllt hierbei gleichsam das Innere der Cyclide aus, während die andere das Aeussere derselben ausfüllt.

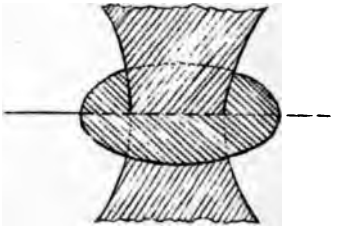
Wie kann man sich nun die gemeinsame Erzeugung aller dieser Cycliden vorstellen? Nehmen wir z. B. drei Kugeln an, die auseinander liegen, so werden wir

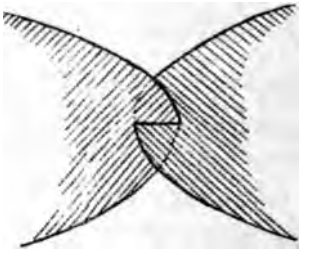
uns offenbar eine ganze Schaar von Kugeln vorstellen können, welche die gegebenen Kugeln von Aussen berühren. Diese letzteren werden dann eine Ringfläche zur Umhüllungscurve haben, welche mit der zweiten Art der Dupin'schen Cyclide identisch ist. Diese Construction, welche den Ausgangspunkt der Untersuchung für Dupin bildete, gilt nun richtig verstanden ganz allgemein für alle Cycliden. Es kommt darauf an, alle Kugeln zu construiren, welche drei feste Kugeln nicht gerade von aussen, sondern nur in gleichförmiger Weise berühren. Die solcherweise als Umhüllungsgebilde entstehende Cyclide wird ferner reelle Doppelpunkte haben, oder nicht, je nachdem die drei Kugeln, von denen man ausgeht, 2 gemeinsame Schnittpunkte haben oder nicht. Dupin beweist dann weiter, dass die nämliche Fläche auch umhüllt wird von einer zweiten Kugelschaar, der die anfänglich gegebenen 3 Kugeln selbst angehören.

Ganz allgemein nennt man eine Fläche, welche als Umhüllungsgebilde einer Schaar von Kugeln entsteht, eine <u>Röhrenfläche</u>, mag der Radius der Kugeln dabei constant sein, oder sich nach bestimmten Gesetzen ändern. <u>Die Dupin'sche Cyclide die von 2 Kugelschaaren umhüllt wird, erweist sich daher in doppelter Hinsicht als Röhrenfläche</u>; das eine

Mal ist sie sozusagen das Innere, das andere Mal das Aussere der Kugelschaar.

Wir werden nun weiter fragen dürfen, auf welcher Curve die Mittelpunkte dieser Kugeln der einen und der andern Schaar liegen. Dies führt uns zu der Figur zurück, die wir im System der confocalen Flächen zweiten Grades kennen gelernt haben. Wir hatten dort eine Ellipse und eine Hyperbel gefunden, die der Art in zwei zu einander senkrechten Ebenen gelegen sind, dass die Brennpunkte der Ellipse die Scheitel der Hyperbel waren und umgekehrt. Im speciellen Falle arten die Ellipse und die Hyperbel in zwei Parabeln aus in ganz analoger Lage. Wir haben nun als Antwort auf obige Frage den Satz: Bei den beiden Kugelschaaren welche eine Dupin'sche Cyclide umhüllen werden die Mittelpunkte auf einer Focalellipse und einer Focalhyperbel gelegen sein, eventuell aber auf 2 Confocalparabeln, wie oben beschrieben.





Man findet das im Einzelnen ausgeführt z. B. in Salmon Fiedler, Raumgeometrie I. Art. 352 (3. Aufl.)

Mit der letzten Stunde soll zugleich abgeschlossen sein, was allgemein über Punktcoordinaten zu sagen war. [Mo. 21. XI. 92.] Wir wollen da noch die subjective, d. h. nur zum Zwecke der Classification gestellte Frage aufwerfen, <u>welche Curven und Flächen überhaupt für die Behandlung durch Punktcoordinaten mathematisch interessant sind</u>? Wir haben wieder zu scheiden zwischen der Geometrie im Gesammtraum und der Differentialgeometrie.

I. <u>Was</u> die erstere anbetrifft, so wissen wir, dass dieselbe sich auf <u>algebraische Gebilde</u> beschränkt. Wir legen der Bequemlichkeit halber gleich Dreiecks- (resp. Tetraeder-) Coordinaten zu Grunde und wollen dieselben bei Beschränkung auf die Ebene mit x_1 x_2 x_3 bezeichnen. Es giebt dann zweierlei Ansätze zur Untersuchung bestimmter Curven.

1.) Man stellt die Curve durch eine einfache Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ dar. Hier ordnet man nun nach dem <u>Grad</u> und untersucht dementsprechend die allgemeinen algebraischen Curven ersten, zweiten, ... n^{ten} Grades.

2.) Die Curve wird nicht durch <u>eine</u> Gleichung dargestellt, sondern unter Einführung eines variablen

Parameters λ, durch drei Gleichungen, indem man die Coordinaten x_1, x_2, x_3 Functionen desselben proportional setzt, also:

$$\sigma x_1 = \varphi_1(\lambda)$$
$$\sigma x_2 = \varphi_2(\lambda)$$
$$\sigma x_3 = \varphi_3(\lambda).$$

Auch hier können wir dann eine weitere Classification vornehmen. Wir werden die φ-Functionen vielleicht zunächst als rationale Functionen wählen und demgemäss von „rationalen Curven" sprechen. Dies ergibt noch keineswegs die allgemeinen algebraischen Curven. Wir werden dann weiter an den φ-Functionen bestimmte Irrationalitäten zulassen, z. B. dieselben als rationale Functionen in λ und $\sqrt{w_4(\lambda)}$, d. h. einer Quadratwurzel aus einem Polynom 4ten Grades annehmen. Dies liefert uns dann zunächst die „elliptischen Curven", die man so nennt, weil sie mit elliptischen Functionen sich gut behandeln lassen. Fernerhin wird man noch beliebig höhere Irrationalitäten einführen können. —

Dies sind die beiden Hauptgesichtspunkte, nach denen man die algebraischen Curven geordnet hat. Bei dieser Anordnung des Stoffes ist das oberste Princip die algebraische Begriffsbildung; der geometrischen Untersuchung kommt nur eine ausführen-

de Rolle zu, indem man voraussetzt, dass jene alle die Fragen aufnimmt, die vom algebraischen Standpunkte aus wichtig sind.

II. Wie stehts nun mit der Differentialgeometrie? Nehmen wir z. B. das schon erwähnte Buch von Monge zur Hand. Wir werden dort weniger im allgemeinen von analytischen Curven und Flächen gehandelt sehen, vielmehr aber von gewissen Flächenfamilien, die eine bestimmte geometrische Erzeugung haben. Wir lernen von Cylinderflächen, Kegelflächen, Rotationsflächen, von sogen. Umhüllungsflächen, die ganz besonders Gegenstand des Interesses in dem Werke von Monge sind. Letztere entstehen z. B., wenn eine Ebene nach irgend einem vorgeschriebenen Gesetz sich im Raum bewegt; die dann von ihnen umhüllte Fläche ist insbesondere eine developpable Fläche. Ein anderes Beispiel ist die Enveloppe einer Kugelschaar [die schon erwähnte Gattung der Röhrenflächen.] Weiter werden die Linienflächen behandelt, d. h. Flächen, die von geraden Linien erzeugt werden, dann wieder Flächen mit besonderen Krümmungseigenschaften, z. B. Flächen mit ebenen Krümmungslinien u. s. w.

In der Differentialgeometrie von Monge ist demnach das unmittelbare Interesse an der geometri-

schen Erzeugung der Fläche das Maaßgebende für die Betrachtung.

Nun wird man doch auch darauf ausgehen können, beides mit einander zu vereinigen. Man kann sich z. B. fragen, was es für algebraische Linienflächen 1., 2., oder 3. Ordnung u. s. w. gibt.

Insbesondere verfolgt die neuere synthetische Geometrie eine Art mittlere Stellung, die beiderlei Interessen zu verbinden sucht, indem sie darauf ausgeht, die algebraischen Gebilde, die sie von der analytischen Geometrie übernimmt, in bestimmter Weise rein geometrisch zu erzeugen.

Man hat sich nun aber weiterhin sowohl bei I als II veranlaßt gesehen, noch andre geometrische Gebilde in Betracht zu ziehen, Gebilde, die weder einfach Curven noch Flächen sind, und hiervon wollen wir vor allen Dingen handeln.

I. Was zunächst wieder die algebraische Geometrie betrifft, so hat man Gleichungen betrachtet, die nicht allein die Coordinaten eines Punktes, sondern die zweier Punkte enthalten. Wir nennen dieselben als Dreieckscoordinaten gewöhnlich x_1, x_2, x_3 resp. y_1, y_2, y_3, als homogen geschriebene gewöhnliche Coordinaten dagegen x, y, t und x', y', t'; auf diese verschiedenartige Bezeichnung sei an dieser Stelle

ausdrücklich aufmerksam gemacht, um spätterhin, wenn sie immer wiederkehrt, Verwechslungen vorzubeugen. Die allgemeine Form unserer Gleichung ist dann etwa:

$$\Lambda(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = 0 ;$$

die Bedeutung derselben ist leicht zu erkennen, sie stellt eine Beziehung zwischen 2 Punkten dar der Art, dass der eine Punkt immer auf eine Curve eingeschränkt ist, sobald wir den andern Punkt festhalten.

Ein erster Fall einer solchen Gleichung $\Lambda = 0$ gab die Polarentheorie der Kegelschnitte. Schreibt man die Gleichung der letzteren $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$, wo $a_{ik} = a_{ki}$, so wird die gemeinte Verwandtschaft durch die Gleichung $\sum a_{ik} x_i y_k = 0$ gegeben. Durch letztere wird bekanntlich jedem Punkte x eine Gerade als „Polare" zugeordnet, die den Kegelschnitt in reellen, resp. imaginären Punkten schneidet, je nachdem der Punkt x ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes liegt; diese Punkte sind die Berührungspunkte der von x an den Kegelschnitt gehenden Tangenten. Umgekehrt wird jeder Geraden natürlich auch ein Punkt als Pol entsprechen. Die Beziehung zwischen den Punkten x_i und y_i ist überdies eine gegenseitige; y_i liegt auf der Polaren von x_i,

wenn x_i auf der Polaren von y_i liegt.

Es ist Ihnen allen wohl bekannt, wie aus dieser Theorie der Polaren bei Kegelschnitten zu Anfang des Jahrhunderts die Lehre von der Dualität zwischen Punkt und Gerade hervorgegangen ist. Denkt man sich irgend eine Figur gegeben, über die ein Satz ausgesagt ist und construirt dann zu jedem Punkte seine Polare und umgekehrt zu jeder Geraden ihren Pol, so erhalten wir eine neue Figur, die Polarfigur, über die dann ein analoger Satz gilt. Der Erste, der dieses Verfahren angewandt hat, ist Brianchon im Jahre 1806. gewesen,*) indem er den berühmten Pascal'schen Satz, dass bei jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechseck die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare auf einer Geraden liegen, in den nach seinem Namen genannten „Brianchon'schen Satz" überträg. Setzt man nämlich statt der 6 Punkte, den Ecken des Sechsecks, ihre Polaren, die Tangenten des Kegelschnittes werden, so erhalten wir ein dem Kegelschnitt umschriebenes Sechseit und für dieses gilt dann ganz analog, dass die Verbindungslinien der Gegenecken durch einen Punkt gehen.

Wie sich diese Untersuchungen weiter entwickelt haben, werden wir bald näher kennen lernen. Die

*) Journal de l'Ecole Polytechnique, cah. 13.

obige Gleichung $\sum a_{ik}\, x_i\, y_k = 0$ nimmt in entwickelter Form die Gestalt an:

$$y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + y_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = 0.$$

Es ist jedoch in ihr $a_{ik} = a_{ki}$ zu setzen. Dementsprechend stellt diese Gleichung noch keineswegs die allgemeine bilineare Gleichung dar. Weshalb sollte man aber nicht die Gleichung $\sum\sum a_{ik}\, x_i\, y_k = 0$ betrachten, in der a_{ik} und a_{ki} nicht notwendig einander gleich sind? Dies ist zuerst von Plücker in Bd I seiner analytisch-geometrischen Entwicklungen geschehen, (1831). Während aber damals Plücker diese allgemeinste bilineare Gleichung nur als ein Mittel der Transformation betrachte, welche jedem Punkt eine gerade Linie in dualistischer Weise zuordnet, hat man immermehr für die Gleichung selbst, bezw. für die Zuordnung, die sie geometrisch vorstellt ein unmittelbares Interesse gewonnen und sie also als selbständiges Object in die geometrische Betrachtung eingeführt.

Als Specialfall dieser bilinearen Beziehung verdient neben dem symmetrischen Falle ($a_{ik} = a_{ki}$) d. h. der Polarenverwandtschaft in Bezug auf einen Kegelschnitt (oder in Bezug auf eine Fläche 2ten Grades) besondere Beachtung der antisymmetrische Fall, die sogenannte schiefe bilineare Gleichung (gauche, skew,

gebe, in der $a_{ik} = -a_{ki}$ ist. Die hierdurch vermittelte Beziehung müssen wir in der Ebene und im Raum etwas näher betrachten. Wir werden erkennen, dass für die Ebene nichts besonderes heraus kommt, im Raume dagegen das vorgenannte Nullsystem sich ergibt, das durchaus zu den Fundamentalgebilden der modernen Geometrie zu zählen ist. Zunächst ergibt sich aus der Annahme

$$a_{ik} = -a_{ki}, \text{ dass: } a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \text{ zu setzen ist.}$$

Unsere Gleichung nimmt daher für die Ebene die folgende Gestalt an:

$$a_{23}(x_2 y_3 - x_3 y_2) + a_{31}(x_3 y_1 - x_1 y_3) + a_{12}(x_1 y_2 - y_1 x_2) = 0.$$

Man erkennt sofort, dass die linke Seite gerechnet $\begin{vmatrix} a_{23} & a_{31} & a_{12} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ vom der Determinante dargestellt. Die geometrische Bedeutung der Gleichung liegt dann auf der Hand; die Determinante verschwindet, wenn die Punkte x_i y_i und a_{ik} auf einer geraden Linie liegen. Die Gleichung hat daher eine triviale Bedeutung, indem sie jedem Punkt x_i diejenige Gerade zuordnet, die ihn mit dem festen Punkte a verbindet. Von dieser einfachen Beziehung redet man dann nicht weiter und sagt wohl, in der Ebene gibt es kein Nullsystem.

Wie ist es nun im Raume? Wir haben es hier mit der Gleichung zu thun:

$$v = a_{12}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + a_{13}(x_1 y_3 - x_3 y_1) + a_{14}(x_1 y_4 - x_4 y_1)$$

$$+ a_{34}(x_3 y_4 - x_4 y_3) + a_{42}(x_4 y_2 - x_4 y_2) + a_{23}(x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

oder abgekürzt geschrieben $\sum a_{ik}(x_i y_k - y_i x_k) = 0$

Diese Gleichung stellt das nämliche Nullsystem [Vi. 22. XI. 92. dar, wie es zuerst von Moebius 1833 in Crelle Bd 10 entwickelt ist. {Doch soll schon 1827 ein italienischer Geometer Giorgini dasselbe betrachtet haben. Memorie, dei XL Bd 20)}.

Um über Moebius einige historische Notizen zu geben: Moebius, war von 1816 – 1868 Professor der Astronomie in Leipzig. Neben seinen barycentrischen Calcul (1827) haben wir von ihm eine Statik 1838 und eine elementare Behandlung der Mechanik des Himmels 1843. Erstere ist wieder in geometrischer Hinsicht besonders interessant. Daneben eine Fülle der schönsten geometrischen Abhandlungen. Vergl. ges. Werke I-IV Leipzig, 1885-87. –

Wir führen hier eine Reihe von Sätzen, die sich auf das Nullsystem beziehen, ohne Beweis an; dieselben ergeben sich unmittelbar aus der allgemeinen Gleichungsform:

1.) Jedem Punkt x_i entspricht eine Ebene, die durch den Punkt selbst hindurchgeht; umgekehrt jeder Ebene ein Punkt, der in ihr liegt.

2.) Wenn x_i sich auf einer Geraden bewegt, so dreht sich die zugehörige Ebene um eine zweite Gerade.

3.) Wenn y_i in der Ebene von x_i liegt, so liegt umgekehrt x_i in der Ebene von y_i.

4.) Die Beziehung zwischen diesen Geraden ist wiederum eine gegenseitige; denn jedem Punkt y_i der zweiten Geraden muss doch umgekehrt eine Ebene entsprechen, die alle Punkte x_i der ersten Geraden enthält. Solche zwei gerade Linien nennt man nun <u>conjugirte Polaren</u>.

5.) Die geraden Linien des Raumes ordnen sich in Bezug auf das Nullsystem paarweise als conjugirte Polaren zusammen.

Dies sind die Grundzüge der allgemeinen Theorie; wir sind aber mit diesen allgemeinen Sätzen nicht zufrieden, sondern wünschen möglichst <u>anschaulich</u> vor Augen zu haben, wie jedem Punkte eine Ebene wirklich zugeordnet ist. Dieses werden wir besonders einfach erreichen, wenn wir ein specielles Coordinatensystem einführen analog, wie man etwa die Flächen 2ten Grades auf ihr Axensystem bezieht. Wir wollen der Uebersichtlichkeit

wegen, die einzelnen Punkte der Ueberlegung wieder numeriren:

1.) Wir richten unser Augenmerk zunächst auf die unendlich fernen Punkte, die hier im Gebiet der projectiven Geometrie natürlich eine Ebene erfüllen. Es wird darauf hin einen Punkt der unendlich fernen Ebene geben, welcher dieser Ebene im Nullsystem zugehört. Wir wollen nun den Gesammtraum so gedreht denken, dass dieser Punkt gerade vertical über uns zu liegen kommt. An dieser Lage des Nullsystems halten wir fortan fest.

2.) Nun gibt es in der unendlich fernen Ebene eine horizontale gerade Linie, deren conjugirte Polare wir ins Auge fassen wollen. Diese letztere nennen wir die Axe des Nullsystems und behaupten, dass dieselbe irgend eine verticale gerade Linie ist. Um dies zu erkennen, überlegen wir uns, wie wir die betreffende conjugirte Polare finden. Wir betrachten alle die Ebenen, die durch die horizontale unendlich ferne Gerade gehen; dies werden sämmtliche Horizontalebenen sein, zu denen auch die unendlich weite Ebene selbst zu rechnen ist. Jeder dieser Ebenen gehört nun ein Punkt zu, der in ihr liegt, die Gesammtheit dieser Punkte bildet die gesuchte conjugirte Polare. Nun findet sich unter diesen Punk-

den auch der vertical über uns liegende Punkt als der der unendlich fernen Ebene entsprechende Punkt, die Axe muss folglich eine Verticallinie sein.

3) Diese Axe des Nullsystems machen wir nun zur Z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, in welchem wir die homogenen Coordinaten der Punkte in der bilinearen Grundgleichung mit $x\ y\ z\ t$ resp. $x'y'z't'$ bezeichnen. Die letztere hat dann das Aussehen

$$0 = a_{12}(xy' - yx') + a_{13}(xz' - x'z) + a_{23}(yz' - y'z)$$
$$+ a_{14}(xt' - x't) + a_{24}(yt' - y't) + a_{34}(zt' - z't) \text{ oder}$$

indem wir $t = t' = 1$ setzen:

$$0 = a_{12}(xy' - x'y) + a_{13}(xt' - x't) + a_{23}(yz' - y'z)$$
$$+ a_{14}(x - x') + a_{24}(y - y') + a_{34}(z - z').$$

Dies ist zunächst noch die allgemeine Gleichung unseres Nullsystems. Nun soll die Z-Axe die Axe des Nullsystems sein, d. h. jedem Punkte der Z-Axe eine horizontale Ebene entsprechen. Setzen wir demnach in die letzte Gleichung $x' = 0$, $y' = 0$ ein, während z' beliebig sein mag, so erhalten wir die Gleichungen der betreffenden Ebenen zunächst in der Gestalt:

$$0 = (a_{13}z + a_{14})x + (a_{23}z' + a_{24})y + a_{34}(z - z').$$

Damit diese Gleichung nun eine Horizontalebene darstellt, müssen die Glieder mit x u. y fortfallen, d. h. es muss $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$ sein. Führen wir dies in unsere allgemeine Gleichung ein, so nimmt dieselbe die Gestalt an

$$0 = a_{12}(xy' - yx') + a_{34}(z - z'),$$ oder bei vereinfachter Coefficientenbezeichnung

$$0 = (xy' - x'y) + k(z - z').$$

Das besagt aber: <u>Beziehen wir unser Nullsystem auf irgend ein rechtwinkliger Coordinatensystem, dessen z-Axe die Axe des Nullsystems ist, so bekommen wir die letzthingeschriebene einfache Gestalt der Gleichung.</u>

5.) <u>Die Grösse k nennt man den Parameter des Nullsystems.</u> Derselbe drückt sich, wie wir nicht weiter beweisen wollen, durch die ursprünglichen Coefficienten der allgemeinen Gleichung wie folgt aus:

$$k = \frac{a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}}{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2}.$$

Die rechte Seite ist dabei unter Benutzung der Relation $a_{ik} = -a_{ki}$ in symmetrischer Form geschrieben.

6.) Wie ist nun die Zuordnung von Punkt und Ebene in diesem Nullsystem anschauungsmässig zu erfassen? Wir betrachten zunächst die speciellen Fälle $k = 0$ u. $k = \infty$, deren Bedeutung man sofort über-

Gobbo), in der $a_{ik} = -a_{ki}$ ist. Die hiedurch vermittelte Beziehung müssen wir in der Ebene und im Raum jetzt näher betrachten. Wir werden erkennen, dass für die Ebene nichts besonderes heraus kommt, im Raume dagegen das vorgenannte Nullsystem sich ergibt, das durchaus zu den Fundamentalgebilden der modernen Geometrie zu zählen ist. Zunächst ergibt sich aus der Annahme

$$a_{ik} = -a_{ki}, \text{ dass: } a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \text{ zu setzen ist.}$$

Unsere Gleichung nimmt daher für die Ebene die folgende Gestalt an:

$$a_{23}(x_2 y_3 - x_3 y_2) + a_{31}(x_3 y_1 - x_1 y_3) + a_{12}(x_1 y_2 - y_1 x_2) = 0.$$

Man erkennt sofort, dass die linke Seite eine gerechnete Form der Determinante darstellt. Die geometrische Bedeutung der Gleichung liegt dann auf der Hand; die Determinante verschwindet, wenn die Punkte x_i y_i und a_{ik} auf einer geraden Linie liegen. Die Gleichung hat daher eine triviale Bedeutung, indem sie jedem Punkte x_i diejenige Gerade zuordnet, die ihn mit dem festen Punkte a verbindet. Von dieser einfachen Beziehung redet man dann nicht weiter und sagt wohl, in der Ebene gibt es kein Nullsystem.

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{31} & a_{12} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Wie ist es nun im Raume? Wir haben es hier mit der Gleichung zu thun:

$$v = a_{12}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + a_{13}(x_1 y_3 - x_3 y_1) + a_{14}(x_1 y_4 - x_4 y_1)$$

$$+ a_{34}(x_3 y_4 - x_4 y_3) + a_{42}(x_4 y_2 - x_4 y_2) + a_{23}(x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

oder abgekürzt geschrieben $\sum a_{ik}(x_i y_k - y_i x_k) = 0$

Diese Gleichung stellt das nämliche Nullsystem [Vi. 22. XI. 92. dar, wie es zuerst von Moebius 1833 in Crelle Bd 10 entwickelt ist. {Doch soll schon 1827 ein italienischer Geometer Giorgini dasselbe betrachtet haben. Memorie dei XL Bd 20)}.

Um über Moebius einige historische Notizen zu geben: Moebius, war von 1816 - 1868 Professor der Astronomie in Leipzig. Neben seinen baryzentrischen Calcul (1827), in dem wir von ihm eine Statik 1838 und eine elementare Behandlung der Mechanik des Himmels 1843. Ersteres ist wieder in geometrischer Hinsicht besonders interessant. Daneben eine Fülle der schönsten geometrischen Abhandlungen. Vergl. ges. Werke I - IV Leipzig 1885-87. -

Wir führen hier eine Reihe von Sätzen, die sich auf das Nullsystem beziehen, ohne Beweis an; dieselben ergeben sich unmittelbar aus der allgemeinen Gleichungsform:

1.) Jedem Punkt x_i entspricht eine Ebene, die durch den Punkt selbst hindurchgeht; umgekehrt jeder Ebene ein Punkt, der in ihr liegt.

2.) Wenn x_i sich auf einer Geraden bewegt, so dreht sich die zugehörige Ebene um eine zweite Gerade.

3.) Wenn y_i in der Ebene von x_i liegt, so liegt umgekehrt x_i in der Ebene von y_i.

4.) Die Beziehung zwischen diesen Geraden ist wiederum eine gegenseitige; denn jedem Punkt y_i der zweiten Geraden muss doch umgekehrt eine Ebene entsprechen, die alle Punkte x_i der ersten Geraden enthält. Solche zwei gerade Linien nennt man nun <u>conjugirte Polaren</u>.

5.) Die geraden Linien des Raumes ordnen sich in Bezug auf das Nullsystem paarweise als conjugirte Polaren zusammen.

Dies sind die Grundzüge der allgemeinen Theorie; wir sind aber mit diesen allgemeinen Sätzen nicht zufrieden, sondern wünschen möglichst <u>anschaulich</u> vor Augen zu haben, wie jedem Punkte eine Ebene wirklich zugeordnet ist. Dieses werden wir besonders einfach erreichen, wenn wir ein specielles Coordinatensystem einführen analog, wie man etwa die Flächen 2ten Grades auf ihr Axensystem bezieht. Wir wollen der Uebersichtlichkeit

wegen, die einzelnen Punkte der Ueberlegung wieder numeriren:

1.) Wir richten unser Augenmerk zunächst auf die unendlich fernen Punkte, die hier im Gebiet der projectiven Geometrie natürlich eine Ebene erfüllen. Es wird darauf hin einen Punkt der unendlich fernen Ebene geben, welcher dieser Ebene im Nullsystem zugehört. Wir wollen nun den Gesammtraum so gedreht denken, dass dieser Punkt gerade vertical über uns zu liegen kommt. An dieser Lage des Nullsystems halten wir fortan fest.

2.) Nun gibt es in der unendlich fernen Ebene eine horizontale gerade Linie, deren conjugirte Polare wir ins Auge fassen wollen. Diese letztere nennen wir die Axe des Nullsystems und behaupten, dass dieselbe irgend eine verticale gerade Linie ist. Um dies zu erkennen, überlegen wir uns, wie wir die betreffende conjugirte Polare finden. Wir betrachten alle die Ebenen, die durch die horizontale unendlich ferne Gerade gehen; dies werden sämmtliche Horizontalebenen sein, zu denen auch die unendlich weite Ebene selbst zu rechnen ist. Jeder dieser Ebenen gehört nun ein Punkt zu, der in ihr liegt, die Gesammtheit dieser Punkte bildet die gesuchte conjugirte Polare. Nun findet sich unter diesen Punk-

den auch der vertical über uns liegende Punkt als der der unendlich fernen Ebene entsprechende Punkt, die Axe muss folglich eine Verticallinie sein.

3) Diese Axe" des Nullsystems, machen wir nun zur z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, in welchem wir die homogenen Coordinaten der Punkte in der bilinearen Grundgleichung mit $x\ y\ z\ t$ resp. $x'\ y'\ z'\ t'$ bezeichnen. Die letztere hat dann das Aussehen

$$0 = a_{12}(xy' - yx') + a_{13}(xz' - x'z) + a_{23}(yz' - y'z)$$
$$+ a_{14}(xt' - x't) + a_{24}(yt' - y't) + a_{34}(zt' - z't) \text{ oder}$$

indem wir $t = t' = 1$ setzen:

$$0 = a_{12}(xy' - x'y) + a_{13}(xt' - x't) + a_{23}(yz' - y'z)$$
$$+ a_{14}(x - x') + a_{24}(y - y') + a_{34}(z - z').$$

Dies ist zunächst noch die allgemeine Gleichung unseres Nullsystems. Nun soll die z-Axe die Axe des Nullsystems sein, d. h. jedem Punkte der z-Axe eine horizontale Ebene entsprechen. Setzen wir demnach in die letzte Gleichung $x' = 0$, $y' = 0$ ein, während z' beliebig sein mag, so erhalten wir die Gleichungen der betreffenden Ebenen zunächst in der Gestalt:

$$0 = (a_{13}z + a_{14})x + (a_{23}z' + a_{24})y + a_{34}(z - z').$$

Damit diese Gleichung nun eine Horizontalebene darstellt, müssen die Glieder mit x u. y fortfallen, d. h. es muss $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$ sein. Führen wir dies in unsere allgemeine Gleichung ein, so nimmt dieselbe die Gestalt an

$$0 = a_{12}(xy' - yx') + a_{34}(z - z'),$$ oder bei vereinfachter Coefficientenbezeichnung

$$0 = (xy' - x'y) + k(z - z').$$

Das besagt aber: <u>Beziehen wir unser Nullsystem auf irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen z-Axe die Axe des Nullsystems ist, so bekommen wir die Letzhingeschriebene einfache Gestalt der Gleichung.</u>

5.) <u>Die Grösse k nennt man den Parameter des Nullsystems.</u> Derselbe drückt sich, wie wir nicht weiter beweisen wollen, durch die ursprünglichen Coefficienten der allgemeinen Gleichung wie folgt aus:

$$k = \frac{a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23}}{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2}.$$

Die rechte Seite ist dabei unter Benutzung der Relation $a_{ik} = -a_{ki}$ in symmetrischer Form geschrieben.

6.) Wie ist nun die Zuordnung von Punkt und Ebene in diesem Nullsystem anschauungsmässig zu erfassen? Wir betrachten zunächst die speciellen Fälle $k = 0$ u. $k = \infty$, deren Bedeutung man sofort über-

sieht. Ist $k = 0$, so wird jedem Punkt $x'y'z'$ die Ebene zugeordnet, die durch ihn selbst und die z-Axe hindurchgeht, d. h. seine Verbindungsebene mit der z-Axe. Ist $k = \infty$, so wird jedem Punkte x' $y'z'$ die durch ihn hindurchgehende Horizontalebene, d. h. die Verbindungsebene des Punktes mit der unendlich weiten horizontalen Linie, zugeordnet. Das sind beides „triviale" Fälle.

7.) Wie ist nun die Beziehung bei allgemeinen Werten von k

a) Zunächst machen wir eine Bemerkung, die sich auf die Wahl unseres Coordinatensystems bezieht. Wir können offenbar unser Nullsystem längs der z-Axe parallel verschieben und um die z-Axe drehen — oder, was dasselbe besagt, wir können unser Coordinatensystem in entgegengesetztem Sinne verschieben oder drehen, — ohne daß sich irgend etwas ändert: Unsere Gleichung

$$v = (xy' - x'y) + k(z - z')$$

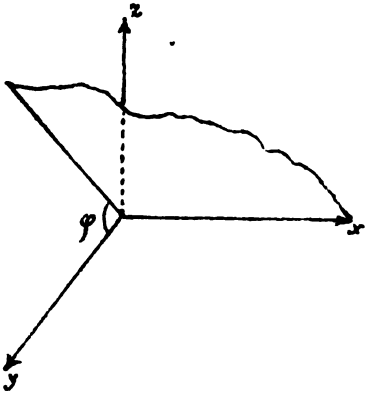
bleibt genau dieselbe. Wir erkennen hieraus, mit welchem Rechte wir die z-Axe die Axe des „Nullsystems" genannt haben. Der Vorteil, den diese Bemerkung für unsere obige Frage darbietet, ist leicht einzusehen. Um uns nämlich zu unterrichten, wie die Ebene im Raume liegt, die dem beliebigen Punkt x', y', z' zugeordnet ist, brauchen wir diese Fra-

ge zunächst für die Punkte $x', 0, 0$ der positiven Hälfte der x-Axe. Wir brauchen dann die Figur nur längs der z-Axe zu verschieben und um dieselbe zu drehen, um das gefundene Resultat auf jeden beliebigen andern Punkt des Raumes zu übertragen.

b.) Nachdem wir solchermaßen unser Problem reducirt haben, gehen wir daran, uns von den Ebenen ein klares Bild zu schaffen, die zu dem längs der positiven x-Axe sich bewegenden Punkt $x', 0, 0$ gehören. Für die letzten Werte der Coordinaten x', y', z' nimmt unsere Fundamentalgleichung die einfache Form an:

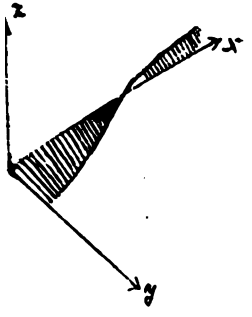
$$-x'y + \varkappa \cdot z = 0 \text{ oder } \frac{z}{y} = \frac{x'}{\varkappa}$$

Dieser entnehmen wir nun in Beziehung auf die nebenstehende Figur sofort das Resultat: Dem Punkte $x', 0, 0$ der x-Axe entspricht im Nullsystem eine Ebene, welche durch die x-Axe selbst hindurchgeht u. mit der Horizontalebene den Winkel φ bildet, wo



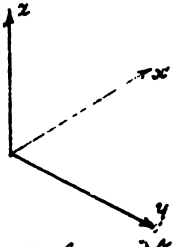
$tg\,\varphi = \frac{z}{y} = \frac{x'}{\varkappa}$ ist. Ferner erkennt man: Für $x' = 0$ ist

φ gleichfalls 0 und wächst mit x' ins Unendliche.
t man für jeden Wert von x' die zugehörige Senkrechte
die x-Axe, deren Neigung gegen die Horizontalebene
Winkel φ angiebt, so wird die entstehende Fläche
wisser Weise ihrer Gestalt nach einem Windmüh-
flügel vergleichbar. (v. Fig.)



c.) Allgemein gilt dann vermöge unserer obigen Ueberlegung für einen beliebigen Raumpunkt:
Jedem Punkte des Raumes wird durch das Nullsystem eine Ebene zugeordnet, welche das Perpendikel enthält, das sich von
n Punkte auf die Axe des Nullsystems die z-Axe
n lässt und dabei einen Winkel φ mit der Hori-
talebene bildet, der gegeben ist durch $tg\,\varphi = \frac{r'}{k}$
ie r' den Abstand des Punktes von der x-Axe ver-
nden.
bei kommt noch wesentlich das Vorzeichen von
k in Betracht; der Windmühlenflügel wird im Fal
le eines negativen k gerade umgekehrt gedreht sein,
ie im Falle eines positiven k, und man nennt
nn das Nullsystem im letzten Fall k > 0 rechts-

gewunden, im ersteren links gewunden ($k \lessgtr 0$).
Wir werden noch von einer andern Seite [Mo. 28. XI. 92] her das Nullsystem anschaulich erfassen können; Dasselbe steht nämlich in Beziehung zu einer gewissen Schraubenbewegung, die man um die z-Axe des Coordinatensystems, d. h. um die Axe des Nullsystems ausführen kann. Nehmen wir z. B. an, es solle eine rechtsläufige Schraubenbewegung, d. h. eine Schraubenbewegung im Sinne der Korkzieherwindungen betrachtet werden, die jeden Punkt des Raumes eine gewöhnliche Archimedische Schraubenlinie von gleicher Ganghöhe um die z-Axe beschreiben lässt. Diese Bewegung findet ihren Ausdruck in den sich auf nebenstehendes Coordinatensystem beziehenden Formeln:



$$\begin{aligned} X &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ Y &= y\cos\varphi + x\sin\varphi \\ Z &= z - \frac{k\varphi}{2\pi} \quad ; \end{aligned}$$

in ihnen bezeichnen x, y, z die anfänglichen, X, Y, Z die neuen Coordinaten, während φ den Drehwinkel u. k die Höhe des einzelnen Schraubenganges bedeutet. Wenn φ um 2π wächst, sind also X u. Y wieder gleich x u. y geworden; z dagegen hat um k abgenommen. Hier ist k natürlich po-

sitiv gedacht; nehmen wir es negativ, so haben wir die Formeln für eine links gewundene Bewegung. Wenn wir nun von dieser Schraubenbewegung nur einen unendlich kleinen Teil ausgeführt denken, so werden wir also an Stelle von φ in die letzten Formeln $d\varphi$ zu setzen haben und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} X &= x - y\,d\varphi \\ Y &= y + x\,d\varphi \\ Z &= z - \frac{h\,d\varphi}{2\pi} \end{aligned}\right\},$$

oder indem wir die Coordinatenzuwächse $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ resp mit $\delta x, \delta y, \delta z$ bezeichnen:

$$\delta x = -y\,d\varphi,\quad \delta y = x\,d\varphi,\quad \delta z = -h\,\frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Aus der letzten Form folgt schliesslich das Verhältniss:

$$\delta x : \delta y : \delta z = -y : x : -\frac{h}{2\pi}.$$ Mit dieser Formel für die unendlich kleine Schraubenbewegung bringen wir diejenige zusammen, die im Nullsystem einem Punkte seine Ebene zuordnet:

$$(xy' - x'y) + h(z - z') = 0.$$ Wir wollen festsetzen, dass die Coordinaten x, y, z den gegebenen Punkt bezeichnen, x', y', z' dagegen der laufende Punkt der Ebene sei. Nach letzteren Coordinaten geordnet heisst dann unsere Gleichung:

$$(-y)\cdot x' + x y' - k z' + k z = 0 .$$

Errichten wir nun im Punkte $x\ y\ z$ die Normale auf diese Ebene und gehen längs derselben zu einem benachbarten Punkt $x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z$ weiter, so ergiebt uns die letzte Gleichung für diese Fortschreitungsrichtung:

$$\delta x : \delta y : \delta z = -y : x : -k .$$

Wir erkennen sofort die Uebereinstimmung dieser Formel mit jener für die ∞ kleine Schraubenbewegung, sofern wir nur $+\frac{h}{2\pi} = k$, oder $h = 2\pi i k$ setzen, und wir erhalten demnach den Satz:

Wir werden die Zuordnung zwischen Punkt und Ebene im Nullsystem erhalten, wenn wir um die z-Axe herum eine Schraubenbewegung von der Ganghöhe $2 k \pi$ einleiten und nun jedem Punkt die Normalebene der dabei durch ihn gehenden Schraubenlinie zuordnen. Diese Beziehung lässt uns dann ins besondere anschaulich vor Augen treten, wie für Punkte nahe der Axe die entsprechende Ebene fast horizontal, für sehr weitentfernte Punkte dagegen fast vertical gerichtet ist.

Hiemit haben wir nun so deutlich als möglich das Nullsystem geometrisch uns klar gemacht; wir wenden nur dazu noch einige litterarische Bemerkungen betreffend die Anwendung desselben hinzuzufügen.

Das Nullsystem findet seine Anwendung insonderheit

in der Mechanik fester Körper und in der Geometrie und zwar beidemal in doppelter Hinsicht.

Was zunächst den ersten Punkt, die Bedeutung des Nullsystems für die Mechanik fester Körper, betrifft, so liegt dieselbe einmal gerade in der engen Beziehung begründet, die das Nullsystem mit einer bestimmten unendlich kleinen Schraubenbewegung verknüpft. Und die ganze Wichtigkeit dieser Beziehung wird klar, wenn man bedenkt, dass ja jede ∞ kleine Bewegung eines starren Körpers überhaupt eine unendlich kleine Schraubenbewegung ist. Demnach spielt das Nullsystem in der Kinematik der starren Körper eine wesentliche Rolle. Besonders zu erwähnen sind hier die Untersuchungen des Astronomen R. St. Ball [früher in Dublin, jetzt in Cambridge], der über dieses Gebiet neben zahlreichen Abhandlungen ein besonderes Werk veröffentlichte: Theory of screws (Dublin 1876). Das Wort „screw" (Schraube) bedeutet geradezu dasselbe, was Nullsystem.

Die zweite Bedeutung des Nullsystems in der Mechanik bezieht sich auf die Zusammensetzung beliebiger Kräfte, die auf einen starren Körper angreifen. Ist der Angriffspunkt aller Kräfte derselbe, so ist es natürlich leicht, eine alle ersetzende Resultante zu construieren. Wenn jedoch die Richtungen der Kräfte zu einan-

der windschief sind, so ist eine höhere geometrische Theorie nötig. Es handelt sich hier etwa um die Frage, wie alle wirkenden Kräfte durch eine Kraft und ein Kräftepaar zu ersetzen sind und dergl. Auch hier spielt dann das Nullsystem eine wichtige Rolle, wie wir jedoch nicht weiter ausführen wollen. Man vergleiche zum näheren Studium meine Vorlesung über Mechanik vom W. S. 1890/91. oder irgend ein neueres Lehrbuch der Mechanik fester Körper, z. B. Rudde, in dem besonders viel vom Nullsystem gehandelt wird, vielleicht sogar zu viel, d. h. auf Kosten anderer Gegenstände.

Auch in der Geometrie hat, wie gesagt, das Nullsystem in bestimmter Weise seine hervorragende Bedeutung und zwar in zweifacher Hinsicht. Zunächst definirt das Nullsystem eine ∞^3fache Mannigfaltigkeit gerader Linien, welche man Nullgerade nennt. „Unter einer „Nullgeraden" hat man jede gerade Linie zu verstehen, welche durch irgend einen Raumpunkt in der diesem Punkte zugehörigen Ebene läuft. Und nun sollte man meinen, dass es ∞^4 solcher Geraden im Raume geben müsse, da durch jeden der ∞^3 Raumpunkte in den zugehörigen Ebenen ein Strahlbüschel, also eine einfach ∞ Mannigfaltigkeit gerader Linien zugehört. Doch kommen nur ∞^3 Nullgerade bei genauer Abzählung heraus, weil jede Nullgerade für jeden ihrer Punkte Nullgerade ist,

mit die Ebene, die einem Punkt im Nullsystem entspricht, sich um die Nullgerade dreht, wenn der Punkt auf dieser Nullgeraden fortschreitet. Es ist dies eine unmittelbare Folge des oben unter 2) gegebenen Satzes: Liegt y in der Ebene von x, so liegt x in der Ebene von y. Wir werden uns bald mit der Liniengeometrie im Raum zu beschäftigen haben, d. h. derjenigen Geometrie, die mit den Geraden des Raumes als Element arbeitet. In ihr nennt man den Inbegriff dieser ∞^3 Nullgeraden eines Nullsystems einen linearen Liniencomplex; es ist unter allen Liniencomplexen, d. h. dreifach unendlichen Systemen von Geraden, die man betrachtet, der einfachste.

Wir kommen nun zu der zweiten geometrischen Anwendung des Nullsystems. Dieselbe bezieht sich auf die Theorie der Polyeder. Bei jeder bilinearen Gleichung besteht zwischen den beiden Punkten xyz u. $x'y'z'$ eine einfache Reciprocität der folgenden Art: Wählen wir einen einzelnen Punkt xyz, so entspricht ihm eine Ebene, auf die der Punkt $x'y'z'$ in seiner Lage eingeschränkt ist. Bewegt sich der Punkt xyz auf einer geraden Linie, so dreht sich die Ebene um eine gerade Linie. Bewegt sich der Punkt in einer Ebene, so dreht sich die Ebene um einen Punkt. Man wird diese Beziehung geradezu eine Verwandtschaft zwischen den Punkten xyz $x'y'z'$ nennen *)

*) nach Moebius

Man kann z. B. den Punkt $x\,y\,z$ einen gebrochenen geraden Linienzug durchlaufen lassen; dementsprechend werden wir eine Reihenfolge von Ebenen bekommen, die sich nach einander um bestimmte Gerade drehen. Hierbei wird jeder Ecke des Linienzuges eine Ebene entsprechen, jeder Verbindungslinie der ersteren eine gemeinsame Schnittgerade von Ebenen; jeder Ebene durch drei Punkte des Linienzuges wird weiter eine dreiseitige Ecke correspondiren u. s. w. Wenn wir etwa den Punkt $x\,y\,z$ ein Tetraeder beschreiben lassen, so wird aus ihm infolge der gleichen Zahl von Ecken u. Seiten-Flächen desselben gleichfalls ein neues Tetraeder entstehen. Allgemein werden wir den Satz haben:

Bei jeder bilinearen Gleichung zwischen 2 Punkten wird aus einem ersten Polyeder ein neues entstehen, indem den Ecken, Kanten und Seitenflächen des Polyeders die Seitenflächen, Kanten und Ecken des zweiten Polyeders resp. entsprechen werden.

Im Nullsystem gewinnt nun die Beziehung zwischen den beiden Polyedern einen besonderen Charakter. Zuerst stellt das Nullsystem eine involutorische Verwandtschaft dar, d. h. die Gleichung desselben bleibt unverändert, wenn wir $x\,y\,z$ mit $x'\,y'\,z'$ vertauschen, wie wir Analoges bei der Transformation durch reciproke Radien erkannten, resp. auch für die Polaren-

verwandtschaft bezüglich einer Fläche 2ten Grades gilt. Doch, merkwürdiger noch als dieses ist die gegenseitige Lage der beiden Polyeder. Da im Nullsystem jeder Punkt in der ihm entsprechenden Ebene gelegen ist, so wird auch hier jede Ecke des ersten Polyeders in einer Seitenfläche des zweiten Polyeders und umgekehrt jede Ecke des zweiten Polyeders in einer Seitenfläche des ersten Polyeders liegen. Dies besagt aber dass die Polyeder z.B. die beiden Tetraeder, sich wechselseitig einbeschrieben und umbeschrieben sind. Dass wir derartig gelegene Polyeder leicht construiren können, darin haben wir die andre geometrische Bedeutung des Nullsystems zu erblicken.

Diese Theorie der „reciproken" Polyeder ist eine geometrisch sehr merkwürdige Sache, die ihrerseits wieder in einem Zweig der Mechanik von praktischer Bedeutung wird, nämlich in der graphischen Statik. Diese letztere hat es mit solchen Problemen zu thun, wie sie im Brückenbau, Dachstuhlconstructionen u.s.w. vorliegen. Ihre Aufgabe ist es, die Vertheilung der Druckkräfte, der Spannungen in einem Gitterträger, auf die einzelnen Stäbe, mit zeichnenden Mitteln zu behandeln und hierbei spielen nun unsere einander ein- und umbeschriebenen Polyeder eine fundamentale Rolle, so dass man auf

Grund des Nullsystems eine besondere gute Einsicht in die graphische Statik bekommt.

Wir wollen diesen Excurs über Bilinearformen, resp. das Nullsystem, nun noch einige allgemeine Bemerkungen hinzufügen. Wie man Bilinearformen betrachtet, so kann man überhaupt homogene Gleichungen mit 2 Reihen von Punktcoordinaten $f(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$ in Betracht ziehen, die nicht gerade linear sind. Man kann ferner auch Gleichungen mit 3 und mehr Punkten behandeln; hier würde dann die Trilinearform das einfachste Gebilde darstellen. Insbesondere können wir es z. B. bei den Gleichungen zwischen 2 Punktcoordinaten so einrichten, dass dieselben linear in den y, aber nicht in den x sind, also etwa $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = 0$ nehmen, wo die X Formen von x von höherem als dem ersten Grad sind. Wir können es ausserdem etwa so einrichten, dass diese Gleichung identisch Null wird, wenn wir y u. x zusammenfallen lassen. Wenn wir dann x fest sein lassen, so beschreibt y eine Ebene und gemäss unserer letzten Annahme geht die letztere durch den Punkt x selbst hindurch; doch wird sie nicht linear vom Punkte x abhängen, so dass die Reciprocität fehlt. Solche Beziehungen bezeichnet man dann als höhere Nullsysteme. Wir sehen

[Vi. 29. XI. 92.]

solcher weise eine Menge von Möglichkeiten zum näheren Studium sich darbieten.

Wir gehen nun, wie wir es bereits in Aussicht genommen, zu analogen Betrachtungen bei der Differentialgeometrie über. Wie die Gleichung zwischen zwei Reihen von Punktcoordinaten uns eine Erweiterung der gewöhnlichen algebraischen Geometrie bedeutete, werden wir in ähnlicher Weise auch die Differentialgeometrie ausdehnen können. Wir betrachten nicht nur Gleichungen zwischen den Coordinaten x, y, z selbst, um diese einzeln zu differentiiren, sondern führen von vornherein die Ableitungen der x, y, z neben den letzteren ein. Mit anderen Worten: Differentialgleichungen selbst bilden ein hervorragendes Object geometrischer Forschung in der Differentialgeometrie, indem man fragt, wie man geometrisch sich die Bedeutung einer Differentialgleichung klar machen kann und insbesondere, was es geometrisch heisst, eine Differentialgleichung integriren.

Das ist die Auffassung, die schon Monge hatte und die dann besonders wieder von Lie hervorgekehrt ist.

Sehen wir einmal die verschiedenen Gattungen solcher Differentialgleichungen, die man zu be-

brachten pflegt, durch.

1.) Wir haben zunächst für die Ebene die Gleichung $f(x, y, z) = 0$; was bedeutet dieselbe geometrisch? Sobald x u. y bestimmte Werte bekommen, erfahren wir aus der Gleichung $f(x, y, y') = 0$ einen oder mehrere Werte von y'. Jeder derselben giebt uns aber die Richtung an, in der eine Curve durch den Punkt x, y hindurchgehen soll. Der geometrische Inhalt der Differentialgl. $f(x, y, y') = 0$ ist also der, dass dieselbe jedem Punkt x, y eine oder mehrere bestimmte Fortschreitungsrichtungen zuordnet. Und die Gleichung integrieren heisst geometrisch, Curven zu zeichnen, die in jedem ihrer Punkte die bestimmte Fortschreitungsrichtung zur Tangente haben; mit andern Worten: die ∞ vielen Fortschreitungsrichtungen zu einer zusammenhängenden Curven zusammenfassen. In diesem Sinne wird also die Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ Gegenstand geometrischer Betrachtung.

2.) Was bedeutet weiter die Differentialgleichung $f(x, y, y', y'') = 0$? Wir können offenbar einen Punkt x, y, sowie eine Fortschreitungsrichtung y' in ihm beliebig wählen. Unsere Gleichung liefert uns dann bestimmte Werte für y''. Nun ist die Formel für den Krümmungsradius ρ einer ebenen Curve

bekanntlich $\rho = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}$; es ist also mit y' u. y'' auch ρ bekannt. Eine Differentialgleichung 2. Ordnung ordnet daher jedem Elemente x, y, y' d. h. jedem Punkte und einer Fortschreitungsrichtung in ihm einen bestimmten Krümmungsradius zu und die Aufgabe der Integration wird darin bestehen, alle diese gekrümmten Elemente zu Curven zusammenzusetzen. Wir können auch so sagen: Durch x, y, y' y'' wird die Gleichung einer osculierenden Parabel $(\eta - y) = y'(\xi - x) + \frac{y''}{2}(\xi - x)^2$ geliefert. Unsere Differentialgleichung ordnet jedem Element $x\, y\, y'$ eine bestimmte osculierende Parabel zu.

3.) Gehen wir nun zum Raume mit seinen 3 Coordinaten über, so tritt uns zunächst die Gleichungsform: $f(x, y, z, y', z') = 0$ entgegen, worin $y' = \frac{dy}{dx}$, $z' = \frac{dz}{dx}$ ist. Solche Gleichungen betrachtet man allgemein zu reden, in den Lehrbüchern der Analysis nicht, es stellen dieselben ja keineswegs partielle Differentialgleichungen dar. Doch ist es ein specieller Fall, der von Alters her das Interesse lebhaft auf sich lenkte, wenn nämlich die Differentialquotienten y' u. z' linear in der Gleichung vorkommen, dieselbe also in der Form existirt

$$X(x, y, z) \cdot dx + Y(x\, y\, z) \cdot dy + Z(x\, y\, z) \cdot dz = 0$$

Solche besondere Gleichungen $f(x, y, z, y', z') = 0$ we-

den dann als Pfaffsche Probleme bezeichnet.
(Pfaff war um die Wende des vorigen Jahrhunderts Professor in dem 1810 als Universität aufgehobenen Helmstädt und als solcher der Lehrer von Gauss. Seine hier in Betracht kommende Abhandlung findet sich in den Abhandlungen der Berliner Academie 1814-15. Pfaff starb als Professor zu Halle 1825.)
Wir fragen uns wieder nach der geometrischen Bedeutung der Gleichung: $f(x, y, z, y', z') = 0$. Das Verhältniss $dx : dy : dz = 1 : y' : z'$ legt doch eine bestimmte Fortschreitungsrichtung vom Punkte xyz aus fest. Haben wir, daher eine Gleichung zwischen y' u. z', so stellt uns diese einen Kegel dar, der von den Fortschreitungsrichtungen im Punkte x, y, z gebildet wird. Unsere Gleichung ordnet demnach jedem Punkte im Raume einen Kegel von Fortschreitungsrichtungen zu, der insbesondere eine Ebene ist, wenn $f(x, y, z, y', z') = 0$ in ein Pfaff'sches Problem übergeht. Wir erkennen zugleich den folgenden, merkwürdigen Zusammenhang, dass nämlich in diesem Sinne jedes Pfaff'sche Problem mit einem Nullsystem (im höheren Sinne) zusammengehört u. umgekehrt. Die Integrationsaufgabe aber ist diesmal in der Weise zu charakterisiren, dass man allgemeine Raumcurven sucht, welche in jedem ihrer Punkte ei-

ne Tangente haben, die dem vom Punkte auslaufenden Kegel, bezw. im speciellen Falle einer Pfaff'schen Problems der vom Punkte auslaufenden Ebene angehört. Wie man die Integration jedoch ausführt, haben wir hier ebensowenig, wie in den andern Fällen zu untersuchen; uns kommt es eben zunächst nur auf die geometrische Bedeutung der Differentialgleichung an. Ein besonderer Fall der Pfaff'schen Problems liegt vor, wenn $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$ ein exactes Differential ist, oder durch einen Multiplicator in ein solches verwandelt werden kann; dann kann man nach Integralflächen fragen.

4.) Nun gibt es bei 3 Variabeln noch die partiellen Differentialgleichungen, zuerst diejenigen der ersten Ordnung:

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \text{ wo } p = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ u. } q = \frac{\partial z}{\partial y} \text{ gesetzt}$$

ist. Nun denkt sich also z als Function von x u. y. (Vielleicht ist hier die Bemerkung nicht überflüssig, dass in Deutschland im Gegensatz zu englischen Lehrbüchern seit Jacobi partielle Differentialquotienten mit geschweiftem ∂ geschrieben werden.) Nun wird bekanntlich durch die Grössen p u q die Normale (u. damit die Tangentialebene) einer Fläche in einem Punkte der Rich-

dung nach festgelegt. Bezeichnet man etwa die Winkel der Normalen gegen die Coordinatenaxen mit α, β, γ, so gilt die Beziehung

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = p : q : 1.$$

Haben wir daher für einen bestimmten Raumpunkt x, y, z nicht die Werte p u. q selbst, wohl aber eine Gleichung $f(q, p) = 0$ zwischen ihnen gegeben, so wird die Normalenrichtung hierdurch auf einen bestimmten Kegel eingeschränkt, der sich vom Punkte $x\,y\,z$ aus erstreckt. Wir erkennen daher: Eine partielle Differentialgleichung zwischen 3 Variabeln ordnet jedem Raumpunkt einen Kegel zu, auf welchem die Normale jeder Fläche liegen muss, die als Integralfläche der Differentialgleichung erscheint, u. die Gleichung integriren heisst wieder, die allgemeinste so beschaffene Fläche zu finden.

5.) Wie wir schon andeuteten, können wir natürlich eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung auch so auffassen, dass sie ein Gesetz giebt für die Stellung der Tangentialebene im Punkte x, y, z. Die abkürzende Schreibweise $dz = p\,dx + q\,dy$ gibt uns geradezu in differentieller Form die Gleichung der Tangentialebene, d. h. durch p u. q ist die Lage der Tangentialebene bestimmt.

Diese Bemerkung wird uns von Nutzen sein, wenn wir jetzt zu der partiellen Differentialgleichung übergehen. Wir schreiben deren allgemeine Form:

$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, worin die neuen Bezeichnungen r, s, t durch die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t \text{ definirt sind.}$$

(Die allgemein üblichen Bezeichnungen p, q, r, s, t, sind von Monge eingeführt). Wir werden jetzt nicht mehr bei $dz = p\,dx + q\,dy$ stehen bleiben, sondern die Entwicklung von dz noch weiter führen, also schreiben:

$$dz = p\,dx + q\,dy + \frac{1}{2}(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2).$$

Diese Gleichung stellt für die Fortschreitungsrichtungen eine Fläche 2ten Grades dar u. zwar ein Paraboloid. Dasselbe hat die gleiche Tangentialebene, wie die Fläche selbst; doch schmiegt sich dasselbe noch sehr viel inniger an die letztere an, als es bei der Tangentialebene der Fall ist, nämlich bis auf Grössen 3. Ordnung. Man spricht daher von dem „osculirenden Paraboloid".

Wir nehmen nun $x\,y\,z$, sowie p u q beliebig an, d.h. wir wählen einen Raumpunkt u. eine Tangentialebene in ihm aus; dann können wir jedoch auch

noch 2 der Grössen r, s, t beliebig annehmen.
Durch die gegebene Gleichung $f(x, y, z, p, q, r, s, t)$ ist dann die dritte Grösse bestimmt u. damit sämmtliche Coefficienten der für dz auf voriger Seite gegebenen Gleichung.
Eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung besagt, dass das osculirende Paraboloid irgend welcher gesuchten Fläche in jedem Punkte x, y, z des Raumes der bestimmten Relation

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$ unterliegt. –

Der Kernpunkt aller dieser letzten Betrachtungen, wie wir nochmals zusammenfassend bemerken wollen, ist die gewonnene Einsicht, dass die Differentialgleichungen als solche Object geometrischer Betrachtung sind. Und in der That ist die hier anknüpfende geometrische Theorie der Differentialgleichungen für deren Integration von der grössten Bedeutung. –

Zweites Kapitel des ersten Abschnitts:
I. b Wechsel des Raumelementes.
Die bisher angestellten Betrachtungen grup- [Do. 1. XI. 92]
pirten sich um den Begriff der Punktcoordinaten.
Wir wenden uns jetzt zu einem neuen Kapitel, dem wir die Ueberschrift
„Wechsel des Raumelementes" geben können.

Wir legen jetzt nicht mehr einen Punkt durch Coordinaten fest, sondern irgend welche andre geometrische Gebilde und wir versuchen, die durch Gleichungen zwischen den Coordinatengrössen dargestellten Beziehungen geometrisch zu deuten, bezw. durch welche Gleichungen alle möglichen geometrischen Figuren zu beherrschen. Nächst den Punktcoordinaten sind am einfachsten im Raum die Ebenencoordinaten, in der Ebene die Liniencoordinaten. [Wir wollen im Folgenden nur die Verhältnisse im Raum näher studiren, indem dieselben in der Ebene ja ganz analog sich gestalten.] Wenn uns die Gleichung einer Geraden vorliegt: $ux + vy + wz + 1 = 0$, so ist man von Alters her gewohnt, die Grössen u, v, w als „Constante" zu bezeichnen. Der Fortschritt der neuen Betrachtungsweise ist nun der, die Grössen u, v, w als Coordinaten der Ebene zu bezeichnen, sie, also als veränderlich anzusehen und mit ihnen dann genau wie mit den Punktcoordinaten x, y, z zu operiren. Es ist bekannt, wie man die u, v, w elementargeometrisch definirt; sie sind die negativen reciproken Abschnitte, welche der Schnitt mit der Ebene auf den drei Coordinatenaxen liefert. Doch in ganz analoger Weise können wir auch etwa

von der Gleichung einer Fläche 2. Grades ausgehen:

$$Ax^2 + Bxy + \ldots + 1 = 0$$

und die 9 Coefficienten derselben als ihre Coordinaten bezeichnen, sodass dann die F_2 als zu Grunde liegendes Raumelement erscheint. In beiden Fällen werden wir irgend welche Gleichungen zwischen den neuen Coordinaten aufstellen und nach ihrer geometrischen Bedeutung fragen können. Bei dieser Auffassung hat unser empirisch gegebener Raum, dann je nach der Wahl des Raumelementes eine kleine oder beliebig grosse Zahl von Dimensionen, gleich der Zahl der nötigen Coordinaten, um das einzelne Element festzulegen.

Dieser Gedanke, den ich an dem obigen Beispiel klar zu machen suchte, stammt von Plücker; von diesen, analytisch-geometrischen Entwicklungen an durchzieht er alle seine folgenden Werke. Später ist derselbe von Lie, Anm. F, aufs neue aufgenommen worden.

Sehen wir nun, wie diese Sache im einzelnen sich entwickelt hat. Das erste Auftreten der neuen Idee haben wir in dem Princip der Dualität zu erblicken, d. h. der Gegenüberstellung von Punkt u. Ebene im Raum, resp. von Punkt und Gerade in

der Ebene. Dieser wiederum hat sich aus der Polarenverwandtschaft bei einer Fläche, resp. Curve 2. Grades entwickelt, also aus der Gleichung:

$\sum a_{ik} x_i y_k = 0$ (mit $a_{ik} = a_{ki}$). Brianchon hat nur ein specielles Beispiel solcherweise behandelt. Der erste, der systematisch vorging, ist Poncelet gewesen; man betrachtet ihn mit Recht als den eigentlichen Begründer der „projectiven Geometrie", in der jenes Princip übrigens nur ein einzelnes, wenn auch besonders wertvolles Moment bildet. Poncelet war nicht nur Mathematiker, er war auch Officier und Techniker. Sein Hauptwerk, das für uns in Betracht kommt, ist: Traité des propriétés projectives; an dasselbe knüpft gerade die Lehre von der Dualität, wie die Lehre von Projiciren an. Dieses Werk verdanken wir seinen unglücklichen Kriegserlebnissen. Poncelet ist 1812 in Russland gefangen gewesen und hat so in Saratow an der Wolga unfreiwillige Musse gefunden, seine mathematischen Ideen zu ordnen. Dort ist der Traité entstanden, aber erst 1822 in Paris publicirt. Als zweite Arbeit ist hier zu nennen, die théorie générale des polaires réciproques in Crelle Bd 4 (1829). Seitdem hat sich Poncelet dem technischen Un-

Bericht u. mathematisch technischen Untersuchungen zugewendet [in Metz], und wer jemals mit technischen Kreisen Beziehung gehabt hat, der weiss, wie noch angesehen in der Maschinenlehre noch heute Poncelet's Name ist. (vergl. z. B. Poncelet's Wasserrad.) Gegen Ende seines Lebens, als er im Ruhestand zu Paris lebte, empfand er es als eine grosse Enttäuschung, dass Andre die von ihm verlassenen rein mathematischen Arbeitsgebiete in der Zwischenzeit occupirt hatten und der Untersuchung vielfach andre Wendungen gegeben hatten, als er ursprünglich beabsichtigt hatte. Dieser Stimmung giebt er in seinen Büchern, die er damals hat erscheinen lassen, lebhaften Ausdruck, nämlich in den „Applications d'analyse," sowie der 2ten Auflage des Traité. Es ist in psychologischer Hinsicht bemerkenswert, dass ein Mann, der in der Mitte seines Lebens nach den verschiedensten Richtungen, im Fortificationswesen, wie in der Technik, die grössten Erfolge hatte, im Alter auf den rein wissenschaftlichen Ehrgeiz seiner Jugend zurückkommt u. sein Leben beklagt, weil seine Gedanken nicht in der Form, die er ihnen gegeben, und nicht unter ausschliesslicher Voranstellung seines Na-

mens zur allgemeinen Herrschaft durchgedrungen sind.

Neben Poncelet ist hier Gergonne zu nennen; er war ein mehr philosophischer Kopf. Als solcher hat er insonderheit weiter ausgeprägt, was Poncelet in mehr particulärer Form ersonnen, er hat z. B. auch das Wort Dualität geschaffen. Er stellt immer neben das eine Theorem das ihm dualistisch entsprechende und zeigt, wie in unserer Anschauung selbst auch ohne vermittelnden Hegelschnitt beide Sätze neben einander vorhanden sind. Solchergestalt hat er auch das System der Parallelkolonnen eingeführt, welches seitdem in vielen Lehrbüchern angewendet ist, ich meine jenes System, welches auf der geteilten Seite die einander entsprechenden Sätze direkt gegenüberstellt. Seine grundlegende Arbeit findet sich im XVI Bd seiner Annales (1825/26.)

An ihn knüpfen von deutscher Seite dann Möbius u. Plücker an, der letztere mit seinen analytisch-geometrischen Entwicklungen II (1830/31.)

Hier erwächst der Begriff der Ebenencoordinaten, wie wir ihn gerade besprechen. Aus der Gleichung: $ux + vy + wz + 1 = 0$ welche die analytische Lage von Punkt und Ebene aussagt, erwächst

dann für Plücker das Princip der Dualität. Entweder hält man u, v, w fest, dann haben wir die Gleichung der Ebene in Punktcoordinaten vor uns, oder aber man hält x, y, z fest, dann haben wir die Gleichung des Punktes in Ebenencoordinaten. Beide Auffassungen sind genau gleichberechtigt wegen der Symmetrie der Gleichung in den u v w bezw. x y z. Homogen geschrieben heisst die Gleichung:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

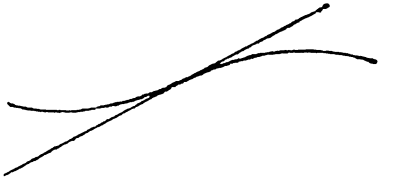
Wie wir 4 homogene Punktcoordinaten x_i haben, so gibt es auch 4 homogene Ebenencoordinaten u_i. Von hier aus ergiebt sich dann die Entwicklung der analytischen Geometrie in 2 parallel neben einander herlaufenden Colonnen, wobei die Curven n^{te} Ordn. und n^{te} Classe einander gegenüber gestellt sind. Ich will hier ins besondere darauf aufmerksam machen, wie sehr unsere Phantasie durch das Princip der Dualität belebt wird. Wie ein Punkt eine Curve durchläuft, so umhüllen die Tangenten die Curve. Dieses führt sofort zu manchen neuen geometrischen Anschauung.

Wir können z. B. an den Doppelpunkt denken, durch den reelle, vielleicht auch imaginäre Aeste

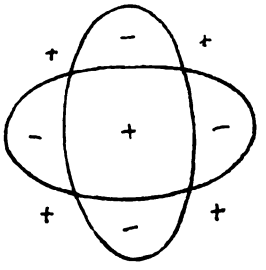
der Curve hindurchgehen, – Im letzteren Falle haben wir dann einen isolirten Doppelpunkt. – oder oder an eine Spitze, die Frage ist dann, was diesen Vorkommnissen dualistisch entspricht. Natürlich eine singuläre Tangente u. zwar dem ersten Beispiel entsprechend eine Doppeltangente, die entweder zwei reelle Curvenzweige berührt, oder isolirt verläuft. Im Beispiel der Spitze aber erinnern wir uns, dass bei der Bewegung des Curvenpunktes längs derselben dieser plötzlich stehen bleibt und seine

Richtung ändert, während die zugehörige Tangente der Curve ihren Drehsinn nicht wechselt. Dem wird dann dualistisch entsprechen, dass die Tangente einer Curve plötzlich ihren Drehsinn wechselt, der Curvenpunkt selbst aber ruhig seine Richtung behält. Dies führt zu dem Wendepunkt (oder Wendetangente).

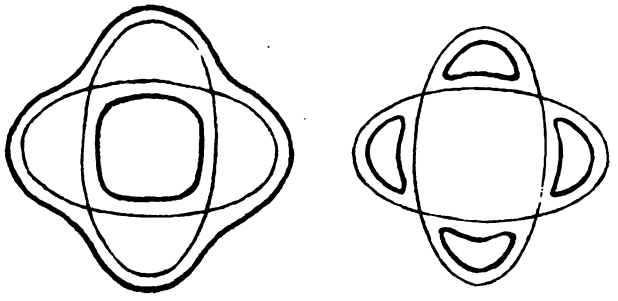
Es ist nun eine sehr nützliche Uebung, wenn man irgendwelche gestaltlichen Verhältnisse



von Punktcoordinaten auf Linien coordinaten in der Ebene übertragt. Sind uns z. B. 2 Ellipsen $f_1 = 0$ u. $f_2 = 0$ gegeben, die sich in 4 reellen Punkten schneiden.

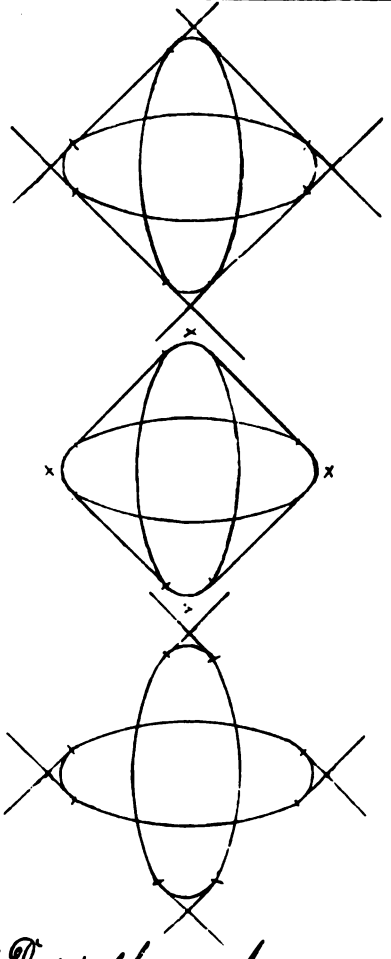


Das Produkt $f_1 \cdot f_2$ wird dann (bei entsprechender Wahl der Zeichen) in dem Stücke der Ebene, welches im Innern, wie im Aussern beider Ellipsen liegt, positiv, in den 4 sichelförmigen Stücken aber die dazwischen liegen, negativ sein. Wir setzen nun $f_1 f_2 = \varepsilon$, wo ε eine sehr kleine Grösse ist. Diese Gleichung wird uns dann eine Curve 4. Ordnung vorstellen, die ganz in der Nähe der Ellipsen verläuft und zwar je nachdem $\varepsilon > 0$ oder < 0 ist, in den positiven oder negativen Teilen der Ebene.



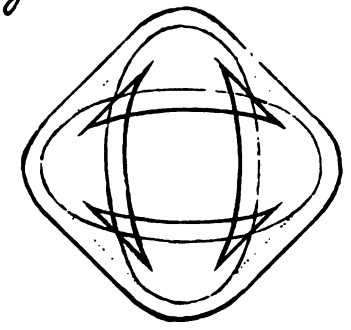
Dieses ist eine beliebte Manier, um sich Gestalten einer C_4 zu verschaffen. Nun wäre die Aufgabe, das Analoge dualistisch durchzuführen. Unserem Ellipsenpaar entspricht dua-

listisch wieder ein Ellipsenpaar $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$, mit 4 reellen gemeinsamen Tangenten. Wir können gleich an unseren ursprünglichen Figur festhalten. Wie finden wir nun die <u>Curve 4ter Classe</u>? Zu dem Zwecke gehen wir von den 4 reellen „Doppeltangenten" des Ellipsenpaares aus, welche den 4 Doppelpunkten unseres vorigen Falles dualistisch gegenüberstehen. Wir unterscheiden bei jeder derselben ein inneres und ein äusseres Segment. Das führt uns zu den beiden neuen Figuren, wo wir das eine Mal nur die inneren, das andre Mal nur die äusseren Segmente markirt haben. Der Process durch welchen wir von hier aus Curven 4. Classe erhalten (indem wir den obigen Uebergang zu den Curven 4. Ordnung genau copiren) ist nun sehr merkwürdig. Die

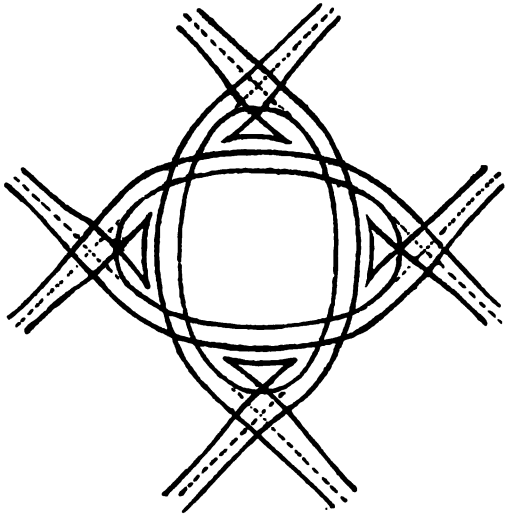


4 Doppeltangenten werden nämlich gespalten u. setzen sich mit den Teilen der beiden Ellipsen zu eigentüm-

gen Curvenzweigen zusammen: Im ersten Falle erhalten wir einen ersten Curvenzug mit 8 Spitzen und 4 Doppelpunkten, der von einem zweiten Curvenzug eingeschlossen wird; es entspricht dies genau der ersten Figur der Curve 4. Ordnung, die 4 Doppeltangenten und 8 Wendepunkte durchzieht bei ihrem einen Zuge.



Im andern Falle bekommen wir eine noch etwas complicirtere Gestalt, eine Curve 4. Classe, die aus 4 einzelnen sich hyperbelartig durchs Unendliche ziehenden Zügen besteht, und von jeder 2 Spitzen und 1 Doppelpunkt besitzt. Von den Zügen ist in der Figur einer mit Pfeilspitzen versehen. Die 4 Züge durchsetzen sich wechselseitig noch in 24 Doppelpunkten. Dieses wäre ein Beispiel dafür, wie man Figuren dualistisch umgestaltet; zweifellos wird durch solche Umsetzung die geometrische Anschauung sehr



geübt, dass es sich empfiehlt, andre Curven, auch transcendente, wie etwa die Sinuslinie in demselben Sinne einmal zu studiren. Wir beschränken uns aber nicht auf die Dualität im engen Sinne.

Die Plücker'sche Auffassung sagt, man kann [Fr. 2. XII. 92] nicht nur die Ebene im Raum (resp. die Linie in der Ebene), sondern beliebige andre Gebilde als Element wählen und durch Coordinaten festlegen. Wir wählen z. B. Gebilde 2 Grades $\sum\sum a_{ik} x_i x_k = 0$. In der Ebene stellt die 2 Gleichung einen Kegelschnitt dar, der durch 5 unabhängige Constante, im Raum eine F_2, die durch 9 unabhängige Constante bestimmt ist. Dementsprechend redet man von einer Mannigfaltigkeit von 5 resp. 9 Dimensionen. Studiren wir dann irgend welche Gleichung zwischen den a_{ik}, so vermögen wir sie als Gebilde zu deuten, die in dieser Mannigfaltigkeit aus Kegelschnitten in bestimmter, aber niedrigerer Mannigfaltigkeit bestehen. Genau so kann man bei Gebilden 2. Classe $\sum\sum \alpha_{ik} u_i v_k$ verfahren, wie der werden, wie Gleichungen zwischen den Grössen α_{ik} aufstellen und geometrisch discutiren können. Wir gehen hierauf nicht näher ein, erwähnen vielmehr nur historisch, dass Untersuchungen in dem hiermit bezeichneten Gebiete beispielsweise von Reye, dem Verfasser des bekannten Lehrbuches, in Crelle Bd 82 veröffentlicht sind (1877): Ueber lineare Systeme und Gewebe von Flächen 2. Grades.

Wie dieser Titel sagt, beschränkt sich Reye auf lineare Gleichungen zwischen den Coefficienten. „Systeme" sollen insbesondere solche Gebilde sein, die durch lineare Gleichungen zwischen den Grössen a_{ix}, „Gewebe" solche, die durch lineare Gleichungen zwischen den Grössen α_{ik} gegeben werden.

Wir gehen nun zu einem weiteren Beispiel über, das wir seiner Wichtigkeit wegen ausführlicher behandeln müssen, nämlich zur Liniengeometrie, d. h. derjenigen Geometrie, die mit der Geraden im Raum als Element arbeitet. Es handelt sich hier um die Untersuchungen, welche Plücker 1868/69 durch sein Werk „Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement" in die Wege geleitet hat. Uebrigens gehen diese neuern Arbeiten Plückers auf die ältern Untersuchungen zurück, die in der Geometrie des Raumes niedergelegt sind, 1846, vergl. z. B. No. 258. Hier spricht Plücker bereits den Gedanken aus, dass die Geraden im Raum von 4 Constanten abhängen, und wie Gleichungen zwischen 4 Variabeln so gedeutet können, dass sie Beziehungen von Raumgeraden darstellen. Eine gerade Linie im Raume wird doch gegeben sein, wenn man ihre Projection auf zwei Coordinatenebenen z. B. auf die xz- u. yz-Ebene kennt, also etwa $x = rz + \varrho$, $y = sz + \sigma$. Die Grössen r, s, ϱ, σ wird

man geradezu als Liniencoordinaten bezeichnen. Man kann dann offenbar dreierlei Gebilde betrachten, je nachdem eine, zwei oder drei Gleichungen zwischen den Liniencoordinaten gegeben sind, Gebilde, die dementsprechend aus 3fach, 2fach oder 1fach ∞ vielen Geraden bestehen. Dieselben nennt Plücker entsprechend Liniencomplexe, Liniencongruenzen u. Linienflächen. Ein erster Beispiel für einen Liniencomplexe bieten die Tangenten einer beliebigen Fläche, doch stellt dasselbe nicht den allgemeinsten Fall dar, wie wir schon erkennen, wenn wir an das zurückdenken, was häufig über den linearen Liniencomplex gesagt wurde. Ein Beispiel für eine Liniencongruenz ist uns bereits begegnet; dasselbe gaben die gemeinsamen Tangenten zweier F_2. Hier bezeichneten wir insbesondere die Flächen 2ten Grades als die Brennflächen des Liniengebildes. Ein Beispiel für eine Linienfläche ist jeder einschalige Hyperboloid und zwar in doppeltem Sinne, je nachdem wir auf die eine oder die andere Schaar geradliniger Erzeugender unser Augenmerk richten. Ein näheres Eindringen in diese Untersuchungen zeigt uns nun, dass es zweckmässig sein wird neben $r\,s\,\rho\,\sigma$ noch $r\sigma - s\rho = \eta$ als gleichberechtigte 5te Coordinate einzuführen. Bildet man nämlich die Projectionen der Geraden auf die dritte Coordinatene-

bene, die XY-Ebene, was durch einfache Elimination von z aus den angeführten Projectionen auf die XZ- u. YZ-Ebene geschieht, so ergiebt sich die Gleichung: $ry - sx = r\sigma - s\rho$. Und wir sehen, dass mit Hinzunahme von η dann die nicht berechtigte Sonderstellung der dritten Coordinatenebene aufgehoben wird. Hat man so die 5 Liniencoordinaten $r s \rho \sigma \eta$ mit der Identität $\eta = r\sigma - s\rho$ definirt, so studirt man weiter lineare oder auch quadratische Gleichungen derselben und nennt die hierdurch gegebenen Gebilde einen linearen Complex, resp. einen Complex 2. Grades etc. Wir wollen jedoch gleich noch allgemein einen Schritt weiter gehen, indem wir homogene Veränderliche einführen. Zu dem Zwecke beginnen wir am besten folgendermassen: Ist die Gerade bestimmt gedacht durch ihre beiden Punkte xyz u $x'y'z'$, so drücken sich die 5 Liniencoordinaten wie folgt aus:

$$r = \frac{x - x'}{z - z'}, \qquad s = \frac{y - y'}{z - z'},$$

$$\rho = \frac{x'z - xz'}{z - z'}, \qquad \sigma = \frac{y'z - yz'}{z - z'}, \qquad \eta = \frac{xy' - x'y}{z - z'},$$

wie leicht zu verificiren ist. Statt unserer 5 Coordinaten r, s, ρ, σ, η werden wir nun zweckmässig das Verhältniss von den folgenden 6 Grössen einführen:

$r : s : 1 : -\sigma : \rho : \eta$, das sich gleich dem

Verhältniss:

$$x-x' : y-y' : z-z' : yz'-y'z : zx'-xz' : xy'-yx'$$

ergibt. Zwischen diesen 6 Grössen, die wir jetzt als homogene Coordinaten der Geraden wählen, besteht dann die identische Relation:

$$0 = (x-x')(yz'-y'z) + (y-y')(x'z-xz') + (z-z')(xy'-x'y).$$

Um obiges Verhältniss leicht übersehen u. behalten zu können, bilden wir die Matrix $\left|\begin{matrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \end{matrix}\right|$. Man erkennt, dass die 6 Liniencoordinaten sich gerade verhalten, wie die zweigliedrigen Unterdeterminanten, welche man aus dieser Matrix zusammensetzen kann. Wollen wir uns auch noch von dem rechtwinkligen Coordinatensystem frei machen, und ein Coordinatentetraeder zu Grunde legen, so tritt an Stelle der letzthingeschriebenen Matrix die folgende: $\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix}\right|$. Aus ihr bilden wir wieder die zweigliedrigen Unterdeterminanten und definiren entsprechend als homogene Coordinaten der geraden Linie unter Einführung des Proportionalitäts-factors ρ die folgenden Grössen:

$$\begin{aligned} \rho p_{12} &= x_1 y_2 - x_2 y_1 & \rho p_{34} &= x_3 y_4 - x_4 y_3 \\ \rho p_{13} &= x_1 y_3 - x_3 y_1 & \rho p_{42} &= x_4 y_2 - x_2 y_4 \\ \rho p_{14} &= x_1 y_4 - x_4 y_1 & \rho p_{23} &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \end{aligned}$$

oder allgemein:

$$\rho p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i .$$

In Worten besagt unser schliessliches Resultat:
Als Liniencoordinaten p_{ik} im Raum definiren wir 6 Grössen, die sich verhalten wie die 2gliedrigen Unterdeterminanten, die man aus den Coordinaten 2er auf der geraden Linie gelegenen Punkte zusammensetzen kann.
Zwischen denselben besteht dann eine quadratische Relation:

$$P = 0 = p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23}.$$

Dieselbe folgt ganz einfach aus der folgenden Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0$$

deren linke Seite wir der Art entwickeln, dass wir jede 2gradige Determinante der beiden ersten Zeilen mit ihrer adjungirten Determinante multipliciren.
Dies ist die eine Art, Liniencoordinaten einzuführen, dieselbe ging davon aus, dass jede gerade Linie durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist. Insofern nennt Plücker die gerade Linie einen Strahl und die Coordinaten p_{ik} „Strahlencoordinaten". Demgegenüber lässt sich die gerade auch dualistisch als Schnitt zweier Ebenen auffassen; dann werden wir sie mit Plücker als eine Axe bezeichnen und von Axencoordinaten sprechen [eine Terminologie, die leider nicht in Aufnahme

gekommen ist, die neueren Autoren bevorzugen einseitig das aus der Optik geläufige Wort Strahl]. Wie werden nun die Axencoordinaten definirt sein?
Wir bilden ganz analog uns die Matrix aus den Coordinaten der beiden Ebenen: $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}$ und deren zweigliedrige Determinanten.
Dann setzen wir $6\,q_{ik} = u_i v_k - v_i u_k$ und haben in diesen 6 Verhältnissgrössen die 6 Axencoordinaten der geraden Linie vor uns, welche der Schnitt der beiden Ebenen u, v ist. Zwischen denselben besteht wieder eine quadratische Identität:

$$\Delta = 0 = q_{12}\,q_{34} + q_{13}\,q_{24} + q_{14}\,q_{23}.$$

Uns drängt sich nun von selbst die Frage auf, wann sich die Coordinaten p_{ik} und q_{ik} auf dieselbe gerade Linie beziehen werden?
Offenbar dann, wenn die zur Definition von p_{ik} benutzten Punkte x_i u. y_i in den zur Definition von q_{ik} benutzten Ebenen u_i u. v_i liegen, wenn also die 4 Gleichungen bestehen $u_x = 0$; $u_y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = 0$. Um die hieraus folgende Relation zwischen den Grössen p_{ik} u q_{ik} aufzustellen, ist eine kleine Determinantenrechnung nöthig, die ich nicht weiter ausführen will. Wir erhalten, dass die p_{ik} u. q_{ik} proportional sind, jedoch mit einer gewissen Vertauschung der Indices:

$p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{34} : p_{42} : 23 = q_{34} : q_{42} : q_{23} : q_{12} : q_{13} : q_{14}$.

Hiefür können wir auch einfach schreiben:

$$\rho \cdot p_{ik} = \frac{\partial A}{\partial q_{ik}} \quad \text{oder} \quad \sigma q_{ik} = \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} \quad , \text{ wo } \rho \text{ u. } \sigma$$

Proportionalitätsfactoren sind.

Wir werden nun noch in Liniencoordinaten die Bedingung dafür aufstellen, dass 2 gerade Linien sich schneiden. Wir werden offenbar 4 Formeln erhalten müssen, je nachdem wir die eine oder die andre Gerade mit Strahlen- oder mit Axencoordinaten bezeichnen. Die Methode, diese Formeln abzuleiten, wird etwa von den Punktepaaren ausgehen, welche die beiden Geraden festlegen: x_i u. y_i für die eine, x_i' u. y_i' für die andere Gerade. Schneiden sich die beiden Geraden, so liegen die 4 Punkte in einer Ebene, d. h. es gilt die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickeln wir die linke Seite wieder nach 2 gliedrigen Unterdeterminanten, erhalten wir:

$$\sigma = p_{12}\,p'_{34} + p_{13}\,p'_{42} + p_{14}\,p'_{23} + p_{34}\,p'_{12} + p_{42}\,p'_{13} + p_{23}\,p'_{14}$$

oder unter Berücksichtigung der Beziehungen, welche die p_{ik} mit den q_{ik} derselben Geraden verknüpfen:

$$\sigma = \sum p_{ik}\,q'_{ik} - \sum q_{ik}\,p'_{ik} \quad \text{oder auch}$$

$$\sigma = q_{12}\,q'_{34} + q_{13}\,q'_{42} + q_{34}\,q'_{23} + q_{24}\,q'_{12} + q_{42}\,q'_{13} + q_{23}\,q'_{14}.$$

Jede dieser 4 Gleichungen stellt uns also die Bedingung für das Schneiden der beiden Geraden in Linienkoordinaten dar; wir sehen insbesondere, dass diese Bedingung in den letzteren für jede Gerade linear ist.

Wir hatten in der letzten Stunde die geraden Linien des Raumes durch Coordinaten p_{ik} resp. q_{ik} festgelegt, welche der Relation $P = 0$ resp. $Q = 0$ zu genügen hatten. Indem nun die Grössen r, s, ρ, σ eindeutig durch die Coordinaten p_{ik} bestimmt sind, können wir umgekehrt den Satz aussprechen: Wenn 6 Grössen p_{ik} die Bedingung $P = 0$ befriedigen, dann werden sie allemal als Coordinaten einer geraden Linie angesehen werden dürfen. Analog bei den q_{ik}. [No. 5. XII. 92]

Wir wenden uns nun zu der neuen Aufgabe, lineare Gleichungen zwischen den Coordinaten p_{ik} resp. q_{ik} in Betracht zu ziehen. Und zwar fragen wir uns zunächst, was eine Gleichung, dann was zwei Gleichungen, schliesslich was drei

Gleichungen zwischen den letzteren geometrisch bedeuten werden.

1. Gegeben sei eine Gleichung zwischen den Grössen p_{ik} oder den Grössen q_{ik}. Es ist bequem, in unseren Entwicklungen sogleich beide Fälle neben einander zu behandeln. Es sei etwa eine der Gleichungen also gegeben:

$$\sum a_{ik}\, p_{ik} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum b_{ik}\, q_{ik} = 0.$$

Die Grössen a sollen mit den b entsprechend den zwischen den Coordinaten p_{ik} und q_{ik} bestehenden Beziehungen in sofern geradezu übereinstimmen, als je zwei von ihnen mit complementären Indices dasselbe bedeuten. Unsere Gleichung stellt uns einen linearen Liniencomplex vor; wir nennen ihn linear, weil eben die eine vorliegende Gleichung vom ersten Grade ist. Was stellt dieselbe nun geometrisch dar? Es giebt einen speciellen Fall, in dem wir über die Bedeutung sofort anschaulich im Klaren sind, wenn nämlich der Ausdruck

$$A = a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23} \quad \text{oder} \quad B = b_{12}\, b_{34} + b_{13}\, b_{42} + b_{14}\, b_{23}$$

identisch verschwindet. Dann können wir die Grössen a_{ik} resp b_{ik} selbst als Liniencoordinaten deuten; wir werden etwa setzen dürfen:

$$a_{ik} = q'_{ik} \quad , \quad b_{ik} = p'_{ik} \, ,$$

um der gewohnten Bezeichnungsweise uns anzuschliessen.

Unsere ursprüngliche Relation geht dann über in

$$\sum q'_{ik}\, p_{ik} = \sigma \quad \text{oder aber} \quad \sum p'_{ik}\, q_{ik} = \sigma.$$

Hieraus ergiebt sich in Rücksicht auf die Formeln der Seiten 168/69 der Satz: Wenn A beziehungsweise $B = \sigma$ ist, so haben wir einen speciellen linearen Complex, dessen sämmtliche gerade Linien eine feste Gerade schneiden, deren Coordinaten $q'_{ik} = a_{ik}$ resp. $p'_{ik} = b_{ik}$ sind.

Von diesem Falle aus können wir leicht auf eine Eigenschaft der Ausdrücke A, resp. B schliessen. Wir haben hier eine Invariante (speciell eine Invariante unseres linearen Complexes.) Wir können als eine vorläufige Definition, mehr zur Orientirung als zur Festlegung der Begriffes etwa, wie folgt, sagen: Unter einer Invariante eines geometrischen Gebildes versteht man einen Ausdruck, gebildet aus den Coefficienten der Gleichung, dessen Verschwinden etwas aussagt, was vom Coordinatensystem unabhängige Bedeutung hat. Infolge dessen wird ein solcher Ausdruck sich bei Coordinatenverwandlung, allgemein zu reden, nur um einen nicht verschwindenden Faktor ändern. Ein derartiger Ausdruck ist nun in A (oder B) gegeben; deshalb nennen wir denselben schlechtweg „Invariante des Complexes."

Was besagt nun der allgemeine Fall der Gleichung

$$\sum a_{ik}\, p_{ik} = \sigma \text{ resp. } \sum b_{ik}\, q_{ik} = \sigma$$

geometrisch? Wir können an Stelle der ersten Gleichung auch schreiben: $\sum a_{ik}(x_i y_k - y_i x_k) = \sigma$; diese Gleichung

stellt uns dann alle Geraden dar, die irgend 2 ihr genügende Punkte x, y verbinden. Doch die letzte Gleichung ist uns von früher her ganz bekannt. Sie definirt uns ein Nullsystem; die in Betracht kommenden geraden Linien haben wir die Nullgeraden desselben genannt. Damit haben wir sofort die in Aussicht genommene Erklärung des linearen Complexes: Die geraden Linien eines linearen Complexes sind die Nullgeraden eines Nullsystems, welches in trivialer Weise ausartet, wenn der Complex ein specieller wird.

Wir können diesen Satz sofort auf einen Liniencomplex n^{ten} Grades ausdehnen, der durch die Gleichung $f_n(p_{ik}) = 0$ definirt sein möge. Wie wir schreiben wie statt dessen: $f_n(x_i y_k - y_i x_k) = 0$. Halten wir dann z. B. den Punkt x fest, so beschreibt der Punkt y eine Kegelfläche n^{ter} Ordnung, deren Spitze eben der Punkt x ist. Ueberhaupt bilden daher bei einem Liniencomplex n^{ten} Grades die geraden Linien, die durch einen festen Punkt x laufen, einen Kegel n^{ter} Ordnung.

Es ist nun das Schöne dieser Betrachtungen, dass sie sich sofort auf die Coordinaten q_{ik} und ihre Gleichung $\sum b_{ik} q_{ik} = 0$ übertragen lassen. Wir können die letzte Gleichung jetzt schreiben:

$$\sum b_{ik} (u_i v_k - v_i u_k) = 0 ,$$

indem ja jetzt die gerade Linie als Schnitt zweier Ebenen aufgefasst wird. Dualistisch bekommen wir dann bei festgehaltenen u_i die Gleichung der Punktes, welcher dieser Ebene im Nullsystem entspricht. Die Gesammtheit unserer geraden Linien werden wieder durch die Nullgeraden der letzteren gegeben. Allgemein erhalten wir bei gegebener Gleichung $f_n(q_{ik})$ für $q_{ik} = u_i v_k - v_i u_k$ bei festgehaltenen u in laufenden Ebenencoordinaten v die Gleichung der Curve, welche innerhalb der Ebene u von den Complexgeraden umhüllt wird; diese Curve aber ist von der n^{ten} Classe.

2. Wir gehen nun dazu über, 2 lineare Gleichungen für die Liniencoordinaten an die Spitze zu stellen:

$$\sum a_{ik} p_{ik} = 0 \text{ u. } \sum a'_{ik} p_{ik} = 0,$$

die gleichzeitig erfüllt sein sollen. Wir nennen das hierdurch definirte geometrische Gebilde eine lineare Congruenz.

Wie viel Geraden derselben laufen durch einen beliebigen Raumpunkt? Im ersten Complex $\sum a_{ik} p_{ik} = 0$ wird dem beliebigen Punkte x eine Ebene zugeordnet, ebenso im zweiten Complex. Die Schnittgerade beider Ebenen stellt die einzige durch den Raumpunkt gehende Gerade unseres Systems dar. Ein analoger Satz ergibt sich in Beantwortung der Frage, wie viele Geraden in einer Ebene liegen. Unsere lineare Congruenz ist demnach von der ersten Ordnung und der ersten Klasse,

weil durch jeden Raumpunkt nur ein Strahl läuft, und in jeder Ebene nur eine Axe liegt.

Dieser linearen Congruenz genügen selbstverständlich alle geraden Linien, die durch irgend einen aus den gegebenen Complexen zusammengesetzten Complex

$$\sum (a_{ik} + \lambda a'_{ik}) p_{ik} = 0$$ definirt werden.

Der letzte Ausdruck giebt uns nun bei variablem λ ein ganzes Büschel von linearen Complexen. Wir werden uns daher fragen dürfen, ob unter denselben nicht specielle Complexe enthalten sind, d. h. ob wir dem λ nicht solche Werte erteilen können, dass die Grössen $a_{ik} + \lambda a'_{ik}$ selbst als Liniencoordinaten zu deuten sind. Dann muss folgende Gleichung bestehen:

$$(a_{12}+\lambda a'_{12})(a_{34}+\lambda a'_{34}) + (a_{13}+\lambda a'_{13})(a_{42}+\lambda a'_{42}) + (a_{14}+\lambda a'_{14})(a_{23}+\lambda a'_{23}) = 0.$$

Dies aber stellt eine quadratische Gleichung für λ dar. Im allgemeinen gibt es daher im Büschel dieser Complexe 2 specielle, so dass also die Congruenz aus allen geraden Linien besteht, die 2 feste Geraden, die „Leitlinien" treffen. Die letzteren können reell oder conjugirt imaginär sein. Doch gibt es auch den speciellen Fall, dass die quadratische Gleichung eine Doppelwurzel für λ besitzt. Alsdann haben wir nur eine doppeltzählende Direktrix. Endlich aber kann unsere Gleichung

auch identisch erfüllt sein. Als Bedingung hierfür findet sich:

$$A = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} = 0,$$
$$A' = a'_{12}a'_{34} + a'_{13}a'_{42} + a'_{14}a'_{23} = 0$$

und: $a_{12}a'_{34} + a_{34}a'_{12} + a_{13}a'_{42} + a_{42}a'_{13} + a_{14}a'_{23} + a_{23}a'_{14} = 0$

Die erste Gleichung aber besagt, dass der erste Complex speciell ist, also aus allen Geraden besteht, die eine feste Gerade treffen. Dasselbe gilt gemäss der zweiten Gleichung für den zweiten Complex. Die dritte Gleichung endlich gibt an, dass diese beiden festen Geraden sich selbst wechselseitig schneiden. In diesem Falle, (in dem die Gleichung für λ identisch erfüllt ist) haben wir es daher, mit einer „zerfallenden" Congruenz zu thun. Dieselbe besteht aus einer Congruenz erster Ordnung 0. Classe, deren sämmtliche gerade Linien, durch einen festen Raumpunkt gehen, und einer Congruenz 0 Ordnung 1. Klasse, deren sämmtliche gerade Linien eine Ebene ausfüllen.

Die Congruenz hat unendlich viele Leitlinien, $q_{ik} = a_{ik} + \lambda a'_{ik}$, nämlich alle diejenigen Geraden, welche dem durch die Geraden a_{ik} und a'_{ik} bestimmten Geradenbüschel angehören.

Was nun diese Lehre von den Congruenzen angeht, so gibt es ganz allgemein ein Gebiet der Anwendung (analog wie die linearen Complexe als Nullsysteme in der Mecha-

nik vorkommen). Wir meinen die geometrische Optik. Dieselbe nennt die Congruenzen dann Strahlensysteme. Man betrachtet etwa zuerst einen Lichtpunkt, der nach allen Seiten Strahlen aussendet; dieselben werden eine Congruenz 1. Ordnung 0. Klasse vorstellen. Diese Strahlen mögen etwa auf Linsen fallen, die wir uns übrigens ganz beliebig (nicht sphärisch) begrenzt denken mögen, vielleicht weiterhin noch an irgendwelchen Spiegeln reflektirt werden u. s. w. Schliesslich werden die Endstrahlen immer wieder eine 2-fach ∞ Schaar gerader Linien bilden, d. h. wir werden auf alle Fälle eine Liniencongruenz vor uns haben. Ich darf hier die Namen Hamilton und Kummer nennen, als diejenigen Forscher, die sich hauptsächlich in diesem Gebiet beschäftigt haben. Diese optischen Strahlensysteme sind natürlich, allgemein zu reden, keineswegs lineare Congruenzen. Aber sie können in der Nähe jedes einzelnen ihrer Strahlen mit der Annäherung 2r behandelt werden, als wenn sie lineare Congruenzen wären, entsprechend, wie man eine Fläche in einem Punkte durch ihre Tangentialebene ersetzt. Auf diese Vorstellungsweise beziehen sich nun die Modelle, welche von Kummer ausgeführt sind.*) Dieselben geben alle Strahlen einer linearen Congruenz welche durch die Punkte eines kleinen

*) vergl. Kalalog mathem. Modelle etc. von W. Dyck [München 1892] pag. 280 № 192.

Kreises laufen, der in einer, zu einem ausgewählten Strahle senkrechten Ebene, um den Schnittpunkt von Strahl und Ebene herum gelegt ist. Im einzelnen sind die 3 Fälle dargestellt, dass die beiden Leitlinien der Congruenz reell, oder imaginär sind, oder in eine zusammenfallen. Es ist sehr lehrreich, sich auch die Gesammtheit der Strahlen vorzustellen, welche eine lineare Congruenz ausmachen. So lange die Leitlinien reell sind, hat dies natürlich keine Schwierigkeit. Dagegen wird man im Falle imaginärer oder zusammenfallender Leitlinien nicht wohl ohne Modell durchkommen.

3) Es seien 3 lineare Gleichungen der Linien-[Do. 8. XII. 92] coordinaten gegeben:

$$\sum a_{ik}\, p_{ik} = 0\,,\quad \sum a'_{ik}\, p_{ik} = 0\,,\quad \sum a''_{ik}\, p_{ik} = 0\,;$$

dieselben stellen eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit gerader Linien dar d. h. eine Linienfläche. Wir fragen uns nun, von welchem Grade diese Fläche sein wird. Zu dem Zwecke wenden wir die Zahl der Schnittpunkte der letzteren mit einer geraden Linie q_{ik} abzählen, d. h. die Zahl der Linien, welche ausser den gegebenen Gleichungen noch die folgende $\sum q'_{ik}\, p_{ik} = 0$ befriedigen. Setzen wir uns, dass noch die quadratische Relation $P(p_{ik}) = 0$ zwischen den Coordinaten besteht,

so erkennt man leicht, dass die Zahl der Lösungen aller unserer Gleichungen mit den 6 homogenen Variabeln p_{ik} gerade 2 beträgt. Es giebt demnach, allgemein zu reden auf unserer Linienfläche stets 2 gerade Linien, welche die Gerade g'_{ik} treffen. In leicht verständlicher Verallgemeinerung lautet das hierin sich ausdrückende Theorem: *3 Complexe von der Ordnung l, m und n haben eine Linienfläche gemein, welche die Ordnung 2.l.m.n besitzt.*

Wir bekommen in unserem speciellen Falle der *linearen* Complexe als das Gebilde der ihnen gemeinsamen geraden Linien eine Linienfläche 2 Ordnung, d.h. ein einschaliges Hyperboloid (welches natürlich im Besonderen in ein hyperbolisches Paraboloid übergehen kann). Nun trägt ein einschaliger Hyperboloid neben der ersten Schaar Erzeugender noch eine zweite; es drängt sich daher die Frage auf, welche Rolle diese letztere bei unserem Ansatze spielt. Zunächst ist einleuchtend, dass die Fläche 2. Ordnung nicht nur den 3 gegebenen Complexen, sondern der ganzen 3 gliedrigen Schaar gemeinsam angehört:

$$\lambda \sum a_{ik}\, p_{ik} + \lambda' \sum a'_{ik}\, p_{ik} + \lambda'' \sum a''_{ik}\, p_{ik} = 0,$$ oder anders geordnet:

$$\sum (\lambda a_{ik} + \lambda' a'_{ik} + \lambda'' a''_{ik})\, p_{ik} = 0.$$

In der letzteren suchen wir die in ihr enthaltenen speciellen Complexe zu bestimmen.
Wir haben zu diesem Zwecke einfach die Invariante der Complexe gleich 0 zu setzen. d. h.

$$(\lambda a_{12} + \lambda' a'_{12} + \lambda'' a''_{12})(\lambda a_{34} + \lambda' a'_{34} + \lambda'' a''_{34}) + (\lambda a_{13} + \lambda' a'_{13} + \lambda'' a''_{13})$$

$$(\lambda a_{42} + \lambda' a'_{42} + \lambda'' a''_{42}) + (\lambda a_{14} + \lambda' a'_{14} + \lambda'' a''_{14})(\lambda a_{23} + \lambda' a'_{23} + \lambda'' a''_{23}) = 0.$$

Dies aber ist eine quadratische Gleichung für das Verhältniss $\lambda : \lambda' : \lambda''$, liefert also ∞^1 Lösungssysteme. Die Leitgeraden dieser in unserer Schaar enthaltenen einfach ∞ vielen speciellen linearen Complexe sind eben die Linien zweiter Ordnung unserer Hyperboloids.
Wir nennen übrigens eine solche Schaar linearer Complexe, wie sie die obige Summenformel darstellt, jenachdem eine 3 gliedrige lineare Schaar, oder eine 2 fach unendliche lineare Schaar, wie leicht verständlich ist. Diese Bezeichnungen werden wir bald öfter anzuwenden Gelegenheit haben. Wir könnten nun noch die speciellen Fälle erörtern, welche eine dreigliedrige lineare Schaar linearer Complexe darbieten kann, doch wollen wir darüber hinweg gehen und weitergehend uns fragen:
4) Was bedeuten 4 lineare Gleichungen zwischen den p_{ik}:

$$\sum a_{ik} p_{ik} = 0,\ \sum a'_{ik} p_{ik} = 0,\ \sum a''_{ik} p_{ik} = 0\ \sum a'''_{ik} p_{ik} = 0\ ?$$

Da wiederum noch ausserdem die quadratische Gleichung $P = 0$ besteht, so liefern uns die Gleichungen überhaupt 2 Lösungen d. h. 4 lineare Complexe haben 2 gerade Linien gemein. Allgemein ausgesprochen lautet dies sr Satz: Haben wir 4 Complexe von den Ordnungen l, m, n, o, so haben dieselben allgemein zu reden $2\, l.m.n.o$ gerade Linien gemein, natürlich besondere Fälle vorbehalten, die wir hier nicht näher discutiren.

Ich gehe nun jetzt dazu über, diejenige Erweiterung der liniengeometrischen Ansätze vorzutragen, die in meinen Arbeiten Ann. II 1869 entwickelt ist.*) Dieselbe basirt darin, dass wir nicht sowohl die gerade Linie als Raumelement betrachten, sondern den allgemeinen linearen Liniencomplex, (den wir durch die Gleichung $\sum a_{ik} p_{ik} = 0$ definirten). d. h. wir studiren Gleichungen zwischen den Coefficienten a_{ik} der Complexe.

Mit diesen Gedanken stimmen sehr gut, die Tendenzen überein, die Ball in seiner bereits von uns erwähnten Schraubentheorie verfolgt hat. Dieselbe betrachtet daselbst die Schraube, als Raumelement; ausführlicher können wir leider hierauf nicht eingehen.

Wir deuten also die Grössen a_{ik} als Coordinaten [die wir

*) Zur Theorie der Linienconplexe ersten u. zweiten Grades. — Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten.

unter Umständen auch b_{ik} schreiben, wobei stets auf die uns bekannte Regel die Vertauschung der Indices betreffend Rücksicht zu nehmen ist.]

Es seien zwei Systeme der neuen Coordinaten a_{ik} u. a'_{ik} (oder auch b_{ik}, b'_{ik}) gegeben. Wir bilden aus ihnen die ganze Schaar $\lambda a_{ik} + \lambda' a'_{ik}$. Dieser zweigliedrigen d. h. einfach unendlichen Schaar entspricht, wie wir wissen, ein Büschel von linearen Complexen. Wir bilden uns nach dem bekannten Schema für den einzelnen Complex dieses Büschels die Invariante: $(\lambda a_{12} + \lambda' a'_{12}) \cdot (\lambda a_{34} + \lambda' a'_{34}) + \ldots + \ldots$ oder

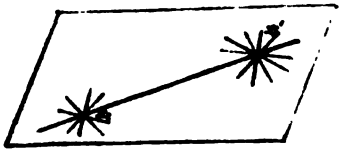
$$\lambda^2 A + \lambda^2 A' + \lambda\lambda' (a_{12} a'_{34} + a_{34} a'_{12} + a_{14} a'_{23} + a'_{14} a_{23} + a_{13} a'_{42} + a'_{13} a_{42}),$$

worin wir A und A' als Abkürzungen für $a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23}$ resp. $a'_{12} a'_{34} + a'_{13} a'_{42} + a'_{14} a'_{23}$ eingeführt haben; A, A' sind die „Invarianten" der Complexe a_{ik}, a'_{ik}. Es handelt sich für uns jetzt insbesondere um den Klammerausdruck, den wir abkürzend schreiben können: $\sum a_{ik} b_{ik}$ oder $\sum a'_{ik} b_{ik}$. Wir nennen ihn die simultane Invariante zweier Complexe. Die nächste Frage wird wieder sein, was das Verschwinden der simultanen Invariante bedeutet. Insofern die b_{ik} ganz beliebig gegeben werden können, stellt die Gleichung $0 = \sum a_{ik} b_{ik}$ bei variablen a_{ik} zugleich die allgemeine lineare Gleichung dar, die man für Complexcoordinaten bilden kann. Mit unserer letzten Frage ist daher die-

jenige nach der Bedeutung der allgemeinen linearen Gleichung zwischen Complexcoordinaten identisch.

Wie liegen nun zwei Complexe gegen einander, für welche die Gleichung $\sum a_{ik} b'_{ik} = 0$ gilt? Die Beantwortung dieser Frage ist für viele der folgenden Untersuchungen von grosser Wichtigkeit. Man bezeichnet diese Lage der beiden Complexe gegen einander als involutorische Lage. [Ball nennt zwei in derselben Beziehung stehende Schrauben „Correciprokalschrauben"]. Zum vollen Verständniss dieser Beziehung müssen wir auf den Begriff der Involution zurückgehen, wie er in der niedern projectiven Geometrie entwickelt wird. Man nennt dort bekanntlich im einfachsten Fall Involution diejenige Beziehung der Punkte einer festen Geraden zu einander, welche die zu 2 bestimmten reellen od. imaginären Punkten d_1 u. d_2 dieser Geraden harmonisch liegenden Punkte z. B. p und p' zu Paaren zusammenfasst. Wir haben den Ausdruck „involutorische Verwandtschaft" übrigens ja schon in der Theorie der reciproken Radien und beim Nullsystem gebraucht. In Uebereinstimmung mit dem damaligen Sprachgebrauch ist die Beziehung der Punkte eines Paares auf unserer geraden Linie ja in der That eine gegenseitige, eine reciproke. Doch gehen wir zu dem linearen Complex zurück. Wir wählen irgend eine Ebene des Raumes aus;

in derselben wird dem Complex a_{ik} ein bestimmter Punkt x_i entsprechen, ebenso dem zweiten Complex a'_{ik} ein zweiter Punkt x'_i als Träger der Complexstrahlen in der Ebene. Die Verbindungsgerade dieser Punkte gehört beiden Complexen zugleich an, und stellt den Congruenzstrahl in der ausgewählten Ebene dar. Nun gehört offenbar



dem Complex $\lambda a_{ik} + \lambda' a'_{ik}$ in der letzten ein Punkt derselben Congruenzstrahlen zu (insofern, doch letztere allen Complexen der Schaar gemeinsam ist), und zwar sind die homogenen Coordinaten dieser Punkte so durch den Ausdruck $\lambda x_i + \lambda' x'_i$ gegeben, wie wir nicht weiter beweisen wollen. Um die Directricen der Complexschaar $\lambda a_{ik} + \lambda' a'_{ik}$ zu finden, hatten wir die Gleichung:

$$A\lambda^2 + A'\lambda'^2 + \lambda\lambda'\{\ldots\ldots\} = 0 \text{ aufgestellt.}$$

Verschwindet die simultane Invariante der beiden Complexe, so geht diese Gleichung über in:

$$A\lambda^2 + A'\lambda'^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \pm \sqrt{-\frac{A'}{A}}.$$

Es ergeben sich daher unter dieser speciellen Verbindung die Gleichungen der Directricen in der Form:

$$\begin{cases} \sqrt{-A'}\sum a_{ik}\,p_{ik} + \sqrt{A}\sum a'_{ik}\,p_{ik} = 0, \\ \text{und} \\ \sqrt{-A'}\sum a_{ik}\,p_{ik} - \sqrt{A}\sum a'_{ik}\,p_{ik} = 0, \end{cases}$$

wo nun die Coefficienten der p_{ik} mit richtigen Indices genommen die Coordinaten der Directricen sind. Diese Leitlinien müssen offenbar den in der Figur gezeichneten Congruenzstrahl in 2 Punkten d_1 u d_2 treffen, da letzterer ja auch den durch die Directricen vorgestellten speciellen Complexen angehört. Als Coordinaten dieser Schnittpunkte ergeben sich dem Vorstehenden gemäss:

$$\text{für } d_1 : \sqrt{-A'}\,x_i + \sqrt{A}\,x'_i \,,$$
$$\text{für } d_2 \quad \sqrt{-A'}\,x_i - \sqrt{A}\,x'_i \,.$$

Wie man sofort erkennt, liegen diese Punkte zu den Punkten x_i und x'_i harmonisch, so dass wir als schliessliches Resultat den Satz erhalten:

Zwei lineare Complexe in Involution liefern in einer beliebigen Ebene des Raumes auf dem dieser Ebene zugehörigen Congruenzstrahl 2 Punkte, welche jedesmal harmonisch liegen zu denjenigen beiden Punkten, in denen der Congruenzstrahl den beiden Directricen begegnet.

In diesem Satz kann man die Worte Ebene und Punkt vertauschen, d. h. die involutorische Lage zweier line-

aller Complexe ist etwas sich selbst Dualistisches.
Wenn wir nun annehmen, dass eines von den 2 Complexen, die involutorisch liegen, ein specieller wird, so können wir etwa $b'_{ik} = p'_{ik}$ setzen, und unsere Bedingungsgleichung $\sum a_{ik} b'_{ik} = 0$ geht über in $\sum a_{ik} p'_{ik} = 0$. Es besagt daher die involutorische Lage dann einfach, dass die Leitlinie dieses speciellen Complexes dem andern Complex angehört. – Wenn wir endlich annehmen, dass beide Complexe speciell sind, so setzen wir $b'_{ik} = p'_{ik}$, $a_{ik} = q_{ik}$ und erhalten die Gleichung $\sum q_{ik} p'_{ik} = 0$. Es besagt daher die involutorische Lage dann, dass die beiden Leitgeraden sich schneiden. Beide Vorkommnisse können wir natürlich unter die allgemeine Definition mitbegreifen.
Wir hatten in der letzten Stunde in der linea- [Fr. 9. XII. 92.]
ren Gleichung $\sum a_{ik} b'_{ik} = 0$ allgemein die Bedingung für die involutorische Lage der beiden Complexe a_{ik}, b_{ik} erkannt. An eine solche lineare Gleichung kann man nun immer eine Theorie der Reciprocität anknüpfen.
Da ein linearer Complex $\sum a_{ik} p_{ik} = 0$ von 5 wesentlichen Constanten abhängt, so werden wir überhaupt mit einer 5fach unendlichen Mannigfaltigkeit linearer Complexe zu thun haben. Sind irgend 6 lineare Complexe gegeben: $\sum a_{ik} p_{ik} = 0 \ldots\ldots \sum a'_{ik} p_{ik} = 0$,

die linear unabhängig von einander sind, d.h. deren Coefficienten eine nicht verschwindende Determinante liefern, so können wir den allgemeinsten linearen Complex aus ihnen mit Hülfe von 6 Parametern zusammensetzen, also:

$$\lambda \sum a_{ik}\, p_{ik} + \lambda' \sum a'_{ik}\, p_{ik} \cdots\cdots + \lambda^{r} \sum a^{r}_{ik}\, p_{ik} = 0,$$

wovon man sich leicht mittelst der Methode der Coefficientenvergleichung überzeugt. Da diese Gleichung auf der linken Seite aus 6 Gliedern besteht, werden wir die Mannigfaltigkeit der linearen Complexe ebensowohl eine 6gliedrige lineare Schaar nennen können.

1) Nun wollen wir zuerst eine weitere Gleichung hinzunehmen:

$\sum a_{ik} B_{ik} = 0$ (die unserer obigen Gleichung $\sum a_{ik} b'_{ik} = 0$ entspricht; nur dass wir für b'_{ik} die Bezeichnung B_{ik} substituirt haben, um eine grössere Mannigfaltigkeit der Bezeichnung zur Verfügung zu haben.) Wir betrachten die Grössen a_{ik} als bestimmt gegebene Constanten. Dem Complex mit den Coefficienten a_{ik} tritt dann eine 4fach ∞ Schaar von Complexen B_{ik} gegenüber, die mit ersterem die hingeschriebene Bedingung erfüllen, d.h. mit ihm in Involution stehen. Wir behaupten nun, dass die Complexe B_{ik} zugleich eine 5gliedrige lineare Schaar bilden. Es ist dies leicht einzusehen. Der allgemeine Complex setzt sich aus 6 Complexen mit ebensoviel Parametern λ zusammen. Ordnet man diese Form nach den

Coordinaten p_{ik} und setzt die Coefficienten derselben für B_{ik} in die obige Gleichung $\sum a_{ik} B_{ik} = 0$ ein, so erhält man eine Gleichung mit den 6 Parametern λ, die gestattet, einen derselben durch die übrigen auszudrücken. Hieraus folgt unmittelbar, dass der allgemeinste lineare Complex, der obige Bedingung erfüllt, sich durch 5 Complexe B_{ik} mit 5 Parametern Λ in der Formel darstellen lässt.

$$\Lambda B_{ik} + \Lambda' B'_{ik} + \ldots\ldots \Lambda^{V} B^{V}_{ik} \quad .$$

Natürlich müssen diese Complexe $B_{ik}, B'_{ik} \ldots\ldots B^{V}_{ik}$ dabei linear unabhängig genommen werden, d. h. so, dass nicht alle fünfgliedrigen Determinanten, die man aus ihren Coordinaten bilden kann, verschwinden.

Wir fassen nun die gegebenen Grössen a_{ik}, die wir doch unbeschadet der geometrischen Bedeutung in λa_{ik} verwandeln können, alle als eine eingliedrige Schaar linearer Complexe auf. Derselben wird dann vermittels der Gleichung $\sum a_{ik} B_{ik} = 0$ eine fünfgliedrige Schaar linearer Complexe zugeordnet, die sämmtlich mit den ersten in Involution liegen.

2) Nun nehmen wir an, es seien 2 Gleichungen gegeben: $\sum a_{ik} B_{ik} = 0$, $\sum a'_{ik} B_{ik} = 0$, in denen die Grössen a_{ik} u. a'_{ik} als Constante gelten. Diese beiden Gleichungen können wir mit 2 Parametern λ in eine zusammenfassen: $\sum (\lambda a_{ik} + \lambda' a'_{ik}) B_{ik} = 0$, die uns besagt, dass der Complex B_{ik} zu der ganzen 2gliedrigen

Schaar $\lambda a_{ik} + \lambda' a'_{ik}$ in Involution stehen soll. Wir überlegen, dass die Gesammtheit der Complexe B_{ik}, welche dieser Forderung genügen, eine 3fach unendliche Mannigfaltigkeit oder eine 4gliedrige lineare Schaar bilden werden. Haben wir daher 4 Complexe $B_{ik} \ldots B'''_{ik}$ dieser Art gefunden, die linear unabhängig sind, so drückt sich der allgemeinste derselben in der Formel aus:

$$\Lambda B_{ik} + \Lambda' B'_{ik} + \Lambda'' B''_{ik} + \Lambda''' B'''_{ik}.$$

3) Endlich können wir 3 Gleichungen als gegeben annehmen.

$$\sum a_{ik} B_{ik} = 0, \quad \sum a'_{ik} B_{ik} = 0, \quad \sum a''_{ik} B_{ik} = 0.$$

Dann wird der 3gliedrigen Schaar auf der einen Seite, die sich aus den 3 Complexen a_{ik}, a'_{ik}, a''_{ik} bilden lässt, auch auf der andern Seite eine dreigliedrige Schaar entsprechen, deren einzelne Complexe mit allen Complexen der ersten Schaar in Involution stehen.

Alle diese Fälle zusammenfassend werden wir daher sagen dürfen: <u>Insofern unsere Involutionsbedingungen in den Coordinaten der beiden in Betracht kommenden linearen Complexe linear ist, wird vermöge derselben jeder ν-gliedrigen linearen Schaar linearer Complexe eine $(6-\nu)$gliedrige lineare Schaar linearer Complexe zugeordnet, die mit sämmtlichen Complexen der ersten Schaar in Involution liegen.</u>

$(\nu = 0, 1, 2, \ldots 6)$.

In diesem Satze spricht sich die von uns gemeinte Reciprocität aus. Wir können nun weiter auf die speciellen Com-

plexe achten, die in diesen zusammengehörigen Schaaren enthalten sind. Nehmen wir z. B. eine 3gliedrige Schaar linearer Complexe, so bekommen wir, wie wir von früher wissen, in ihr einfach ∞ viele specielle Complexe; dieselben bilden die Erzeugenden der einen Art bei einem einschaligen Hyperboloid. Die soeben betrachtete Reciprocität zwischen 2 dreigliedrigen d. h. 2fach ∞ Systemen linearer Complexe tritt hier besonders deutlich hervor. Die speciellen Complexe der beiden Schaaren sind einfach die beiden Systeme geradliniger Erzeugender eines Hyperboloids. Die involutorische Lage der beiden Schaaren aber tritt darin hervor, dass alle Erzeugenden der einen Art alle Erzeugenden der andern Art schneiden.

Mit diesen Erörterungen sind wir einer ferneren Betrachtungsweise nahe gekommen, welche die Einführung einer neuen allgemeineren Coordinatenbestimmung der linearen Complexe zum Gegenstand hat.

Wir definiren die neuen Coordinaten y_ϱ als irgendwelche lineare Functionen der bisherigen Coordinaten a_{ik} [unter Einführung eines Proportionalitätsfaktor σ, da es ja nur auf das Verhältniss ankommt]:

$$\sigma y_\varrho = \sum_{ik} c_{ik\varrho}\, a_{ik}.$$

Bedingung ist natürlich, dass die Determinante $|c_{ik\varrho}|$ der Coefficienten von Null verschieden ist. Dann können wir die Gleichungen nach den 6 Grössen a_{ik} auflösen und er-

halten etwa:

$$\tau \cdot a_{ik} = \sum \gamma_{ike}\, y_e .$$

Wir wie sogleich erkennen, bedeutet jede einzelne der verallgemeinerten Coordinaten y_e die linke Seite einer auf einen festen Complex C_e bezüglichen Involutionsbedingung. Wie werden wir nun mit diesen verallgemeinerten Coordinaten y_e operiren? Als Bedingung für einen speciellen Complex hatten wir früher das Verschwinden des Ausdruckes $a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23}$ gefunden. Tragen wir für die a_{ik} die Werte der letzten Gleichung ein, so geht die Bedingungsgleichung über in

$$\sum \gamma_{12e}\, y_e \cdot \sum \gamma_{34e}\, y_e + \cdots + \cdot = 0 ,$$

was wir abkürzend mit $\Lambda = 0$ bezeichnen. d.h. Sollen die neuen Coordinaten sich auf einen speciellen Complex beziehen, also Liniencoordinaten vorstellen, so muss eine bestimmte quadratische Gleichung $\Lambda = 0$ zwischen ihnen stattfinden.

Das algebraische Gebiet, in welches wir hier nothwendig hineingeführt werden, ist die Lehre von den quadratischen Formen, insbesondere ihr Verhalten bei linearen Substitutionen. Wir werden daher einen kleinen Excurs einzuschalten haben, der mehr auf eine Zusammenstellung der wichtigsten Sätze als auf die Ableitung und Begründung derselben hinauslaufen kann;

des näheren Studiums wegen sei auf die Darstellung in Baltzer's Determinanten verwiesen.

Quadratische Formen mit n Veränderlichen

1) Es seien $x_1 \ldots x_n$ die ursprünglichen Coordinaten und $\sum k_{\alpha\beta} \cdot x_\alpha x_\beta$ die vorliegende quadratische Form. Nun führen wir durch eine ganz beliebige lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante neue Variable $y_1 \ldots y_n$ in die quadratische Form ein; dieselbe möge übergehen in $\sum l_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta$. Was hat diese letzte Form nun mit der Ausgangsform gemein?

Da zeigt sich zunächst dass die Determinante der $k_{\alpha\beta}$ eine Invariante der quadratischen Form ist, die bei der Transformation 0 bleibt wenn sie zu Anfang 0 war, aber übrigens sich nur um einen nicht verschwindenden Faktor ändert. Umgekehrt wird man 2 quadratische Formen von nicht verschwindender Determinante auch immer durch lineare Substitution, die eine aus der andern ableiten können.

Von diesem Satze sei doch sogleich die Anwendung auf unsere quadratische Form, die Invariante des linearen Complexes, $a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23}$ gemacht, die wir gemäss der obigen Bezeichnung der Variabeln jetzt also $x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6$ schreiben werden.

Die Determinante derselben ergiebt sich leicht gleich:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 .$$

Der Ausdruck $a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}$ aufgefasst als quadratische Form von 6 Variabeln hat daher jedenfalls eine nicht verschwindende Determinante. Nun soll aus derselben durch lineare Substitution der Grössen a_{ik} die Form Λ sich ergeben. Wir schliessen, dass das Λ auch eine nicht verschwindende Determinante hat, und dass weiter jede Form Λ, welche eine nicht verschwindende Determinante besitzt, durch eine geeignete Wahl der Complexcoordinaten y hergestellt werden kann.

2) Kehren wir zu der allgemeinen Betrachtung der quadratischen Formen zurück. Wenn wir verlangen, es sollen imaginäre Grössen überhaupt ausgeschlossen sein, beschränken wir uns also auf reelle quadratische Formen und reelle lineare Substitutionen, so kommt neben dem bis jetzt Gesagten auch noch das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen in Betracht. Dasselbe besteht in folgendem:

Nehmen wir an, es gelingt uns irgendwie die gegebene quadratische Form $\sum k_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ durch lineare Substitution der x_i umzuwandeln in die Form:

$$m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + \ldots\ldots + m_n z_n^2$$

d. h. in eine Summe von n rein quadratischen Gliedern, was auf mannigfachste Weise möglich sein wird. Die Determinante der neuen Form ist dann:

$$\begin{vmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & m_n \end{vmatrix} = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n .$$

Zufolge unseres obigen Satzes wird also keine dieser Grössen m verschwinden, sofern die gegebene Form, wie wir hier voraussetzen, eine nicht verschwindende Determinante hat. Das Trägheitsgesetz bezieht sich nun auf die Frage, wieviele dieser m positiv, bezüglich negativ sein werden. Dasselbe besagt, dass bei jeder einzelnen reellen quadratischen Form die nicht verschwindende Determinante notwendig eine ganz bestimmte Anzahl positiver m und negativer Coefficienten m herauskommen muss, wie immer man auch die Einführung der z wählt.

Wir machen die Anwendung des Trägheits- [Mo. 12. XII. 9
gesetzes auf die uns vorliegende quadratische Form der fünf Veränderlichen $x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6$ indem wir uns fragen, wieviele Glieder bei der Transformation derselben in eine Form mit nur quadratischen Gliedern positiv, wieviele negativ sein werden. Es ist leicht, eine Substitution, die diese leistet, sofort hinzuschreiben, es sei z.

t:

$$x_1 = y_1 + y_2 \;,\quad x_3 = y_3 + y_4 \;,\quad x_5 = y_5 + y_6$$
$$x_2 = y_1 - y_2 \;,\quad x_4 = y_3 - y_4 \;,\quad x_6 = y_5 - y_6$$

erhalten dann als eine neue Form:

$$\Omega = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + y_5^2 - y_6^2 \;;$$

. <u>die quadratische Form A, die in der Liniengeometrie</u>
damental ist, gehört im Sinne der Trägheitssysteme zu
enigen, welche gleich viel positive und negative Vor-
hen aufweisen.

llen wir uns auf reelle lineare Substitution bei der
führung der neuen Coordinaten beschränken, so wer-
, wir demnach vom A ausgehend auf keine Weise eine
m erreichen können, die sich nur aus positiven Qua-
ten zusammensetzt. Anders ist es bei Zulassung von
aginären Substitutionen. Setzen wir z. B. nachträglich

$$z_1 = y_1 \;,\quad z_3 = y_3 \;,\quad z_5 = y_5 \;,$$
$$z_2 = i y_2 \;,\quad z_4 = i y_4 \;,\quad z_6 = i y_6 \;,$$

rhalten wir in der That die Gestalt $\sum z_i^2$.

ken wir uns jetzt, dass wir für den linearen Complex
ndwelche $y_1 \ldots y_6$ als Coordinaten eingeführt ha-
e; wie werden wir mit denselben nun weiter opri-
en? Wir haben wieder die quadratische Form
$(y_1 \ldots y_6)$ als „<u>Invariante</u>" zu betrachten. Ihr Ver-

schwinden giebt sofort die Bedingung für einen speciellen Complex an.

Wie bilden wir uns aber die simultane Invariante zweier Complexe in den neuen Coordinaten? Hatten wir dieselbe früher eingeführt, indem wir in der Entwicklung von $A(\lambda a_{ik} + \lambda' a'_{ik})$ den Coefficienten von $\lambda\lambda'$ ins Auge fassten, so werden wir jetzt analog vorgehen und schreiben

$$\Delta(\lambda y + \lambda' y') = \lambda^2 \Delta(y) + \lambda\lambda' \sum_1^6 \frac{\partial \Delta}{\partial y_\alpha} y'_\alpha + \lambda'^2 \Delta(y').$$

Der Coefficient von $\lambda\lambda'$: $\sum_1^6 \frac{\partial \Delta}{\partial y_\alpha} y'_\alpha$ giebt uns dann den Ausdruck für die gesuchte simultane Invariante; sein Verschwinden bedeutet wie früher die involutorische Lage beider Complexe. Hat Δ insbesondere die Gestalt $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + y_5^2 - y_6^2$, so wird die simultane Invariante die Gestalt $2yy' - \ldots + \ldots - 2y_6 y'_6$ haben.

Anknüpfend an die besondere Form von Δ wollen wir jetzt folgende Complexe als Fundamentalcomplexe bezeichnen:

1) $y_1 = 1,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0 \ \ldots\ y_6 = 0$
2) $y_1 = 0,\ y_2 = 1,\ y_3 = 0 \ \ldots\ y_6 = 0$
⋮
6) $y_1 = 0\ y_2 = 0\ y_3 = 0 \qquad y_6 = 1.$

Man übersieht leicht die Invarianten dieser 6 Fundamentalcomplexe; wir können dieselben zweckmässig be-

zeichnen mit $\Delta(ii)$ resp. $\Delta(ik)$, wobei durch die gleichen Indices (ii) die Invariante des i^{ten} Complexes, durch die Indices (ik) die simultane Invariante des i^{ten} u. k^{ten} Complexes bezeichnet sein möge. Durch einfache Ausrechnung ergibt sich sofort:

$$\Delta(1,1) = 1,\ \Delta(2,2) = -1, \ldots \Delta(6,6) = -1,$$

und $\Delta(1,2) = \Delta(1,3) = \ldots \Delta(5,6) = 0$, d. h. in Worten: Die Invarianten der 6 Fundamentalcomplexe sind abwechselnd $+1$ und -1, die simultanen Invarianten dagegen sämmtlich 0. Es ist sofort die geometrische Bedeutung dieses Resultates einleuchtend, wenn man sich nur erinnert, dass das Vorzeichen der Invariante eines Complexes angibt, ob der letztere rechts oder links gewunden ist. Drei von unsern Complexen sind rechts gewunden, drei links gewunden und je zwei liegen mit einander in Involution.

Damit haben wir eine merkwürdige Configuration getroffen, über die seither viel gearbeitet ist. Neben meiner Abhandlung in Ann. II darf ich das Werk von Bull citiren, wo sehr viel mit 6 „Correciprocalschrauben" operirt wird, die durchaus unsern 6 Fundamentalcomplexen entsprechen. Ganz neuerdings ist auch auf die Liniengeometrie von Sturm zu verweisen, die leider rein synthetisch ist unter Beiseitelassung jeglicher Formeln, jedoch viele Literaturangaben enthält

Die rein synthetische Darstellung in diesem Gebiet befriedigt, nach meinem Dafürhalten, nicht, weil sie den Ueberblick hemmt und beispielsweise gar nicht erkennen lässt, dass es sich hier um eine einfache Anwendung der Theorie der quadratischen Formen und insbesondere ihres Trägheitsgesetzes handelt.

In Anm. I habe ich übrigens wesentlich mit der Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

gearbeitet, d.h. der Summe von nur positiven Quadraten, die, wie bereits bemerkt wurde, durch eine imaginäre Substitution aus der ursprünglichen hervorgeht. Die Voraussetzungen sind nach anderer Seite allgemeiner. Wir haben hier in der Vorlesung immer angenommen, dass wenigstens die Gleichungen der Complexe immer reell sind. Doch wird man bei Construction unseres Coordinatensystems auch solche Complexe zulassen können, welche imaginär sind, und wird dann jeweils die conjugirt-imaginären Complexe hinzunehmen.

Von den 6 Complexen, die $x_1^2 + \dots x_6^2 = 0$ angeben, wird dann noch immer gelten, dass sie paarweise in Involution liegen, und insbesondere ist von den reellen Complexen, die unter ihnen enthalten sind, die Hälfte rechts, die Hälfte links gewunden.

Wir wenden uns dazu, über den Complex 2ten Grades einige Angaben zu machen. Derselbe wird gegeben durch

die Gleichung:

$$\mathcal{F}_2 = \sum b_{ik.i'k'}\, p_{ik}\, p_{i'k'} = 0,$$ die in extenso 21 Glieder enthält.

Hinzu tritt dann die Bedingung:

$$\mathcal{A} = 0 = p_{12}\, p_{34} + p_{13}\, p_{42} + p_{14}\, p_{23} = 0$$

Wir haben also 2 simultane quadratische Formen vor uns, und wieder greift die Aufgabe Platz, die wir neulich schon bei der Betrachtung der Cycliden behandelt haben, beide Formen gleichzeitig, durch lineare Substitution der Coordinaten, auf Summen rein quadratischer Glieder zurückzuführen:

$$\mathcal{F}_2 = \frac{z_1^2}{\kappa_1} + \frac{z_2^2}{\kappa_2} + \ldots\ldots + \frac{z_6^2}{\kappa_6},$$

$$\mathcal{A} = z_1^2 + z_2^2 + \ldots\ldots + z_5^2,$$

wobei die Grössen κ_i gewisse Constanten darstellen. Die Theorie der quadratischen Formen besagt, dass man die Formen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{F}$ allgemein in der That in letztere Gestalt bringen kann; die Grössen κ_i ergeben sich als die reellen oder imaginären Wurzeln derjenigen Gleichung 6ten Grades, die man durch Nullsetzen der Determinante von $\mathcal{A} - \kappa\mathcal{F}$ erhält. Wir können nun wieder sehr einfach 6 Fundamentalcomplexe definiren durch die Gleichungen $z_1^2 = 0 \ldots\ldots z_6^2 = 0$. Hiernach kommt auch in der Theorie der Complexe 2ten Grades im System

von 6 reellen, oder imaginären linearen Fundamentalcomplexen der soeben betrachteten Art zur Geltung. Die nähere Ausführung dieser Ansätze ist in meiner Arbeit selbst nachzulesen. Ich betrachtete dort insbesondere eine Schaar von Complexen 2ten Grades, wie sie die folgende Gleichung, mit dem Parameter λ angibt:

$$\sum \frac{x_i^2}{\kappa_i - \lambda} = 0.$$

Diese Gleichungsform erinnert uns sofort an die Theorie der confocalen Flächen zweiten Grades, wie die der confocalen Cycliden. Dementsprechend sollen auch diese Complexe confocale Complexe genannt werden.

Vergleich mit den pentasphärischen Coordinaten.

Wir wollen nun weiterhin nicht die Liniengeometrie als solche im Einzelnen entwickeln, sondern gehen dazu über einen Vergleich anzustellen zwischen der Liniengeometrie und der Punktgeometrie der pentasphärischen Punktcoordinaten. In der That fordern unsere letzten Formeln zu einem solchen Vergleiche auf. Wir wollen die einzelnen Sätze, die sich hier entsprechen, direkt einander gegenüber stellen:

Liniengeometrie:	Pentasphärische Punktcoordinaten:
1) Definition der 6 Liniencoordinaten	Definition der 5 pentasphärischen Punktcoordinaten.
$x_1 \ldots\ldots x_6$	$x_1 \ldots\ldots x_5$

mit der Bedingung
$\sum x_i^2 = 0$

2) $\sum_1^6 a_i x_i = 0$ gibt den linearen Complex;
der Complex ist speciell für
$\sum_1^5 a_i^2 = 0$

3) Zwei lineare Complexe liegen in Involution wenn
$\sum_1^6 a_i a_i' = 0$ ist

Specieller Fall: zwei Gerade schneiden sich

4) Dem Coordinatensystem liegen 6 Fundamentalcomplexe zu Grunde.

mit der Bedingung
$\sum x_i^2 = 0$

$\sum_1^6 a_i x_i = 0$ bedeutet hier eine Kugel;
ist $\sum_1^5 a_i^2 = 0$ haben wir eine Punktkugel.

Die Gleichung $\sum_1^5 a_i a_i' = 0$ bedeutet für zwei Kugeln, dass dieselben sich orthogonal durchdringen.

Specieller Fall: Zwei Punkte haben verschwindende Entfernung *)
hier dagegen 5 Orthogonalkugeln.

5) Confocale Complexe 2ten Grades Confocale Cycliden nach Darboux

Liniengeometrie und Punktgeometrie bei Zugrundelegung der pentasphärischen Coordinaten arbeiten daher mit denselben Formeln; nur hat man das eine Mal 6 Coordinaten, das andere Mal 5 Coordinaten. Die hiermit berührte Analogie ist jedoch unvollständig, soweit die Realitätsverhältnisse in Frage kommen. Wir hatten speciell die orthogonalen pentasphärischen Punktcoordinaten definirt durch die Gleichung

*) Darum fallen sie noch keines wegs zusammen, da wir unseren Coord immer imaginäre Werte gestatten.

$5\,x_i = \frac{\mathfrak{P}_i}{\rho_i}$, in denen $\mathfrak{P}_i$ die Potenz des Punktes in Bezug auf die i^{te} Kugel und ρ_i den zugehörigen Radius bedeutet, und hatten überdies erkannt, dass notwendig eine der 5 Kugeln (die wir sämmtlich als reell voraussetzen) nullteilig ist. Das heisst aber, dass z. B. ρ_5 und damit auch x_5 rein imaginär ist. Um reelle Coordinaten zu haben, werden wir daher $i y_5$ statt x_5 einführen, und der gleichmässigen Bezeichnung wegen $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ für $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ schreiben. Die quadratische Identitätsgleichung lautet dann:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - y_5^2 = 0.$$

Ihr steht die Bedingungsgleichung der Liniengeometrie:

$$y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + y_5^2 - y_6^2 = 0$$

gegenüber bei Einführung reeller Coordinaten. Der fragliche Unterschied in den Realitätsverhältnissen documentirt sich demnach insofern, dass im letzten Falle im Sinne der Trägheitsgesetze gleich viel positive wie negative Quadrate in der Normalform vorhanden sind, im ersteren Falle dagegen 3 positive Quadrate mehr als negative. Dies ist jedoch keineswegs als ein Nachteil der Vergleicher zu betrachten, im Gegenteil besteht in dieser Hinsicht geradezu der Vorzug derselben; indem auf der einen Seite reell wird, was auf der andern imaginär ist, wird man der geometrischen Anschauung hier zugänglich machen können, was dort nicht möglich ist und umgekehrt.

Wir wollen nun unsere obige Vergleichungstabelle noch weiter ausführen, indem wir die einander entsprechenden geometrischen Gebilde mit einem Stichwort gegenüberstellen.

Liniengeometrie	Pentasphärische Punktcoordinaten.
Es entsprechen sich	
Linearer Complex	Kugel
Specieller linearer Complex	Punktkugel
Lineare Congruenz	Kreis
Regelschaar (auf dem Hyperboloid)	Punktepaar als Schnitt dreier Kugeln
Geradenpaar (als die 4 Complexen gemeinsamen Linien)	Das Analogon fehlt hier, da wir eine Coordinate weniger haben als in der Liniengeometrie. –

Um dem wahren Ursprung der hiermit erreichten Analogie nachzugehen, wird es zweckmässig sein, auf die elementare Einführung der Liniengeometrie und der pentasphärischen Coordinaten zurückzugehen.

Was die erstere betrifft, so erteilten wir der geraden Linie zunächst 4 Coordinaten r, s, ϱ, β, denen wir als gleichberechtigte 5te Coordinate $\eta = r\sigma - s\varrho$ hinzufügten. Endlich führten wir 6 homogene Coordinaten ein durch die Gleichungen

$$r = \frac{x_1}{x_6}, \quad \sigma = -\frac{x_2}{x_6}, \quad \varrho = \frac{x_4}{x_6}, \quad \eta = \frac{x_5}{x_6}, \quad s = \frac{x_3}{x_6}$$

Die identische Relation nimmt hiernach die Gestalt an:

$$\Omega = x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 = 0$$

Die Liniengeometrie bekommt ihren specifischen Charakter nun dadurch, dass die wichtige geometrische Beziehung zwischen 2 geraden Linien, die Bedingung der Schneidens, sich in der Polarengleichung ausdrückt $\sum \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} x_i' = 0$.

Genau entsprechend ist die Einführung der pentasphärischen Punktcoordinaten. Zunächst hatten wir dem Raumpunkte 3 Coordinaten erteilt x, y, z, zu diesen nehmen wir aus Zweckmässigkeitsgründen als 4te Coordinate $\rho = x^2 + y^2 + z^2$ hinzu. Zugleich ist uns hiermit eine Bedingungsgleichung zwischen den 4 Coordinaten gegeben. Nun gehen wir wieder zur homogenen Schreibweise über, indem wir setzen

$$x = \frac{y_1}{y_5}, \quad y = \frac{y_2}{y_5}, \quad z = \frac{y_3}{y_5}, \quad \rho = \frac{y_4}{y_5}.$$

Die quadratische Relation $\rho = x^2 + y^2 + z^2$ geht dann über in die folgende:

$$\Omega = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4 y_5 = 0.$$

Hier stellen uns die Coordinaten $y_1 \ldots y_5$ noch keineswegs orthogonale pentasphärische Coordinaten dar, diese selbst erwachsen aus unsern y erst durch geeignete lineare Substitution. Aber wir wollen jetzt

gar nicht auf die orthogonalen Coordinaten hinaus; sondern gusehen, wie man mit den y, so wie sie vorliegen, operirt. Zu dem Zwecke bilden wir uns wieder die Polarengleichung der Identität $\Lambda = 0$ also:

$$0 = \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial y_i} \cdot y_i' = 2 y_1 y_1' + 2 y_2 y_2' + 2 y_3 y_3' - y_4 y_5' - y_5 y_4'$$

Diese Gleichung geht, indem wir für die Grössen y_i ihre ursprünglichen Werte einsetzen, über in

$$2 x x' + 2 y y' + 2 z z' - (x^2 + y^2 + z^2) - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

oder:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = 0.$$

Auch beim Gebrauche pentasphärischer Coordinaten bedeutet also die Polarengleichung $\sum \frac{\partial \Lambda_i}{\partial y_i} y_i' = 0$ wieder geometrisch etwas durchaus Wesentliches, nämlich, dass die Punkte x und x' eine verschwindende Entfernung haben.

Und wenn wir jetzt beides mit einander vergleichen, so finden wir:

Die Analogie zwischen Liniengeometrie u. Punktgeometrie der pentasphärischen Coordinaten basirt in letzter Hinsicht darauf, dass man beide Male eine quadratische Gleichung von nicht verschwindender Determinante zwischen homogenen Coordinaten hat, und dass die aus dieser Gleichung abzuleitende Polarengleichung jedesmal ihre gute

und einfache geometrische Bedeutung besitzt. —

Nun haben wir uns doch eine erweiterte Liniengeometrie gebildet, indem wir den linearen Complex als Raumelement wählten. Dementsprechend werden wir uns jetzt eine erweiterte Punktgeometrie der pentasphärischen Coordinaten schaffen, in denen die Kugel als Element gilt. Der involutorischen Lage zweier linearen Complexe in jenem wird dann die Orthogonalität 2er Kugeln hier entsprechen. Auf der ersteren Eigenschaft linearer Complexe baute sich uns weiter das Reciprocitätsgesetz auf, demzufolge einer eingliedrigen Schaar linearer Complexe eine 5gliedrige Schaar entsprach u.s.w. und zwar so, dass die entsprechenden Schaaren angehörenden linearen Complexe allemal zu einander involutorisch gelegen waren. Diesem Gesetze wird auch in der erweiterten Punktgeometrie der pentasphärischen Coordinaten ein analoges Reciprocitätsgesetz gegenüberstehen: Jeder einzelnen Kugel, die wir als eine eingliedrige Kugelschaar auffassen können, wird eine 4gliedrige Schaar, die Gesammtheit aller die erstere orthogonal schneidender Kugeln, entsprechen; jeder zweigliedrigen Schaar oder jedem Kugelbüschel d.h. der einfach unendlichen Mannigfaltigkeit aller der Kugeln, die einen Kreis gemein haben,

wird eine dreigliedrige Schaar, oder eine zweifach ∞ Mannigfaltigkeit von Kugeln, die zu allen Kugeln der ersten Schaar orthogonal sind, ein sogenanntes „Kugelnetz" entsprechen. Wir haben hier natürlich nur diese 2 Arten reciproker Gebilde, da wir nur mit 5 homogenen Coordinaten zu thun haben. Gemäss unseren früheren Betrachtungen der Kugel (u. des Kreises) werden wir, falls wir überhaupt von Kugelgeometrie sprechen, zwischen einer elementaren und einer höheren Kugelgeometrie unterscheiden können, je nachdem wir blos solche Beziehungen betrachten, in denen das Quadrat des Radius vorkommt, wie die Bedingung der Orthogonalität zweier Kugeln, und solche Beziehungen, in denen der Radius selbst vorkommt, wie z. B. die Bedingung für die Berührung zweier Kugeln oder das Schneiden unter beliebigen Winkel. Die Kugelgeometrie, auf welche wir hier geführt werden, ist die elementare Kugelgeometrie. Wir können daher zusammenfassend sagen: Die Liniengeometrie ist analog mit der Punktgeometrie der pentasphärischen Coordinaten im dreidimensionalen Raume, die zweifache Liniengeometrie ist analog mit der elementaren Kugelgeometrie im dreidimensionalen Raume. Die Beziehungen zwischen beiden Geometrien kön-

nen wir nun noch klarer zum Ausdruck bringen, wenn wir nur einen 4 dimensionalen Punktraum herausziehen wollen und in ihm eine Kugelgeometrie konstruiren. Alsdann werden wir für die Festlegung des Grundgebildes, des Elementes, in beiden Fällen die gleiche Zahl der Coordinaten nötig haben, und die Analogie verwandelt sich infolge dessen, von den Realitätsverhältnissen abgesehen, in eine volle Identität. Wir sagen demnach:
Die Liniengeometrie ist identisch mit der Punktgeometrie im 4 dimensionalen Raume beim Gebrauche hexasphärischer Coordinaten; erweiterte Liniengeometrie ist identisch mit der hier anschliessenden elementaren Kugelgeometrie des 4 dimensionalen Raumes
Diese Art der Parallelisirung ist die Grundlage, von der ich in Ann. V 1871 in meiner Arbeit: Ueber Liniengeometrie u. metrische Geometrie ausgegangen bin. Natürlich habe ich mich dort nicht auf die ersten Sätze beschränkt, wie ich sie soeben angeführt habe, sondern es werden daselbst beispielsweise Orthogonalsysteme des 4 dimensionalen Raumes betrachtet und deren liniengeometrische Analoga gesucht. Man kann sagen, dass es sich darum handelt, zwischen meinen Liniengeome-

schen Untersuchungen von 1869 und Darboux's Untersuchungen die Verbindung herzustellen.
Nun hatte aber vorher Lie diesen Beziehungen eine andere Seite abgewonnen, die er ebenfalls in Annalen V publicirte in einer Arbeit, die ich im folgenden noch oft zu nennen haben werde. Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen.
Hier entwickelt Lie „höhere Kugelgeometrie des dreidimensionalen Raumes", in deren Aufgaben der Radius selbst vorkommt, nicht nur sein Quadrat. Ist bei mir die Liniengeometrie in Parallele gestellt mit der Punktgeometrie des R_4, so zeigt Lie, dass Liniengeometrie ebensowohl mit der höheren Kugelgeometrie des R_3 verglichen werden kann.
Die naturgemässe Verbindung zwischen der Lie'schen Auffassung und meiner eigenen ist dann die, dass die Punktgeometrie des R_4 und die höhere Kugelgeometrie des R_3 unmittelbar in Verbindung gesetzt werden können, wie wir bald noch näher ausführen. —
Wollen wir also jetzt die Lie'sche Kugelgeometrie des Näheren kennen lernen, wobei wir unsern Anfangspunkt wieder durchaus elementar wählen.

Lie's Kugelgeometrie

Die Gleichung der Kugel lautet in gewöhn- [Di. 13. XII. 92
lichen rechtwinkligen Coordinaten bekanntlich:

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+C=0.$$

Die Kugel ist daher bestimmt durch die Grössen α, β, γ, C. Wir nehmen als 5te Grösse noch den Radius r hinzu, der die Beziehung liefert: $r^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-C$. Der Grundgedanke ist nun, diese 5 Grössen $\alpha\ \beta\ \gamma\ C\ r$ nebeneinander als Coordinaten der Kugel anzusehen; dieselben sind nicht unabhängig von einander, sondern an die eben genannte quadratische Gleichung gebunden. Um nun homogene Schreibweise einzuführen, setzen wir:

$$\alpha=\frac{\xi}{\nu},\ \beta=\frac{\eta}{\nu},\ \gamma=\frac{\zeta}{\nu},\ r=\frac{\lambda}{\nu},\ C=\frac{\mu}{\nu}$$

s.d. dass jetzt $\xi\ \eta\ \zeta\ \lambda\ \mu\ \nu$ die <u>homogenen Coordinaten der Kugel</u> sind. Zwischen denselben besteht dann gemäss der Gleichung $r^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-C$ die quadratische Bedingungsgleichung:

$$\Phi=0=\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\lambda^2-\mu\nu.$$

Es wird nach den Erläuterungen der letzten Stunde zunächst unsere Aufgabe sein, die letzte Form im Sinne der allgemeinen Theorie der quadratischen Formen, ins Besondere des Trägheitsgesetzes, zu untersuchen. Die Determinante derselben ergiebt sich als:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sigma & \sigma & \sigma & \sigma & \sigma \\ \sigma & 1 & \sigma & \sigma & \sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma & 1 & \sigma & \sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma & \sigma & 1 & \sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma & \sigma & \sigma & \sigma & -\frac{1}{2} \\ \sigma & \sigma & \sigma & \sigma & -\frac{1}{2} & \sigma \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$, d. h. unsere quadratische Form hat eine nicht verschwindende Determinante.

Wir setzen nun weiter: $\mu = \mu' + \nu'$, $\nu = \mu' - \nu'$, während wir die 4 ersten Variabeln unverändert beibehalten. Dann geht die fragliche Form über in

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \lambda^2 - \mu'^2 + \nu'^2.$$ Dies besagt: <u>die Vorzeichen der einen Art sind um 2 zahlreicher als die der andern Art</u>; es kommt nicht darauf an, ob wir 4 positive und 2 negative Glieder oder umgekehrt zählen, da wir die Form $= 0$ zu setzen haben. Lassen Sie uns des besseren Ueberblicks wegen die verschiedenen quadratischen Formen mit 6 Veränderlichen, mit denen wir bisher zu thun hatten in Rücksicht auf das Trägheitsgesetz überblicken.

In der <u>Liniengeometrie</u> bestand die nur aus quadratischen Gliedern zusammengesetzte Form aus 3 positiven u. 3 negativen Gliedern (natürlich bei Beschränkung auf reelle Substitutionen).

<u>In der Punktgeometrie des 4 dimensionalen Raumes</u>, der wir hexasphärische Coordinaten zu Grunde legen, haben wir eine Form mit 5 positiven u.

einem negativen Gliede, [indem auch hier wie in der pentasphärischen Geometrie des R_3 nur eine der sechs reell vorausgesetzten Fundamentalkugeln nullteilig ist].

In Lie's Kugelgeometrie des R_3 dagegen hat die Form, wie wir soeben sahen, 4 positive und 2 negative Glieder.

Es sind dreierlei Arten von Geometrie, welche im algebraischen Sinne darin übereinstimmen, dass sie 6 homogene Veränderliche und eine quadratische Gleichung zwischen ihnen mit nicht verschwindender Determinante zu Grunde legen, unterscheiden sich also, was Realität angeht darin, dass die quadratischen Gleichungen im Sinne des Trägheitsgesetzes zu 3 verschiedenen Typen gehören.*)

Wir müssen nun bemerken, dass es bei der Wahl der Coordinaten $\alpha\ \beta\ \gamma\ C\ r$ für die Kugel gleichgültig ist, ob wir das positive oder negative Vorzeichen dem Radius r beilegen; beidemal werden wir auf dieselbe Kugel geführt. Da es nun unzweckmässig sein würde, dem Radius etwa die Beschränkung grösser als Null zu sein aufzuerlegen, so erscheint in der Lie'schen Kugelgeometrie jede Kugel doppelt, für positiven wie negativen Wert

*) Der 4te denkbare Typus (eine quadratische Form mit 6 übereinstimmenden Zeichen) fehlt; würde man auch für ihn eine geeignete geometrische Interpretation finden können?

des r.*) Erinnern wir uns nun der gewöhnlichen Bedingungen für die Beziehung zweier Kugeln, für die senkrechte Durchdringung oder das Schneiden derselben unter beliebigen Winkel. 1) Indem die Elementargeometrie r und r' immer als positiv denkt, setzt sie, was das erstere betrifft, die Bedingung der Berührung in die folgende Formel:

$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2=(r\mp r')^2,$$

wo das doppelte Vorzeichen sich auf den Fall der verschiedenartigen Berührung bezieht, und zwar bezeichnet das negative Vorzeichen die innere das positive Vorzeichen die äussere Berührung der beiden Kugeln.**) Indem wir uns aber frei halten, die Radien auch als negative Grössen zu betrachten, können wir beide Fälle der Berührung in die eine Formel zusammenfassen:

$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2=(r-r')^2,$$

wo dann innere Berührung statt hat, wenn r und r' im Vorzeichen übereinstimmen, äussere Berührung, wenn sie im Vorzeichen verschieden sind.

*) Laguerre hat um 1880 herum diesen Gedanken nach verschiedenen Richtungen weiter verfolgt, er bezeichnet die Kugel mit dem mit besonderem Vorzeichen genommenen Radius als demisphère oder sphère orientée

**) Inverse Berührung soll heissen, dass irgend eine der beiden Kugeln im Inneren der anderen liegt.

2) Die Bedingung, dass 2 Kugeln sich senkrecht durchdringen, lautet einfach:

$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2=r^2+r'^2.$$

Diese Bedingung hat elementaren Charakter, so dass man von dem Vorzeichen der Radien gar nicht zu sprechen braucht.

3) Die Bedingung, dass 2 Wurzeln den Winkel φ einschliessen, hat die Gestalt:

$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi.$$

Wir wollen hier wieder das doppelte Zeichen im letzten Gliede schreiben, je nachdem man den Winkel φ in der einen oder der andern Weise rechnen will; doch nehmen wir dieses in das Vorzeichen, das man den Radien geben will, mit hinein.

Das Schöne dieser Bedingungen besteht nun wieder darin, dass man dieselben zu der Bedingungsgleichung der homogenen Kugelcoordinaten in einfache Beziehung setzen kann.

Ad 1. Die Bedingung der Berührung zweier Kugeln können wir umformen in:

$$2\alpha\alpha'+2\beta\beta'+2\gamma\gamma'-2rr'-\overbrace{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2)}^{C}-\overbrace{(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2-r'^2)}^{C'}=0$$

woselbst wir für die Klammerausdrücke die Grössen C und C' einführen. Finden wir dann noch die homogene

Schreibweise an, so ergiebt sich die Form:

$$2\xi\xi' + 2\eta\eta' + 2\zeta\zeta' - 2\lambda\lambda' - \mu\nu' - \mu'\nu = 0.$$

Nun sehen wir hierin gerade die Polarenbildung unserer quadratischen Form Φ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\xi' + \ldots\ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\nu' = 0$$

In Worten besagt dies Resultat: Das Verschwinden der in Bezug auf die Fundamentalform Φ genommenen Polare besagt, dass die beiden Kugeln sich berühren. Denken wir an die analogen Verhältnisse der Liniengeometrie zurück, so zeigt sich, dass die Berührung zweier Kugeln in der Kugelgeometrie für die analytische Behandlung genau dieselbe fundamentale Stelle einnimmt, wie in der Liniengeometrie das Schneiden zweier geraden Linien.

Ad 3. Nehmen wir den dritten Fall vorweg, die Bedingungsgleichung für das Schneiden zweier Kugeln unter bestimmten Winkel, so bekommen wir bei Einführung homogener Coordinaten:

aus $2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' + \gamma\gamma' - 2rr'\cos\varphi - C - C' = 0$, die Gl.:

$$(2\xi')\cdot\xi + (2\eta')\cdot\eta + (2\zeta')\cdot\zeta - (2\lambda'\cos\varphi)\cdot\lambda - (\nu')\cdot\mu - (\mu')\cdot\nu = 0.$$

Indem die 6 Coefficienten dieser linearen Gleichung zwischen den 6 homogenen Coordinaten von einander völlig unabhängig sind, entnehmen wir hieraus den Satz: Die Bedingung, dass 2 Kugeln sich unter einem Winkel φ schneiden, gibt für die einzelne Kugel die allgemeine

[illegible] Gleichung zwischen ihren 6 Coordinaten.
[illegible] Bedingung, dass 2 Kugeln sich rechtwinklig [illegible] geht aus der letzten hervor, indem wir $\cos\varphi = 0$ [illegible]. Es ändert sich alsdann in der linearen Gleichung nichts Wesentlicher; es fällt nur das eine Glied derselben fort. Wir müssen dieses ausdrücklich hervorheben, da ja in der elementaren Kugelgeometrie der R_3 die gemeinte Bedingung von fundamentaler Bedeutung war, was hier nicht mehr der Fall ist.
Haben wir uns solchergestalt über diese Elementaraufgaben Klarheit verschafft, so können wir nunmehr mit Sie nach Analogie der Liniengeometrie von linearen Complexen und Congruenzen u. s. w. der Kugelgeometrie sprechen. Wir werden sehen, dass wir in moderner Auffassung gerade auf diejenigen Figuren geführt werden, die, wie wir früher lernten, von den Geometern in den ersten Decennien des Jahrhunderts betrachtet wurden. Stellen wir die Resultate der Liniengeometrie und der Kugelgeometrie geradezu wieder einander gegenüber:

Liniengeometrie	Kugelgeometrie
1) Unter einem linearen Liniencomplex haben wir ∞^3-fach ∞ viele Linien zu ver-	Dem tritt gegenüber der lineare Kugelcomplex als die Gesammtheit von ∞^3 Kugeln, welche

stehen, die in bekannter Weise zu einem Nullsystem in Beziehung stehen.

Als Unterart ergab sich der specielle Liniencomplex, als die ∞^3 Treffgeraden einer festen Geraden

eine feste Kugel unter gegebenem Winkel schneiden.

Als specieller Kugelcomplex sind analog ∞^3 Berührungskugeln einer festen Kugel anzusehen. (Hier zählen alle Kugeln mit, diejenigen, welche die feste Kugel von innen oder von aussen berühren, nur müssen wir letztere mit negativem Vorzeichen von r einführen, vorausgesetzt, dass der Radius der festen Kugel > 0 genommen ist).

2) Die lineare Congruenz besteht aus der Gesammtheit aller geraden Linien, welche 2 feste Geraden treffen, mögen letztere reell, oder imaginär sein, in eine Leitlinie zusammenfallen oder gar unbestimmt werden. Diese Geraden bilden eine 2fach unendliche Mannigfaltigkeit.

Die lineare Kugelcongruenz besteht dem analog aus ∞^2 Berührungskugeln zweier Leitkugeln. Hier aber ist noch ein Unterschied zu machen. Bei gegebenen 2 Leitkugeln gibt es noch 2 Congruenzen. Die Kugeln der einen Congruenz berühren beide Leitkugeln gleichartig [also von

aussen, oder von innen], die der andern Congruenz ungleichartig [die eine von aussen, die andere von innen resp. umgekehrt].

3) Als die 3 linearen Complexen gemeinsamen Geraden haben wir die Regelschaar erkannt, welche die eine Erzeugung eines einschaligen Hyperboloids bildet. Die Linien der andern Erzeugung des Hyperboloids bilden die ∞ vielen „Leitlinien," und zwar schneiden sämmtliche Geraden der ersten Art sämmtliche Geraden der zweiten Art.

Drei lineare Gleichungen der Kugelgeometrie geben eine Kugelschaar als einfach unendliche Mannigfaltigkeit aller der Kugeln, die eine ebenfalls einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Leitkugeln berühren. Wählt man drei Leitkugeln aus, so ist durch sie das ganze Gebilde erst vierdeutig bestimmt.

Die erste Kugelschaar hat nun eine Röhrenfläche zur Enveloppe, die auch von der zweiten Schaar umhüllt wird. Man sieht leicht, dass wir zu der doppelten Erzeugung der „Dupinschen Cyclide" geführt werden.

In dieser Gegenüberstellung von Hyperboloid und Dupin-

scher Cyclide" findet der Uebergang von der Liniengeometrie zur Lie'schen Kugelgeometrie seinen prägnantesten Ausdruck!

Wir könnten nun auch von quadratischen Complexen in der Kugelgeometrie sprechen, könnten den linearen Kugelcomplex als Raumelement einführen und uns fragen, was es heisst, wenn 2 lineare Kugelkomplexe involutorisch liegen u. s. w. Wir übergehen dieses und wenden uns vielmehr zu der überaus interessanten und wichtigen Anwendung, die Lie von seiner Kugelgeometrie auf die Differentialgeometrie der Flächen gemacht hat. In der Flächengeometrie haben wir seiner Zeit die Hauptsangentencurven (oder Asymptotenlinien) und Krümmungscurven erwähnt. Der Lie'sche Gedanke, den wir meinen, lässt sich nun kurz so angeben, dass die beiden Arten der Curven auf den Flächen ganz mit denselben Formeln behandelt werden können, nur sind dieselben das eine Mal in der Liniengeometrie, das andere Mal in der Kugelgeometrie zu deuten. Dieser Satz ist also eine der glänzendsten Entdeckungen der Geometrie in den letzten Decennien anzusehn.

Um diese Beziehung einsehen zu können, werden wir uns zunächst mit den Krümmungscurven auf den Flächen etwas vertrauter machen müssen, als es bisher geschehen ist. Wir haben bisher die Krümmungs-

richtungen in einem Punkte der Fläche von den Krümmungen der Normalschnitte der Fläche aus definiert, für die jene Richtungen ein Maximum und Minimum der Krümmung bedeuten. Nun gibt es jedoch noch eine andere Definition der Krümmungsrichtungen, welche sich auf die Construction der Normalen in den Nachbarpunkten stützt. Die Normale in einem Nachbarpunkte wird im allgemeinen zu der ursprünglichen Normalen windschief verlaufen; wir können jedoch die Forderung aufstellen, dass wir zu einem solchen Nachbarpunkte übergehen sollen, dessen Normale die ursprüngliche Normale trifft.

Da zeigt sich dann, dass dies nur bei den Nachbarpunkten auf den Krümmungslinien eintrifft.

Lassen Sie uns dieses mit analytischer Rechnung näher ausführen. Wir nehmen den ausgewählten Flächenpunkt zum Anfangspunkt eines Coordinatensystems und legen letzteres so, dass die z-Axe mit der Flächennormale, die x u. y Axe mit der Richtung der Krümmungslinien der Flächenpunktes zusammenfallen. Denken wir uns dann die z Coordinaten der Fläche nach Potenzen von x u. y entwickelt, so wird die Reihe beginnen müssen mit:

$$z = a x^2 + c y^2 + \ldots \text{ Glieder höherer Ordnung.}$$

Das Glied mit xy wird ebenso wie die Glieder erster Ord-

nung fortfallen, da ja die x und y- Axen die Symmetrieaxen der Dupin'schen Indicatrix sind. Ist nun die Flächengleichung in der Gestalt $f(x,y,z)=0$ gegeben, so lautet die Gleichung der Normalen in einem beliebigen Punkte $x'y'z'$:

$$\frac{x-x'}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y-y'}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{z-z'}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

woselbst nach Ausführung der Differentiation im Nenner für xyz die Coordinaten des Punktes $x'y'z'$ einzusetzen sind. Wenden wir diese Gleichungen auf die obige Entwicklung für z an, so ergibt sich:

$$\frac{x-x'}{2a\,x'+\cdots} = \frac{y-y'}{2c\,y'+\cdots} = z'-z.$$

Wenn wir nun jetzt den Punkt $x'y'z'$ als einen Nachbarpunkt zu dem ausgewählten Flächenpunkt wählen, so sind die Glieder höherer Ordnung zu vernachlässigen, und unsere Gleichungen lauten demnach einfach:

$$\frac{x-x'}{2a\,x'} = \frac{y-y'}{2c\,y'} = z'-z.$$

Nun ist die Frage, unter welcher Bedingung diese Normale die z Axe d.h. die ursprüngliche Normale trifft. Setzen wir $x=y=0$ ein, so erhalten wir:

$$z = \frac{x'}{2a\,x'} = \frac{y'}{2c\,y'}.$$

[illegible]

[illegible] von einander [illegible] entweder $x = 0$ [illegible] $z = \frac{1}{2c}$ [illegible] $y' = 0$ ist, [illegible] $z = \frac{1}{2a}$

[illegible] nur ge- [illegible] in [illegible] als [illegible] $z = \frac{1}{2c}$ oder [illegible] $z = \frac{1}{2a}$ [illegible] genannt [illegible] ve- [illegible] Konstruktion [illegible] Flächen [illegible] Fläche [illegible] Flächen [illegible] Flächen [illegible]

auf der Kugel sind unbestimmt. In der That bilden ja die Normalen längs einer beliebigen Curve stets eine Kegelfläche, d.h. also eine abwickelbare Fläche.

2) Sie werden sich erinnern, dass wir die Röhrenflächen durch die Bewegung einer Kugel erzeugt hatten. Die Kugel berührt in ihren aufeinanderfolgenden Lagen die Röhrenflächen jedesmal längs desjenigen Kreises, in welchem sie ihre Nachbarkugel durchsetzt. Hieraus aber ergibt sich folgender Satz: Auf einer Röhrenfläche, d.h. einer Fläche, welche von einer Schaar von Kugeln umhüllt wird, kennt man immer die eine Reihe von Krümmungscurven, das sind diejenigen Kreise, in denen sich die auf einander folgenden Kugeln der Schaar durchdringen und längs deren die Röhrenfläche von der einzelnen Kugel berührt wird. Da nun, wie wir wissen, die Dupinsche Cyclide ein doppelter Sinn Röhrenfläche ist, so erkennen wir, dass auf ihr beide Schaaren von Krümmungscurven durch Kreise gebildet werden, wie wir früher ohne Beweis anführten.

Diese neue Definition der Krümmungslinien müssen wir nun kugelgeometrisch auffassen. Wir gehen wieder davon aus, dass wir die ξ-Coordinaten der Fläche im Punkte O unter Zugrundelegung

aussen, oder von innen], die der andern Congruenz ungleichartig [die eine von aussen, die andere von innen resp. umgekehrt].

3) Also die 3 linearen Complexen gemeinsamen Geraden haben wir die Regelschaar erkannt, welche die eine Erzeugung einer einschaligen Hyperboloids bildet. Die Linien der andern Erzeugung der Hyperboloide bilden die ∞ vielen „Leitlinien," und zwar schneiden sämmtliche Geraden der ersten Art sämmtliche Geraden der zweiten Art.

Drei lineare Gleichungen der Kugelgeometrie geben eine Kugelschaar als einfach unendliche Mannigfaltigkeit aller Kugeln, die eine Developpable umhüllen. Die einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Leitkugeln berühren. Wählt man drei Leitkugeln aus, so ist durch sie das ganze Gebilde erst vierdeutig bestimmt.

Die erste Kugelschaar hat nun eine Röhrenfläche zur Enveloppe, die auch von der zweiten Schaar umhüllt wird. Man sieht leicht, dass wir zu der doppelten Erzeugung der „Dupinschen Cyclide" geführt werden.

In dieser Gegenüberstellung von Hyperboloid und Dupin-

scher Cyclide" findet der Uebergang von der Liniengeometrie zur Lie'schen Kugelgeometrie seinen prägnantesten Ausdruck!

Wir können nun auch von quadratischen Complexen in der Kugelgeometrie sprechen, können den linearen Kugelcomplex als Raumelement einführen und uns fragen, was es heisst, wenn 2 lineare Kugelkomplexe involutorisch liegen u. s. w. Wir übergehen dieses und wenden uns vielmehr zu der überaus interessanten und wichtigen Anwendung, die Lie von seiner Kugelgeometrie auf die Differentialgeometrie der Flächen gemacht hat. In der Flächengeometrie haben wir seiner Zeit die Hauptstangentencurven (oder Asymptotenlinien) und Krümmungscurven erwähnt. Der Lie'sche Gedanke, den wir meinen, lässt sich nun kurz so angeben, dass die beiden Arten der Curven auf den Flächen ganz mit denselben Formeln behandelt werden können, nur sind dieselben das eine Mal in der Liniengeometrie, das andere Mal in der Kugelgeometrie zu deuten. Dieser Satz ist also eine der glänzendsten Entdeckungen der Geometrie in den letzten Decennien anzusehn.

Um diese Beziehung einsehen zu können, werden wir uns zunächst mit den Krümmungscurven auf den Flächen etwas vertrauter machen müssen, als es bisher geschehen ist. Wir haben bisher die Krümmungs-

richtungen in einem Punkte der Fläche von den Krümmungen der Normalschnitte der Fläche aus definirt, für die jene Richtungen ein Maximum und Minimum der Krümmung bedeuten. Nun gibt es jedoch noch eine andere Definition der Krümmungsrichtungen, welche sich auf die Construction der Normalen in den Nachbarpunkten stützt. Die Normale in einem Nachbarpunkte wird im allgemeinen zu der ursprünglichen Normalen windschief verlaufen; wir können jedoch die Forderung aufstellen, dass wir zu einem solchen Nachbarpunkte übergehen sollen, dessen Normale die ursprüngliche Normale trifft.

Da zeigt sich dann, dass dies nur bei den Nachbarpunkten auf den Krümmungslinien eintrifft.

Lassen Sie uns dieses mit analytischer Rechnung näher ausführen. Wir nehmen den ausgewählten Flächenpunkt zum Anfangspunkt eines Coordinatensystems und legen letzteres so, dass die z-Axe mit der Flächennormale, die x u. y Axe mit der Richtung der Krümmungslinien des Flächenpunktes zusammenfallen. Denken wir uns dann die z Coordinaten der Fläche nach Potenzen von x u. y entwickelt, so wird die Reihe beginnen müssen mit:

$$z = a x^2 + c y^2 + \ldots \text{Glieder höherer Ordnung}.$$

Das Glied mit xy wird ebenso wie die Glieder erster Ord-

nung fortfallen, da ja die x und y- Axen die Symmetrieaxen der Dupin'schen Indicatrix sind. Ist nun die Flächengleichung in der Gestalt $f(x,y,z)=0$ gegeben, so lautet die Gleichung der Normalen in einem beliebigen Punkte $x'y'z'$:

$$\frac{x-x'}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y-y'}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{z-z'}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

woselbst nach Ausführung der Differentiation im Nenner für xyz die Coordinaten der Punktes $x'y'z'$ einzusetzen sind. Wenden wir diese Gleichungen auf die obige Entwicklung für z an, so ergibt sich:

$$\frac{x-x'}{2a\,x'+\cdots} = \frac{y-y'}{2c\,y'+\cdots} = z'-z.$$

Wenn wir nun jetzt den Punkt $x'y'z'$ als einen Nachbarpunkt zu dem ausgewählten Flächenpunkt wählen, so sind die Glieder höherer Ordnung zu vernachlässigen, und unsere Gleichungen lauten demnach einfach:

$$\frac{x-x'}{2a\cdot x'} = \frac{y-y'}{2c\cdot y'} = z'-z.$$

Nun ist die Frage, unter welcher Bedingung diese Normale die z Axe d. h. die ursprüngliche Normale trifft. Setzen wir $x=y=0$ ein, so erhalten wir:

$$z = \frac{x'}{2a\,x'} = \frac{y'}{2c\,y'}.$$

Diese Gleichungen können, da a und c von einander verschieden sind, nur bestehen, wenn entweder $x' = 0$ ist, dann wird $Z = \frac{1}{2c}$, oder wenn $y' = 0$ ist, dann wird $Z = \frac{1}{2a}$.

Es wird daher die ursprüngliche Normale nur geschnitten, wenn wir zu einem Nachbarpunkte in der Richtung der Krümmungslinien übergehen; als Schnitt ergiebt sich entweder der Punkt $Z = \frac{1}{2c}$ oder der Punkt $Z = \frac{1}{2a}$, welche die Krümmungsmittelpunkte der bezüglichen Normalschnitte genannt werden. Haben wir so unsere obigen Angaben verificirt, so können wir jetzt leicht die Konstruktion der Krümmungslinien angeben. Im allgemeinen werden die Normalen der Flächen längs einer beliebigen Curve eine windschiefe geradlinige Fläche bilden. Die Krümmungscurven auf einer Fläche haben aber die charakteristische Eigenschaft, dass die in ihren Punkten errichteten Flächennormalen eine abwickelbare Fläche bilden, da je 2 aufeinanderfolgende Erzeugende derselben sich schneiden. Hieran knüpfen wir, vorab einige weitere orientirende Bemerkungen: 1) Auf der Kugel ist offenbar jede beliebige Curve eine Krümmungslinie, oder anders ausgedrückt, die Krümmungslinien

auf der Kugel sind unbestimmt. In der That bilden ja die Normalen längs einer beliebigen Curve stets eine Kegelfläche, d.h. also eine abwickelbare Fläche.

2) Sie werden sich erinnern, dass wir die Röhrenflächen durch die Bewegung einer Kugel erzeugt hatten. Die Kugel berührt in ihren aufeinanderfolgenden Lagen die Röhrenflächen jedesmal längs desjenigen Kreises, in welchem sie ihre Nachbarkugel durchsetzt. Hieraus aber ergibt sich folgender Satz: Auf einer Röhrenfläche, d.h. einer Fläche, welche von einer Schaar von Kugeln umhüllt wird, kennt man immer die eine Reihe von Krümmungscurven, das sind diejenigen Kreise, in denen sich die auf einander folgenden Kugeln der Schaar durchdringen und längs deren die Röhrenfläche von der einzelnen Kugel berührt wird. Da nun, wie wir wissen, die Dupinsche Cyclide im doppelten Sinne Röhrenfläche ist, so erkennen wir, dass auf ihr beide Schaaren von Krümmungscurven durch Kreise gebildet werden, wie wir früher ohne Beweis anführten.

Diese neue Definition der Krümmungslinien müssen wir nun kugelgeometrisch auffassen. Wir gehen wieder davon aus, dass wir die ξ-Coordinaten der Fläche im Punkte O unter Zugrundelegung

des speciellen Coordinatensystems in die Reihe entwickeln konnten: $z = a x^2 + c y^2 + \ldots$ Glieder höherer Ordnung. Wir wollen nun sämmtliche Kugeln betrachten, die in dem ausgewählten Punkte O die Fläche berühren. Ihre Gleichung wird sein: $x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$ oder $x^2 + y^2 + z^2 - 2rz = 0$. Entwickeln wir auch aus dieser Gleichung z nach Potenzen von x und y, so kommt: $z = \frac{x^2 + y^2}{2r} + \ldots$ Glieder höherer Ordnung, und wenn wir beide Reihen für z für z einander gleich setzen, so ergiebt sich:

$$0 = (2ar - 1)x^2 + (2cr - 1)y^2 + \ldots$$ Glieder höherer Ordnung. Diese Gleichung stellt uns die Projection der Schnittcurve unserer Fläche mit der Kugel auf die xy-Ebene, d. h. die Tangentialebene der Fläche im Punkte O, dar, und wir sehen:

Eine jede dieser Berührungskugeln schneidet die Fläche in der Nähe des Punktes O in einer Kurve, die im Punkte O einen Doppelpunkt hat, dessen beide Aeste symmetrisch gegen die Richtungen der Krümmungscurven liegen. Natürlich können diese beiden Aeste reell oder imaginär sein, so dass wir einen gewöhnlichen Doppelpunkt oder einen isolirten Doppelpunkt vor uns haben können. Nun wollen wir als Mittelpunkte der Berührungskugeln insbesondere die Krümmungsmittelpunkte wählen und

dem entsprechend $r = \frac{1}{2a}$ oder $= \frac{1}{2c}$ setzen. Die Projectionscurve wird dann z. B. für $r = \frac{1}{2a}$: $0 = (\frac{c}{a} - 1) y^2 + \ldots$
analog ergibt sich für $r = \frac{1}{2c}$: $0 = (\frac{a}{c} - 1) x^2 + \ldots\ldots$
Diese Gleichungsform lässt aber auf das Auftreten einer Spitze im Punkte O für die Curven schliessen, die Spitzentangente ist die x resp y Axe. Das ergibt uns den Satz, dass diese speciellen Kugeln die Fläche in einer Curve mit Spitze schneiden. Hiermit tritt hervor, dass unsere Kugeln die Fläche noch in einem Nachbarpunkte berühren, der in der Richtung der Krümmungslinien liegt, wie dies unser Theorem von der Normale des Nachbarpunktes verlangt. Unsere so bestimmten Kugeln wollen wir in der Folge die Hauptkugeln für unsern Flächenpunkt nennen. Betrachten wir nun die Aufeinanderfolge der Punkte einer Krümmungslinie und construiren in jedem derselben die zu dieser Krümmungslinie gehörigen Hauptkugeln, so wird in der ganzen Reihe der Kugeln jede derselben die nachfolgende in dem dieser letzteren zugehörigen Flächenpunkte berühren. Dieser letztere aber wird längs der Krümmungslinie über die Fläche hinwandern. Wir haben hier ein geometrisches Gebilde vor uns, das in der Kugelgeometrie dieselbe Bedeutung hat, wie die abwickelbaren Flächen in der Liniengeometrie:
Sowie die benachbarten Erzeugenden einer Linien-

Fläche im allgemeinen windschief gegen einander stehen, es aber eine besondere Gattung von Linienflächen giebt, bei denen sie sich schneiden, nämlich die developpablen Flächen, so haben die aufeinander folgenden Kugeln einer Kugelserie im allgemeinen keinen Kontakt, können sich aber im speciellen Falle in stetiger Aufeinanderfolge berühren. Wir verabreden für unsere Betrachtungen eine solche Kugelschaar eine Kugelserie von besonderem Charakter zu nennen. [Man denke etwa an die analogen Verhältnisse bei Kreisen einer Ebene. Die auf einander folgenden Krümmungskreise irgend welcher Curve bilden eine Kreisserie „von besonderem Charakter".] Hier nun knüpft die kugelgeometrische Auffassung der Krümmungscurven an: Das Problem der Krümmungscurven einer gegebenen Fläche wird man so auffassen können, dass man erstens die zweifach unendlich vielen Hauptkugeln berechnet, welche zu den verschiedenen Punkten der gegebenen Fläche gehören, und zweitens innerhalb der Mannigfaltigkeit der Hauptkugeln solche Serien sucht, welche die charakteristische Eigenschaft haben. Von hier aus ist es dann ganz einfach, die Analogie zum Problem der Haupttangentencurven zu überblicken:

Krümmungscurven	Hauptlangentencurven.
In einem beliebigen Flächenpunkt gibt es ein die Fläche berührender Kugelbüschel, in demselben sind 2 Hauptkugeln ausgezeichnet, deren jede noch in einem Nachbarpunkte berührt; die also, wie wir kurz sagen können, 2 Nachbarbüscheln angehören	In einem beliebigen Flächenpunkte existirt ein Tangentenbüschel, in demselben sind 2 Hauptlangenten ausgezeichnet, deren jede noch einem Nachbarbüschel angehört.
Aufgabe: Aus ihnen charakteristische Serien von Hauptkugeln zu bilden.	Aufgabe. Die Hauptlangenten so aneinander zu reihen, dass eine developpable Fläche entsteht.

Wir sehen, rechts ist stets ganz derselbe Schritt liniengeometrisch ausgeführt, der links kugelgeometrisch gemacht ist.

Hiermit erkennen wir also, dass das Problem der Krümmungscurven in der Kugelgeometrie in der That dieselbe Stellung einnimmt wie das Problem der Hauptlangenten für die Liniengeometrie. Erst im weiteren Verlaufe dieser Vorlesung werden wir Gelegenheit nehmen den so in seinem geometrischen Grundgedanken gefassten Lie'schen Satz in bestimmten analy-

lischen Formeln auszugestalten.

Wir führen noch kurz den bereits ausgesprochenen Gedanken aus, dass zwischen der höheren Kugelgeometrie des R_3 und der metrischen Punktgeometrie des R_4 eine unmittelbare Beziehung bestehen muss. Die Sache ist ganz einfach. Bezeichnen wir mit α, β, γ, r und $\alpha', \beta', \gamma', r'$ Mittelpunkt und Radius zweier Kugeln im R_3, so lautet die fundamentale Bedingung für die Berührung beider Kugeln: [Do. 15. XII. 92]

$$(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2 = (r - r')^2.$$

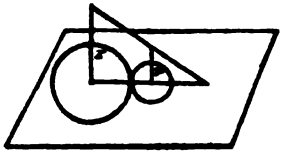
Wählen wir nun als Abbild dieser Kugeln diejenigen Punkte des R_4, welche die rechtwinkligen Coordinaten $\alpha, \beta, \gamma, ir$ resp. $\alpha', \beta', \gamma', ir'$ haben, so wird der gemeinte Zusammenhang beider Geometrien sich darin aussern, dass die obige Bedingung, der wir die Form $(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2 + (ri - r'i)^2 = 0$ erteilen, auch in der metrischen Punktgeometrie des R_4 nicht minder wie in der Kugelgeometrie des R_3 ihre gute geometrische Bedeutung hat; sie drückt nämlich aus, dass die beiden Punkte eine verschwindende Entfernung haben.

Der analoge Uebergang kann natürlich auch von den Kreisen der Ebene zu den Punkten der R_3 gemacht werden. Wir fassen dem Kreis, dessen Mittelpunkt und Radius durch die Grössen α, β, r gegeben sein möge,

im R_3 den Punkt mit den Coordinaten $\alpha, \beta, i r$ entsprechen. Um uns diesen Übergang anschaulich vorzustellen, denken wir uns im Mittelpunkte des Kreises auf seiner Ebene, der $x y$-Ebene, das Lot errichtet und vom Fusspunkt aus die Strecke $i r$ abgetragen; der Endpunkt dieser Abtragung stellt dann den unserm Kreise entsprechenden Raumpunkt vor. Dem doppelten Vorzeichen von r entsprechend erhalten wir natürlich für jeden Kreis zwei Raumpunkte.

Diese Abbildung der Kreise einer Ebene auf die Punkte des R_3 haben schon Chasles und Mobius benutzt (in den fünfziger Jahren), um reelle Kreise mit imaginären Radien der anschaulichen Behandlung zu unterwerfen.

Doch können wir so auch dem Kreise α, β, r der Ebene den Raumpunkt mit den rechtwinkligen Coordinaten α, β, r entsprechen lassen. Die fundamentale Bedingung $(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2-(r-r')^2=0$ drückt dann aber nicht mehr aus, dass die Raumpunkte eine verschwindende Entfernung haben, sondern dass ihre Verbindungsgerade unter 45° gegen die z-Axe geneigt ist, also einer Erzeugenden der Kegels $x^2+y^2-z^2=0$ parallel ist.



Der hiermit bezeichnete Gedanke ist von Fiedler seinem Buche über „Cyclographie" zu Grunde gelegt und findet dort seine Konsequente

Ausbildung.

Nun habe ich noch einiges darüber zu sagen, wie die Lie'sche Kugelgeometrie im geometrischen Publicum aufgenommen ist. Wir müssen leider die Thatsache konstatiren, dass dieselbe zwar bei den französischen Geometern Anklang gefunden hat, dass dagegen die deutschen Geometer völlig an ihr vorbeigegangen sind. Insbesondere sind von ihnen die interessanten Entwicklungen zur Differentialgeometrie, die sich an die Lie'sche Kugelgeometrie knüpfen, wie die Beziehung zwischen Hauptkurventen- und Krümmungscurven durchaus bei Seite gelassen worden. Die deutschen Geometer haben unter Führung von Reye einzig die elementare Kugelgeometrie bearbeitet. Reye hat nämlich 1879 eine kleine Schrift erscheinen lassen: Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme, der er dann noch verschiedene Abhandlungen hat folgen lassen (z. B. Crelle Bd 99 1886), woselbst er sich gleichfalls rein synthetisch, d. i. ohne Formeln, mit quadratischen Kugelcomplexen beschäftigt. Aber diese quadratischen Kugelcomplexe sind nicht diejenigen von Lie, sondern nur spezielle Fälle derselben. Sie sind, wenn wir bei unseren elementaren Coordinatenbestimmungen bleiben wollen, durch Gleichungen 2ten Grades zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \varrho$, aber nicht durch solche zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \varrho, r$ gegeben.

Wir müssen hier ein Urteil über die in Deutschland noch immer viel verbreitete Steinersche Schule abgeben. Steiner selbst ist in gewissem Sinne gar nicht als Repräsentant dieser Schule zu betrachten; hat er sich doch in Crelle I zur Aufgabe gemacht, alle Sätze, die man für sich rechtwinklig schneidende Kreise gefunden hat, auf Kreise, die sich unter beliebigem Winkel schneiden, zu übertragen, und damit den richtigen Anlauf zu den höheren Problemen genommen. Die Schüler von Steiner aber sind nicht etwa mit diesen Ansätzen weiter gegangen, mit denen Steiner begonnen hat, sondern haben einseitig die systematischen Gesichtspunkte des alternden Steiner bearbeitet unter principieller Vermeidung neuer Ideen. Diese Richtung hat die Entwicklung der Geometrie in Deutschland auf die Dauer entschieden gehemmt. Da ist denn wohl von den linearen Gebilden der elementaren Kugelgeometrie die Rede, aber nur so, wie man auch von linearen Systemen von Kegelschnitten sprechen kann; daß interessanten Dingen in der Liniengeometrie auch interessante Dinge in der Kugelgeometrie entsprechen, wie die Lie'schen Untersuchungen zeigen, daß hier ein überraschender Zusammenhang zwischen berühmten Problemen hervortritt, die in verschiedenen Gebieten der Wissenschaft ihre Aus-

Bildung gefunden haben, davon findet sich nichts erwähnt. Man könnte diese Bemerkungen über die Steinersche Schule noch sehr ausdehnen. Eine specielle hierher gehörige Frage betrifft z. B. das Zeichnen geometrischer Figuren. Wir werden in demselben ein gutes Mittel die Anschauung zu üben erblicken können. Dem entgegen perhorrescirt die Steinersche Schule alle Figuren, man vergleiche nur z. B. die Schröter'schen Schriften — und doch hat Steiner im Anfange seiner Laufbahn sehr viel gezeichnet!

Wir resumiren noch einmal die in diesem Kapitel entwickelte Plücker'sche Auffassung: Der Grundgedanke derselben findet seinen Ausdruck darin, bei der Behandlung der Raumgeometrie irgend ein geometrisch wohl definirtes Gebilde als Raumelement zu wählen und durch Coordinaten festzulegen. Wählen wir den Punkt oder die Ebene als Raumelement, so stellt unser Raum eine Mannigfaltigkeit von 3 Dimensionen vor, wählen wir die Gerade oder die Kugel als Raumelement, eine Mannigfaltigkeit von 4 Dimensionen, wählen wir den linearen Complex oder die Ball'sche Schraube, was ja identisch ist, als Raumelement, eine Mannigfaltigkeit von 5 Dimensionen, wählen wir endlich die Fläche 2. Grades als Raumelement, eine Mannigfaltigkeit von 9 Di-

mensionen. Neben der Zahl der Dimensionen, die unserem Raume je nach der Wahl des Elementes beizulegen ist, werden wir bei diesem Rückblick noch unterscheiden, ob wir es beim Gesammtraume mit einer linearen Mannigfaltigkeit oder einer quadratischen Mannigfaltigkeit zu thun haben. Eine lineare Mannigfaltigkeit liegt der elementaren Punkt- und Ebenengeometrie, der elementaren Kugelgeometrie und schliesslich auch der Schraubengeometrie zu Grunde, indem die zur Bestimmung des Elementes in ihnen angewandten Coordinaten ja von einander völlig unabhängig sind. Dagegen die Punktgeometrie der pentasphärischen Coordinaten, die höhere Kugelgeometrie und die Liniengeometrie mit homogenen Coordinaten benutzen sämmtlich überzählige Coordinaten, welche eine quadratische Bedingungsgleichung zu erfüllen haben. Dementsprechend werden wir bei ihnen den Raum als eine quadratische Mannigfaltigkeit bezeichnen müssen.

Neben der Pluckerschen Auffassung tritt nun in der Entwicklung der neuern Geometrie noch eine zweite Richtung in den Vordergrund, die darauf hinauskommt, die n homogenen Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ als Punktcoordinaten in einem entsprechend ausgedehnten Raume von $n-1$ Dimensionen zu deuten.

Diese Gedanken (den wir schon gelegentlich berührten,) behält also den Punkt als Raumelement bei und substituirt nur für unsern R_3 ein höheres Analogon, in dem nun projective Constructionen vorgenommen werden. Die hiermit bezeichnete Auffassung geht auf die beiden berühmten Mathematiker Grassmann und Cayley zurück, über die ich zunächst einiges Persönliche mitteilen will.

Grassmann ist einer der wenigen Gymnasiallehrer, die auf den Fortschritt der Mathematik bedeutenden Einfluss gehabt haben. Der Wirkungskreis seines Lebens ist ausschliesslich in Stettin gewesen. 1844 erschien in erster Auflage sein Hauptwerk, die Ausdehnungslehre. Diesen Namen hat er sich gebildet, weil es ihm unbequem war, von einer Geometrie im Raume von n Dimensionen zu sprechen. Uebrigens arbeitet er daselbst ausschliesslich mit geometrischen Analogien und ist darum sehr schwer verständlich. Im Jahre 1862 hat er sein Werk in zweiter Auflage neu herausgegeben, in der er weit weniger abstrakt ist und mit Formeln die Darstellung giebt, immer, weicht seine Formelsprache von der gewöhnlichen ab. Diese Werke haben äusserst langsam bei den Mathematikern Eingang gefunden, sind jedoch von um so nachhaltigerem Einfluss gewesen. Neuerdings ha-

ben insbesondere englische und amerikanische Forscher sich an Grassmann angeschlossen, z. B. hat sich Gibbs in seinen Entwicklungen die Planetenbahnen betreffend der Grassmannschen Methoden bedient. Es ist daher jedenfalls zeitgemäss, wenn die Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften eine Gesammtausgabe der Grassmann'schen Schriften zu veranstalten beabsichtigt.

Cayley lenkte zugleich mit Sylvester um 1850 die Aufmerksamkeit der Mathematiker nach England, indem sie in glänzenden Arbeiten den Teil der Algebra entwickelten, den man die Invariantentheorie der algebraischen Formen nennt. Während aber Sylvester diese Disciplen mehr abstrakt behandelte, hat Cayley die geometrische Interpretation hinzugefügt und damit diejenige Richtung innerhalb der analytischen Geometrie zur Herrschaft gebracht, die von Hesse im Anschluss an Jacobi in Deutschland begonnen war. Cayley und Sylvester leben beide noch, ersterer in Cambridge, letzterer in Oxford. Sylvester hat noch 1874 als 60 jähriger Mann den Mut gehabt, an die Johns Hopkins University in Baltimore überzusiedeln und durch eine ganz specifische durch 10 Jahre fortgesetzte Lehrthätigkeit höhere mathematische Studien auf amerikanischem Boden zu

bildung gefunden haben, davon findet sich nichts erwähnt. Man könnte diese Bemerkungen über die Steinersche Schule noch sehr ausdehnen. Eine specielle hierher gehörige Frage bschriffe z. B. das Zeichnen geometrischer Figuren. Wir werden in demselben ein gutes Mittel die Anschauung zu üben erblicken können. Dem entgegen perhorrescirt die Steinersche Schule alle Figuren, man vergleiche nur z. B. die Schröter'schen Schriften — und doch hat Steiner im Anfange seiner Laufbahn sehr viel gezeichnet!

Wir resumiren noch einmal die in diesem Kapitel entwickelte Plücker'sche Auffassung: Der Grundgedanke derselben findet seinen Ausdruck darin, bei der Behandlung der Raumgeometrie irgend ein geometrisch wohl definirtes Gebilde als Raumelement zu wählen und durch Coordinaten festzulegen. Wählen wir den Punkt oder die Ebene als Raumelement, so stellt unser Raum eine Mannigfaltigkeit von 3 Dimensionen vor, wählen wir die Gerade oder die Kugel als Raumelement, eine Mannigfaltigkeit von 4 Dimensionen, wählen wir den linearen Complex oder die Ball'sche Schraube, was ja identisch ist, als Raumelement, eine Mannigfaltigkeit von 5 Dimensionen, wählen wir endlich die Fläche 2. Grades als Raumelement, eine Mannigfaltigkeit von 9 Di-

mensionen. Neben der Zahl der Dimensionen, die unserem Raume je nach der Wahl des Elementes beizulegen ist, werden wir bei diesem Rückblick noch unterscheiden, ob wir es beim Gesammtraume mit einer linearen Mannigfaltigkeit oder einer quadratischen Mannigfaltigkeit zu thun haben. Eine lineare Mannigfaltigkeit liegt der elementaren Punkt- und Ebenengeometrie, der elementaren Kugelgeometrie und schliesslich auch der Schraubengeometrie zu Grunde, indem die zur Bestimmung des Elementes in ihnen angewandten Coordinaten ja von einander völlig unabhängig sind. Dagegen die Punktgeometrie der tetraedrischen Coordinaten, die höhere Kugelgeometrie und die Liniengeometrie mit den homogenen Coordinaten benutzen sämmtlich überzählige Coordinaten, welche eine quadratische Bedingungsgleichung zu erfüllen haben. Dementsprechend werden wir bei ihnen den Raum als eine quadratische Mannigfaltigkeit bezeichnen müssen.

Neben der Pluckerschen Auffassung tritt nun in der Entwicklung der neuern Geometrie noch eine zweite Richtung in den Vordergrund, die darauf hinauskommt, die n homogenen Variablen $x_1, x_2 \dots x_n$ als Punktcoordinaten in einem entsprechend ausgedehnten Raume von $n-1$ Dimensionen zu deuten.

Diese Gedanken (den wir schon gelegentlich berührten,) behält also den Punkt als Raumelement bei und substituirt nur für unsern R_3 ein höheres Analogon, in dem nun projective Constructionen vorgenommen werden. Die hiermit bezeichnete Auffassung geht auf die beiden berühmten Mathematiker Grassmann und Cayley zurück, über die ich zunächst einiges Persönliche mitteilen will.

Grassmann ist einer der wenigen Gymnasiallehrer, die auf den Fortschritt der Mathematik bedeutenden Einfluss gehabt haben. Der Wirkungskreis seines Lebens ist ausschliesslich in Stettin gewesen. 1844 erschien in erster Auflage sein Hauptwerke, die Ausdehnungslehre. Diesen Namen hat er sich gebildet, weil es ihm unbequem war, von einer Geometrie im Raume von n Dimensionen zu sprechen. Uebrigens arbeitet er daselbst ausschliesslich mit geometrischen Analogien und ist darum sehr schwer verständlich. Im Jahre 1862 hat er sein Werk in zweiter Auflage neu herausgegeben, in der er weit weniger abstrakt ist und mit Formeln die Darstellung giebt, immer, weicht seine Formelsprache von der gewöhnlichen ab. Diese Werke haben äusserst langsam bei den Mathematikern Eingang gefunden, sind jedoch von um so nachhaltigerem Einfluss gewesen. Neuerdings ha-

ben insbesondere englische und amerikanische For-
scher sich an Grassmann angeschlossen, z. B. hat
sich Gibbs in seinen Entwicklungen die Planetenbah-
nen betreffend der Grassmannschen Methoden be-
dient. Es ist daher jedenfalls zeitgemäss, wenn die
Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften eine Gesammt-
ausgabe der Grassmann'schen Schriften zu veranstal-
ten beabsichtigt.

Cayley lenkte zugleich mit Sylvester um 1850 die
Aufmerksamkeit der Mathematiker nach England,
indem sie in grundlegenden Arbeiten den Teil der Alge-
bra entwickelten, den man die Invariantentheorie
der algebraischen Formen nennt. Während aber Syl-
vester diese Disciplin mehr abstrakt behandelte, hat
Cayley die geometrische Interpretation hinzugefügt
und damit diejenige Richtung innerhalb der analy-
tischen Geometrie zur Herrschaft gebracht, die von
Hesse im Anschluss an Jacobi in Deutschland be-
gonnen war. Cayley und Sylvester leben beide noch,
ersterer in Cambridge, letzterer in Oxford. Sylvester
hat noch 1874 als 60 jähriger Mann den Mut gehabt,
in die Johns Hopkins University in Baltimore zu
übersiedeln und durch eine ganz specifische durch
7 Jahre fortgesetzte Lehrthätigkeit höhere mathe-
matische Studien auf amerikanischem Boden zu

initiiren.

Wir handeln also von der Auffassung, die homogenen Variablen $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ als Punkte eines $(n-1)$ fach ausgedehnten Raumes zu deuten. In letzterem wollen wir nun <u>lineare Schaaren</u> von Punkten betrachten; und zwar werden wir da zunächst die eingliedrige Schaar durch $\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_n$ festlegen, dieselbe stellt da es nur auf das Verhältniss der Coordinaten ankommt, den Punkt x_i selbst dar. Die zweigliedrige Schaar werde durch die linearen Verbindungen der Coordinaten zweier Punkte:

$$\lambda x_1 + \lambda' x_1',\ \lambda x_2 + \lambda' x_2',\ \lambda x_3 + \lambda' x_3' \ldots\ldots \lambda x_n + \lambda' x_n',$$

die dreigliedrige Schaar durch die linearen Verbindung der Coordinaten dreier Punkte: $\lambda x_1 + \lambda' x_1' + \lambda'' x_1''$, $\lambda x_2 + \lambda' x_2' + \lambda'' x_2'', \ldots, \lambda x_n + \lambda' x_n' + \lambda'' x_n''$ u. s. w. fort, schliesslich die $(n-1)$ gliedrige Schaar entsprechend durch die Ausdrücke:

$$\lambda x_1^{\cdot} + \lambda' x_1' + \ldots\ldots + \lambda^{(n-2)} x_1^{(n-2)}, \ldots\ldots$$
$$\lambda x_n + \lambda' x_n' + \ldots\ldots + \lambda^{(n-2)} x_n^{(n-2)} \text{ definirt.}$$

Diese linearen Punktschaaren werden völlig dem Punkt, der geraden Linie, der Ebene des R_3 analog sein. Wie werden wir die durch sie dargestellten geometrischen Gebilde des R_{n-1} nun durch <u>Coordinaten</u> festgelegt denken? Wir bilden einfach <u>die Unterdeterminanten</u>

gewisse Matrices. Bei der eingliedrigen Schaar ist die Matrix $|x_1, x_2 \ldots\ldots x_n|$, deren n einzelne Glieder die homogenen Coordinaten p_i des Punktes sind. Dieser Fall ist natürlich selbstverständlich und trivial. Bei der zweigliedrigen Schaar bilden wir die Matrix aus den Coordinaten zweier Punkte $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_n \\ x'_1 & x'_2 & \ldots\ldots & x'_n \end{vmatrix}$;

die Verhältnisse der $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Unterdeterminanten stellen uns die homogenen Coordinaten p_{ik} des Gebildes dar. In derselben Weise haben wir in den $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Unterdeterminanten der Matrix $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_n \\ x'_1 & x'_2 & \ldots\ldots & x'_n \\ x''_1 & x''_2 & \ldots\ldots & x''_n \end{vmatrix}$

die homogenen Coordinaten p_{ikl} des Gebildes der dreigliedrigen Schaar zu sehen und so fort bis zur $(n-1)$ gliedrigen Schaar. Und wir erkennen leicht, dass z.B. jede Unterdeterminante der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \lambda x_1 + \lambda' x'_1 , & \lambda x_2 + \lambda' x'_2 , & \ldots\ldots & \lambda x_n + \lambda' x'_n \\ \mu x_1 + \mu' x'_1 , & \mu x_2 + \mu' x'_2 , & \ldots\ldots & \mu x_n + \mu' x'_n \end{vmatrix},$$

in der wir den Grössen $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ irgend welche bestimmte Werte beigelegt denken können, sich von der analogen Determinante der Matrix $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_n \\ x'_1 & x'_2 & \ldots\ldots & x'_n \end{vmatrix}$ nur um den Faktor $\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' \\ \mu & \mu' \end{vmatrix}$ unterscheidet. Dies rechtfertigt die Einführung der Coordinaten p_{ik} als der Verhältnisse der Unterdeterminanten der letzten Matrix, weil diese Verhältnisse sich nicht ändern, wenn man für x und x' irgend

2 andere Punkte unseres Gebildes $\lambda x_i + \lambda' x'_i$ in die Matrix einführt. Das Analoge gilt für die Einführung der Coordinaten der drei und mehrgliedrigen Schaaren.

Neben diese erste Theorie des linearen Gebilde im R_{n-1} stellt sich dualistisch eine zweite, die sich wie folgt aufbaut: Wir knüpfen an die Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots\ldots u_n x_n = 0$$ an und definiren ein eingliedriges lineares Gebilde, dass wir eine Ebene im R_{n-1} nennen können, durch die Coordinaten $u_1 : u_2 : u_3 : \ldots\ldots : u_n$. Mit diesen Ebenencoordinaten können wir dann genau so operiren wie soeben mit den Punktcoordinaten. Wir bilden uns 2 gliedrige, 3 gliedrige Gebilde, deren Coordinaten wir entsprechend durch die Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \ldots\ldots u_n \\ u'_1 & u'_2 \ldots\ldots u'_n \end{vmatrix} \text{ oder } \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \ldots\ldots u_n \\ u'_1 & u'_2 \ldots\ldots u'_n \\ u''_1 & u''_2 \ldots\ldots u''_n \end{vmatrix}$$

einführen und mit q_{ik} resp. q_{ikl} bezeichnen.

Und in gleicher Weise können wir zu noch höher gliedrigen Gebilden weitergehen. Nun zeigt sich sofort das schöne Resultat, dass die Gebilde q_{ikl} hier den Gebilden p_{ikl} durchaus entsprechend sind und zwar in dem Sinne, dass z. B. das $(n-1)$ gliedrige Gebilde der n Coordinaten dem eingliedrigen Ge-

bilde der x Coordinaten, das $(n-2)$ gliedrige Gebilde der u Coordinaten dem zweigliedrigen Gebilde der x Coordinaten, allgemein das $(n-r)$ gliedrige Gebilde der Ebenencoordinaten den r gliedrigen Gebilde der Punktcoordinaten geometrisch genau gleich ist. Das ist genau dieselbe Reciprocität, welche neulich im Falle $n=6$ unserer Discussion der linearen Schaaren linearer Linienconplexe zu Grunde lag. Die Gebilde der 2ten Tabelle sind demnach in umgekehrter Richtung dieselben wie die Gebilde der ersten Tabelle. Man macht sich diesen Satz am besten an den Verhältnissen unseres gewöhnlichen Raumes anschaulich klar. Doch geht die Uebereinstimmung beider Tabellen bei näherer Betrachtung noch weiter: Des näheren ist nämlich die Sache so, dass die aus r Reihen von Punktcoordinaten zusammengesetzten Coordinaten p eines Gebildes sich genau genau so verhalten wie die aus $(n-r)$ Reihen von Ebenencoordinaten in komplementäre Weise zusammengesetzten Coordinaten q desselben Gebildes. Der Beweis dieses Reciprocitätsgesetzes kommt auf einen allgemeinen Determinantensatz hinaus, der sich implicite bereits in Grassmann's Ausdehnungslehre findet, aber in der gewohnten Sprache erst von Brill in Bd. 3 der Annalen aufgestellt und abgeleitet wor-

den ist. Wir gehen auf diese Ableitung nicht näher ein, sondern wenden uns sogleich zu den Folgerungen unseres Satzes, die in der Frage gipfeln: Was für Gleichungen wir nun in der Theorie der R_{n-1} studiren werden? Offenbar wird jedes Gebilde in dem Grassmann-Cayley'schen Raume Objekt der geometrischen Untersuchungen sein können, welches durch eine oder mehrere Gleichungen zwischen verschiedene Reihen von p_i, p_{ik}, p_{ikl} . . . . oder entsprechend zwischen verschiedenen . . . . . q_{ikl}, q_{ik}, q_i dargestellt wird.

Wir können nun die Grassmann'schen [Fr. 16. XII. 9] und Plücker'schen Ideen mit einander in Verbindung zu bringen suchen. Haben wir z. B. auf der einen Seite die Plücker'sche Liniengeometrie des R_3 mit den homogenen Coordinaten $x_1, x_2 \ldots x_6$ und der quadratischen Bedingungsgleichung $f(x) = 0$, so können wir andererseits die 6 Coordinaten auch im Grassmann'schen Sinne zur Festlegung der Punkte eines R_5 deuten; $f(x) = 0$ heißt dann im letzteren eine Fläche 2. Grades dar, unter jedes weitere durch irgend welche Gleichung zwischen den x_i gegebene Gebilde in Beziehung gesetzt wird. Oder haben wir im Plücker'schen Sinne z. B. den linearen Complex als Raumelement

eingeführt und durch 6 unabhängige Coordinaten festgelegt, so werden wir dieser Geometrie die gewöhnliche der R_5 parallelisiren können. Beide Ansätze gebrauche ich viel in meinen wiederholt genannten Arbeiten Annalen II und V. Allgemein werden wir sagen: Wir können die Untersuchungen über höhere Elemente eines niederen Raumes immer auf die Punkte eines höheren Raumes beziehen.

Doch können wir natürlich auch noch von anderer Seite die Verknüpfung von Grassmann- und Plücker'scher Anschauung bewirken. Haben wir uns z.B. entschlossen, im Grassmann'schen Raume von beliebig hohen Dimensionen zu arbeiten, so können wir doch in ihm auch etwa von einer Kugelgeometrie sprechen, kurz statt der Punkte irgend ein anderes Gebilde im Plücker'schen Sinne als Raumelement einführen.

Dass man, wenn irgendwelche Variable zu interpretiren sind, wechselnd bald diese bald jene Anschauungsweise gebrauchen kann, das ist das Wesentliche.

Wir wollen nun in diesem Kapitel noch einen letzten Punkt zur Sprache bringen, mit dem die französischen Geometer seit 1880 sich mannigfach

beschäftigt haben; derselbe betrifft, was wir die elementare Kreisgeometrie in unserm gewöhnlichen Raum nennen können.

Ein Kreis in der Ebene hängt von 3 Constanten ab, aber die Ebene, welche ihn trägt, erfordert gleichfalls 3 Constante zu bestimmen. Wir sehen, ein Kreis im R_3 besitzt also sechs Constante. Wir wollen denselben nun folgendermassen durch Coordinaten festlegen: Eine Kugel legen wir in der elementaren Kugelgeometrie, von der wir hier ausgehen, bekanntlich durch 5 homogene Coordinaten fest, die wir hier $x_1, x_2 \dots x_5$ nennen wollen. Indem nun der Kreis sich als Schnitt zweier Kugeln darstellt und als solcher den Kugeln eines ganzen Büschels angehört, so werden wir uns die folgende Matrix bilden:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' & x_5' \end{vmatrix}$$

und aus ihr die 10 verschiedenen Unterdeterminanten p_{ik} bilden. Diese Grössen wählen wir als homogene Coordinaten des Kreises im Raume. Zwischen diesen p_{ik} müssen offenbar 3 unabhängige Identitäten bestehen, weil doch der Kreis im Raume von 6 Constanten abhängen soll. Nun können wir sehr leicht 5 der Form nach verschiedene Identitäten finden, indem wir die beiden Zeilen der obigen Matrix

noch einmal unter dieselbe setzen und nun allemal eine Colonne der neuen Matrix fortlassen. Die so entstehenden Determinanten ergeben gleich 0 gesetzt und in bekannter Weise nach Unterdeterminanten entwickelt die gewünschten Identitäten, die vom 2 Grade in den p_{ik} sind. Um nur ein Beispiel anzuführen, erhalten wir solchermaße etwa die Gleichung $0 = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = P$. Diese 5 Bedingungsgleichungen haben natürlich nur die Bedeutung von 3 unabhängigen Gleichungen. Haben wir uns so über die Fixirung der Coordinaten eines Kreises im R_3 verständigt, so werden wir nunmehr Gleichungen zwischen denselben studiren. Zunächst bietet sich wieder die lineare Gleichung $\sum a_{ik} p_{ik} = 0$ dar, die in extenso aus 10 Gliedern bestehen wird. Da wir 6 wesentliche Constante zur Bestimmung eines Kreises erkannt haben, so können wir auch 6 lineare Gleichungen der obigen allgemeinen Form neben einander betrachten; dieselben werden nur eine endliche Zahl von Kreisen definiren können.

Es ist sehr merkwürdig, dass sich da genau 5 Kreise ergeben, die in bestimmter Weise gegen einander im Raume liegen; die Franzosen nennen ein solches Gebilde ein „Pentacycle".

Indem wir daher den Kreis im Raume durch die Verhältnisse der 10 Coordinaten p_ik festlegen, erscheint die Mannigfaltigkeit der Kreise als ein 6fach ausgedehntes Gebiet 5. Ordnung im Raume von 6 Dimensionen.*) Als Litteratur sei eine zusammenfassende Arbeit von Cosserat im III. Bande des Annales de Toulouse**) genannt: Sur le cercle considéré comme élément générateur dans l'espace (1889). Im übrigen sind hier noch manche Fragen aufzuwerfen, die ihrer Erledigung harren, eine gründliche und systematische Behandlung dieser Kreisgeometrie, die etwa nach einander eine lineare Gleichung, zwei lineare Gleichungen u. s. w. zwischen den Coordinaten betrachtet, steht eben noch aus; ein Gleiches gilt übrigens auch von der Lie'schen Kugelgeometrie, so dass hier eine Stelle ist, wo ohne besondere Erfindung nützliche Arbeiten gemacht werden können.

Geometrische Auffassung der Differentialgleichungen

Wir kehren nun noch zu einer Aufgabenstellung zurück, die wir bereits früher gelegentlich der

*) Andererseits können wir sagen: unsere Kreisgeometrie ist ein Abbild der „Liniengeometrie" der vierdimensionalen Sphäre.

**) In Toulouse ist seit einer Reihe von Jahren ein wissenschaftliches Lebenscentrum besonders für jüngere Mathematiker.

Betrachtung der gewöhnlichen Punktcoordinaten
behandelt, dieselbe betrifft die geometrische Auf-
fassung der Differentialgleichungen, die wir nun
von unserem entwickelten Standpunkte aus, den
wir die Liniencoordinaten der Ebene und die Ebe-
nencoordinaten des Raumes verschafft haben,
beleuchten wollen. Wir sprechen zunächst von Dif-
ferentialgleichungen 1. Ordnung; ich darf sogleich
von die drei verschiedenen Arten der Differential-
gleichungen nennen, die sich in den Gleichun-
gen darstellen: 1) $f(x, y, y') = 0$, 2) $f(x, y, z, p, q) = 0$
3) $f(x, y, z, \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}) = 0$.

Mit jeder dieser Gleichungen hatten wir bereits
eine bestimmte geometrische Auffassung verbun-
den. Die erste ordnete jedem Punkte der Ebene ei-
ne bestimmte Fortschreitungsrichtung in der Ebe-
ne zu, die zweite lieferte für jeden Raumpunkt
einen Kegel von Fortschreitungsrichtungen im Rau-
me, die dritte endlich lies Tangentialebene der
Kegelrufflächen in ihrem Berührungspunkte
einen bestimmten Kegel berühren. Die Fälle
zwei und drei stehen daher in demselben dua-
listischen Gegensatz, wie etwa Punkt- und
Ebenencoordinaten in der Ebene. Wir wollen

... die Bezeichnung, incident" einführen für ... Fall, dass irgend zwei Gebilde, wie Punkt ... und Linie, Linie und Ebene oder Ebene und Pun... in einander liegen. Wir können daher auch sa... gen: Einem beliebigen Punkte ordnet die erste Gleichung eine incidente Gerade, die zweite eine incidente Schaar von Geraden, die dritte eine incidente Schaar von Ebenen zu.

Diese Auffassungsweise geht nun eine analytische Behandlung der Differentialgleichungen erster Ordnung parallel; welche Clebsch in seinen letzten Arbeiten 1871–72 begründete; wir können dieselbe kurz als die homogene Verallgemeinerung unserer Differentialgleichungen bezeichnen. Bleiben wir zunächst bei dem Typus der Gleichung *). Clebsch bildet sich eine Gleichung, die eine Reihe Punktcoordinaten und eine Reihe Liniencoordinaten, neben einander, jede homogen, enthält, etwa $f(x_1 x_2 x_3 ; u_1 u_2 u_3) = 0$, und fügt als Bedingung hinzu, dass x_i u. u_i incident zu einander sein sollen, d. h. es gilt

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

Aus beiden Gleichungen zusammen werden dann durch die Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ ersetzen-

*) Man vergleiche hierzu das Schlusskapitel von Band I der Vorlesungen über Geometrie von Clebsch-Lindemann

Für einen konstanten Wert der x_i gibt die Gleichung $f(x_i, u_i) = 0$ zunächst als Umhüllungsgebilde der Geraden u_i eine bestimmte Curve; da aber ausserdem die Bedingung der Incidenz für Punkt und Gerade gilt, kommen nur die Tangenten der Curve in Betracht, welche durch die Punkte x_i gehen. Die Aufgabe der Integration ist, aus den so bestimmten Geraden u_i und zugehörigen Punkten x_i Curven zusammenzusetzen, für welche dieselben zusammengehörige Tangenten und Curvenpunkte sind. Clebsch hat auch eine besondere Terminologie für diese Betrachtungen gebildet. Eine Gleichung wie $f(x_i, u_i) = 0$ nennt er einen Connex, d. h. eine Verknüpfung von Punkt und Linie; was 2 Connexe gemein haben, ist nach ihm eine Coincidenz. Auch die Gleichung $\sum u_i x_i = 0$ stellt einen Connex vor, wir wollen ihn insbesondere den Hauptconnex nennen. Für uns handelt es sich dann um die Coincidenz, welche dem gegebenen Connex und dem Hauptconnex gemeinsam ist, und diese nennt Clebsch eine Hauptcoincidenz. Die Differentialgleichung $f(x\ y\ y') = 0$ wird demnach jetzt gegeben durch die Hauptcoincidenz eines Connexes $f(x|u) = 0$.

Im übrigen können wir dieses Formelsystem noch auf verschiedene gleichberechtigte Weise schreiben:

1) Lassen wir z. B. y_i einen Punkt der Geraden u_i

sein, die mit dem Punkte x_i incident liegt, so können wir die Coordinaten u_i durch die zweigliedrigen Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$ setzen, die wir mit $(xy)_{23}$, $(xy)_{31}$ $(xy)_{12}$ bezeichnen wollen. Setzen wir diese Werte für u_i in unsere Gleichung ein, so nimmt dieselbe die Gestalt an: $f(x_1 x_2 x_3 ; (xy)_{23}, (xy)_{31}, (xy)_{12}) = 0$.

2) Wählen wir den Punkt y_i insbesondere in der Nachbarschaft des Punktes x_i, so können wir $y_i = x_i + dx_i$ setzen und die Determinanten $(xy)_{23}$ $(xy)_{31}$ $(xy)_{12}$ werden dann gleich $(x\,dx)_{23}$ $(x\,dx)_{31}$ $(x\,dx)_{12}$, so dass unsere Gleichung jetzt die Form

$$f(x_1, x_2, x_3 ; (x\,dx)_{23}, (x\,dx)_{31}, (x\,dx)_{12}) = 0$$ bekommt.

3. Endlich noch eine letzte Schreibweise. Denken wir uns unsere Differentialgleichung $f(xyy') = 0$ integriert und sei $\Phi_0(x_1 x_2 x_3) =$ const das Integralcurvensystem derselben [wo wir in Φ eine Form 0ter Dimension zu sehen haben], so stellt sich die Tangente einer beliebigen Curve im Punkte x_i dar durch die Gleichung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} x_3 = 0;$$

dies ergiebt, dass unsere obigen Coordinaten u_i den partiellen Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ proportional zu setzen sind, und demnach unsere Gleichung auch die Gestalt:

$$f\left(x_1, x_2, x_3; \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) = 0$$

erteilt werden kann.

Alle diese 3 neuen Formen der Gleichung sind demnach der ursprünglichen Formulirung von Clebsch gleichwerthig und drücken eben immer aus, dass es sich bei der Hauptgleichung um die Hauptcoincidenz eines Connexes handelt. Nun ist die Frage, was wir mit dieser Formulirung der Integralaufgabe gewonnen haben? Es ist durch diesen Ansatz ein zweifacher Fortschritt in der Theorie der Differentialgleichungen angebahnt worden.

1) Zunächst haben wir ein Princip zur Aufzählung aller möglichen Differentialgleichungen $f = 0$ genommen, welches sich darauf stützt, dass die Grössen x_i und u_i gleichwerthig neben einander vorkommen. Ausgehend von der gewöhnlichen Gleichungsform $f(x\, y\, y') = 0$ classificirt man herkömmlicher Weise nur nach dem Grade des y', und unterscheidet so Differentialgleichungen ersten, zweiten, n^{ten} Grades, kümmert sich aber nicht darum, in welchem Grade x und y vorkommen, ja, dieselben können sogar in transcendenten Verbindungen erscheinen. Wenn wir aber jetzt schreiben $f(x_1 x_2 x_3; u_1 u_2 u_3) = 0$,

so werden wir ganz von selbst dazu geführt, nach 2 Zahlen die Gleichungen einzuteilen, sowohl nach der Ordnung, in welcher die x_i vorkommen, wie nach der Klasse, in welcher die u_i auftreten. Wir werden ferner auch den Grössen u_i nicht minder, wie den Grössen x_i gestatten, transcendent in der Gleichung vorzukommen. Der einfachste Fall wird dann der Fall (1,1) sein, woselbst die Grössen x_i und u_i beide linear in der Gleichung auftreten (bilineare Gleichungsform), dann folgen die Fälle (1,2) und (2,1), ferner der Fall (2,2) und so fort. Es ist solcherweise ein ganz neues Princip gewonnen, diese Differentialgleichungen $f = 0$ hinter einander aufzuzählen.

2). Der zweite Punkt betrifft noch direkter die Gleichberechtigung von x_i und u_i. Wie wir neben der Gleichungsform $f(x_i\ u_i) = 0$ die andern Formen:

$$f(x;\ (x\,dx)) = 0 \text{ und } f\left(x, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 0$$ einführten,

können wir auch schreiben $f(u, (du, u)) = 0$ oder

$$f\left(u, \frac{\partial \Psi}{\partial u}\right) = 0.$$

Die Formulirung von Clebsch belehrt uns eben, dass bei den vorliegenden Differentialgleichungen Punkt und gerade Linie gleichberechtigte Elemente sind, und zeigt uns damit, dass man die u gerade so als unab-

ige Coordinaten betrachten kann, wie man es ernst
den x macht. Es ist z. B. der Fall (1,2) der Differential-
hung völlig äquivalent mit dem Falle (2,1); kann
n einen Fall integriren, so vermag ich es auch im
n Falle.
verden nun wünschen, die besprochene geometri-
Auffassung an einem Beispiel durchgeführt zu
v; wir wählen als solches den einfachsten Fall (1,1)
ifferentialgleichung aus. Wir gehen aus von der all-
einen bilinearen Gleichung: $\sum a_{ik} x_i u_k = 0$, oder

$$x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3) + u_2 (a_{12} x_1 + a_{22} x_1 + a_{32} x_3)$$
$$+ u_3 (a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3) = 0.$$

wir hier für u_i die Determinante einführen, so bekom-
wir: $(x_2 dx_3 - x_3 dx_2)(a_{11} x + a_{21} x_2 + a_{31} x_3) + (x_3 dx_1 - x_1 dx_3)$
$+ a_{22} x_2 + a_{32} x_3) + (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)(a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3) = 0.$

Differentialgleichung kommt nun von Alters her be-
in der Litteratur vor; so hat sich insbesondere Jacobi
derselben beschäftigt in Crelle Band 24. (1842), an-
weits haben Sie und ich dieselbe in den Comptes
dus von 1870 und in Annalen IV (1871) wieder
enommen; wir haben dort insbesondere die Inte-
curven dieser Differentialgleichung, die wir „W-
en" nannten, nach ihren geometrischen Eigenschaf-
studirt. Um Jacobi's Arbeit mit dem vorlie-

genden zu vergleichen, haben wir zur unhomogenen Schreibweise überzugehen und demgemäss $x_3 = 1$, $dx_3 = 0$ zu setzen, so dass die Gestalt unserer Gleichung lautet:

$$-dx_2(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}) + dx_1(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}) + (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}) = 0.$$

Man sieht, wie in dieser unhomogenen Form die schöne Symmetrie der ursprünglichen Form ganz verloren gegangen ist.

Wir gehen nun auf die geometrische Bedeutung der ursprünglichen Form der Differentialgleichung:

$$u_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3) + \ldots + \ldots = 0$$

näher ein. Dieselbe stellt doch bei constanten Werten der x_i die Gleichung eines Punktes in Ebenencoordinaten dar; die Punktcoordinaten desselben werden unter Einführung des Proportionalitätsfaktors ϱ durch die Gleichungen gegeben sein:

$$\begin{aligned}
\varrho\, y_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3\,, \\
\varrho\, y_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3\,, \\
\varrho\, y_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3\,.
\end{aligned}$$

Einem jeden Punkt x wird demnach hier durch eine bestimmte lineare Transformation ein Punkt y zugeordnet, und man wird nun nach Curven suchen, welche in jedem ihrer Punkte x_i die Verbindungslinie des-

Punktes x mit dem zugehörigen y_i zur Tangente haben.
Will man daher die Differentialgleichungen integriren, so hat man vor allen Dingen diese linearen Substitutionen, – die man nach ihrer geometrischen Bedeutung Collineationen nennt – näher zu studiren. Es ist zunächst die Frage, ob es möglich ist, Punkte x zu finden, die mit den ihnen entsprechenden y identisch sind. Dies führt auf die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 ,\\
\varrho x_2 &= a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3 ,\\
\varrho x_3 &= a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 ,
\end{aligned}$$

die bekanntlich nur dann Lösungen zulassen, wenn die Determinante der Coefficienten:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-\varrho & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Wir wollen annehmen, dass diese cubische Gleichung drei getrennte Wurzeln ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 für ϱ liefert; wie die Betrachtung abzuändern ist, wenn 2 oder gar 3 der Wurzeln zusammenfallen, wollen wir nicht weiter untersuchen. Es giebt also dann 3 verschiedene Punkte der Ebene, welche bei der Collineation festbleiben. Dieselben führen wir nun weiterhin als Ecken eines neuen Coordinatendreiecks ein; dann gehen unsere Substitutions-

formeln, wie wir gleichfalls nicht näher nachweisen wollen, über in die folgenden:

$$\rho y_1' = \rho_1 x_1',$$
$$\rho y_2' = \rho_2 x_2',$$
$$\rho y_3' = \rho_3 x_3',$$

woselbst der Accent eben auf das neue Coordinatensystem hinweisen soll.

Bezogen auf dieses neue Coordinatendreieck nimmt unser Connex nun die Gleichung form an:

$$\rho_1 u_1' x_1' + \rho_2 u_2' x_2' + \rho_3 u_3' x_3' = 0.$$

Um diese Gleichung als Differentialgleichung zu schreiben, führen wir jetzt statt $u_1' u_2' u_3'$ die partiellen Ableitungen der gesuchten Integralfunction $\Phi(x_1' x_2' x_3') = \text{Const.}$ ein. Wir erhalten dann (indem wir die Accente wieder fortlassen):

$$\rho_1 x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \rho_2 x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \rho_3 x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich aber leicht integriren und liefert uns:

$$\Phi = x_1^{\rho_2 - \rho_3} \cdot x_2^{\rho_3 - \rho_1} \cdot x_3^{\rho_1 - \rho_2} = \text{Const.}$$

Dies sind eben diejenigen Curven, die von Lie und mir in der genannten Arbeit als W-Curven bezeichnet sind. Die hier gegebene geometrische Theorie der Integration stimmt sachlich genau mit dem analytischen Verfahren Jacobi's überein. Wir legen aber Gewicht darauf, jeden einzelnen

Schrittgeometrisch zu verstehen. Wir wiederholen in dieser Hinsicht, dass wir die Differentialgleichung zunächst als Complex auffassen, diesen Complex durch eine Collineation interpretiren, die festbleibenden Punkte dieser Collineation suchen und endlich das von diesen gebildete Dreieck als neues Coordinatendreieck einführen. —
Diese Erläuterungen bezogen sich erst auf die Differentialgleichungen $f(xyy')=0$. Analoge Betrachtungen werden wir jetzt an $f(xyzpq)=0$, wie an $f(xyz\frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz})=0$ anknüpfen können. Wir schreiben das erste Mal einen Complex im Raume $f(x_1x_2x_3x_4|u_1u_2u_3u_4)=0$, neben den wir die Gleichung der Hauptcomplexe stellen:

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0.$$

Das zweite Mal haben wir eine Gleichung mit Punkt- und Linienco\u00f6rdinaten:

$$f(x_1x_2x_3x_4|p_{12},p_{13},\ldots\ldots p_{23})=0$$

und neben ihr die Bedingungen für die Incidenz von Punkt und Gerade: $x_\alpha p_{\beta\gamma}+x_\beta p_{\gamma\alpha}+x_\gamma p_{\alpha\beta}=0$
(unter $\alpha\beta\gamma$ irgend 3 Indices aus der Reihe 1, 2, 3, 4 verstanden).
Hier entsteht die Frage: Welches Integrationsproblem kann man an eine Gleichung $f(x_i|u_i|p_{ik})=0$ anknüpfen, vorausgesetzt, dass man x_i, u_i, p_{ik}, alle drei wechselseitig incident sein lässt? Wir müssen mit diesen Betrachtungen hier leider abbrechen.
Wir kömlen ferner die Differentialgleichungen [Mo. 19. XII. 92.]

zweiter Ordnung gleichmässig behandeln. In demselben kommen, wenn wir uns auf den Fall dreier Variablen beschränken, die Grössen $x\ y\ z\ p\ q\ r\ s\ t$ vor, die wir früher als Bestimmungsstücke eines osculirenden Paraboloids bezeichneten, jetzt aber die Coordinaten desselben nennen. Wir gehen nicht weiter darauf ein zu untersuchen, wie sich diese 7 Grössen bei Coordinatentransformation umsetzen, und wie man schliesslich eine symmetrische, homogene Bezeichnung für dieselben einführen könnte. Es würde dies immerhin einige Rechnung erfordern; uns genügt es auf diese Fragen hingewiesen zu haben, die ja ein Gegenstück zu dem von uns erledigten Fall der Differentialgleichung erster Ordnung bilden.

Wir wollen vielmehr die letzten beiden Stunden in diesem Jahre noch benutzen, um ganz elementar die Formeln der Flächenkrümmung abzuleiten, da dieselben von so grosser fundamentaler Bedeutung sind, als dass wir sie nicht explicit anführen sollten, und nun dann diese Formeln von Punktcoordinaten in Ebenencoordinaten umzusetzen. Wir denken uns wieder die Fläche in der Gleichungsform $z = f(x, y)$ gegeben. Der einzelne ausgewählte Flächenpunkt habe die Coordinaten z_0, x_0, y_0. Die Fortschreitungsrichtung von dem Flächenpunkt aus, die keines wegs an die Fläche gebun-

den gerade braucht, bezeichnen, wie mit δx, δy δz.
Die Entwicklung der z Coordinate der Fläche $z = f(x, y)$ nach dem Taylorschen Satz ergiebt uns die Formel:

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y + \tfrac{1}{2}\{r\,\delta x^2 + 2s\,\delta x\,\delta y + t\,\delta y^2\} + \ldots\ldots,$$

wobei wir für $z - z_0$, $x - x_0$, $y - y_0$ entsprechend δz, δx, δy gesetzt haben, da es uns vornehmlich auf die nächste Umgebung der Stelle z_0, x_0, y_0 ankommt. Die Tangentialebene der Fläche in unserem Punkte wird in denselben Coordinaten δx, δy, δz gegeben durch die Gleichung $\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$, in der für p und q ihre Werte nach der Gleichung $z = f(x, y)$ einzutragen sind. Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich nach Elimination von δz:

$$0 = \tfrac{1}{2}(r\,\delta x^2 + 2s\,\delta x\,\delta y + t\,\delta y^2) + \text{Glieder 3. Ordnung}.$$

Diese Gleichung stellt uns die Projektion der Durchschnittscurve der Fläche und der Tangentialebene auf die xy Ebene dar. Wie wir schon früher bemerkten, und sich ohne Weiteres aus dieser Gleichung ergibt, besitzt diese Durchschnittscurve im Punkte z_0, x_0, y_0 einen Doppelpunkt. Die Richtungen ihrer Aeste bekommen wir, wenn wir uns in der letzten Gleichung auf die Glieder 2 Ordnung beschränken:

$$0 = r\,\delta x^2 + 2s\,\delta x\,\delta y + t\,\delta y^2$$

Die so festgesetzten Fortschreitungsrichtungen sind aber identisch mit denen der Haupttangentencurven.

Die Differentialgleichung der Haupttangentencurven, bezüglich derjenigen Curven in der xy Ebene, welche die orthogonale Projektion der Haupttangentencurven sind, ist demnach die folgende:

$$0 = r\delta x^2 + 2s\delta x\delta y + t\delta y^2.$$

Entsprechend werden wir nun die Differentialgleichung der Krümmungscurven abzuleiten wünschen. Wir wollen zu dem Zwecke uns auf der Fläche vom Punkte $x_0 y_0 z_0$ aus in einer solchen Richtung dx, dy, dz fortschreitend denken, dass die Normalen in den Nachbarpunkten sich treffen. In letzterer Eigenschaft lag für uns ja gerade die Definition der Krümmungscurven. Konstruiren wir zunächst einmal die Tangentialebenen in den Nachbarpunkten; dieselben haben eine bestimmte Schnittgerade gemeinsam. Andererseits denken wir die Punkte selbst durch eine Gerade verbunden, welche die obige Fortschreitungsrichtung dx, dy, dz enthält. Soll die letztere nun ein Element einer Krümmungscurve sein, so muss offenbar die Verbindungsgerade der beiden Punkte jene Schnittgerade ihrer Tangentialebenen senkrecht kreuzen; denn dann und nur dann werden sich die Nachbarnormalen schneiden. Die Tangentialebene im Ausgangspunkt lautet nun: $\delta z = p\delta x + q\delta y$, die Tangentialebene im Nachbarpunkte $dx\ dy\ dz$

dagegen: $\delta z = (p + dp)\,\delta x + (q + dq)\,\delta y$. In diesen beiden Gleichungen beziehen sich zwar $\delta x, \delta y, \delta z$ auf 2 verschiedene, doch parallel gerichtete Coordinatensysteme; insofern wir aber nur die Richtung der Durchdringungsgeraden suchen, dürfen wir die beiden Gleichungen so behandeln, als wenn sie sich auf dasselbe Coordinatensystem bezögen.
Es folgt aus ihnen durch Subtraktion $0 = dp\,\delta x + dq\,\delta y$. Aus dieser und der letzten Gleichung ergibt sich dann für die Richtung der Schnittgeraden:

$$\delta x : \delta y : \delta z = dq : -dp : p\,dq - q\,dp.$$

Die Bedingung, dass letztere auf der Fortschreitungsrichtung dx, dy, dz in der Fläche senkrecht stehen soll, ist nun: $dx\,\delta x + dy\,\delta y + \delta z\,dz = 0$ oder nach Einsetzung der Werte für $\delta x, \delta y, \delta z$: $dq\,dx - dp\,dy + (p\,dq - q\,dp)\,dz = 0$. oder geordnet

$$dp\,(dy + q\,dz) = dq\,(dx + p\,dz).$$

Dies also ist die Differentialgleichung der Krümmungscurven. Setzen wir noch $dz = p\,dx + q\,dy$, $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$ in die letzte Gleichung ein, so erhalten wir schliesslich nach leichter Umformung:

$$0 = \frac{(pqr - (1+p^2)\,s)\,dx^2 + ((1+q^2)\,r - (1+p^2)\,t)\,dx\,dy + ((1+q^2)\,s - pqt)\,dy^2}{}$$

als Differentialgleichung der Krümmungscurven, be-

<u>züglich ihrer Projektion auf die xy-Ebene</u>, ganz analog der Gleichung für die Hauptstangentencurven. {Da ist nun zunächst gar nicht zu erkennen, dass zur Differentialgleichung der Hauptstangentencurven eine enge Beziehung besteht!}

Nun müssen wir noch die <u>Gleichungen der Hauptkugel</u> berechnen. Der Mittelpunkt einer beliebigen Kugel, welche die Fläche im Punkte $x_0\,y_0\,z_0$ berührt, sei mit α, β, γ bezeichnet. Da derselbe auf der Normalen gelegen ist, so gelten die Beziehungen:

$$x_0 - \alpha = m\,p\,,\quad y_0 - \beta = m\,q\,,\quad z_0 - \gamma = -\,m,$$

in denen m ein beliebiger Faktor ist. Der Radius ϱ jener Kugel ergibt sich aus der Gleichung

$$(x_0-\alpha)^2 + (y_0-\beta)^2 + (z_0-\gamma)^2 = m^2(1+p^2+q^2) = \varrho^2,$$

d. h. $\varrho = m\sqrt{1+p^2+q^2}$. Die Gleichung der Kugel ist dann:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + 2m\left[(z-z_0) - p(x-x_0) - q(y-y_0)\right] = 0.$$

Setzen wir wieder statt $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ in diese Gleichung δx, δy, δz ein, da es uns nur auf die Umgebung des Punktes $x_0\,y_0\,z_0$ ankommt, so bekommen wir als Kugelgleichung:

$$\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 + 2m(\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y) = 0,$$

oder indem wir δz hieraus in eine Reihe entwickeln

$$\delta z = -m + m\left[1 + 2\left(\frac{p\delta x + q\delta y}{m}\right) - \frac{\delta x^2 + \delta y^2}{m^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$\delta z = p\delta x + q\delta y - \frac{(1+p^2)\delta x^2 + 2pq\delta x\delta y + (1+q^2)\delta y^2}{2m} +$$

Glieder 3. Ordnung .....

Mit dieser Darstellung der Berührungskugel verglichen wir die Darstellung unserer Fläche selbst:

$\delta z = p\delta x + q\delta y + \frac{r\delta x^2 + 2s\delta x\delta y + t\delta y^2}{2} + \ldots$; wir bekommen durch Subtraktion beider:

$$0 = (rm + 1 + p^2)\delta x^2 + 2(sm + pq)\delta x\delta y + (tm + 1 + q^2)\delta y^2.$$

Diese Gleichung giebt uns die beiden Fortschreitungsrichtungen derjenigen Curve, in der die Originalfläche sich mit der ausgewählten Berührungskugel durchdringt. Soll nun unsere Kugel eine Hauptkugel sein, so müssen jene beiden Fortschreitungsrichtungen in eine zusammenfallen. Diese Bedingung ergibt:

$$0 = (sm + pq)^2 - (rm + 1 + p^2)(tm + 1 + q^2),$$

oder: $0 = m^2(s^2 - rt) + m(2pqs - r(1+q^2) - t(1+p^2)) - (1+p^2+q^2)$.

Diese quadratische Gleichung liefert uns für die beiden Hauptkugeln den Wert der zugehörigen m. Setzen wir in ihr schliesslich aus der Gleichung $\rho = m\sqrt{1+p^2+q^2}$ den Ausdruck für m ein, so erhalten wir als Gleichung zur Bestimmung der beiden Hauptradien:

$$\rho^2(s^2 - rt) + \rho\left(2pqs - r(1+q^2) - t(1+p^2)\right)\sqrt{1+p^2+q^2} - (1+p^2+q^2)^2 = 0$$

Wir wollen noch kurz die Formeln hinzufügen, [Di. 20. XI. 9] die sich hier für das Krümmungsmass $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ und die mittlere Krümmung $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ ergeben. Die Werte ρ_1 u. ρ_2 sind die Wurzeln unserer letzten Gleichung. Demnach ergibt sich einfach:

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2pqs - r(1+q^2) - t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soll das Krümmungsmass für alle Flächenpunkte gleich 0 sein, so haben wir es mit den sogenannten abwickelbaren Flächen zu thun d. h. mit den Flächen, die sich auf die Ebene ausbreiten lassen. Als Bedingung derselben erhalten wir die Differentialgleichung $rt - s^2 = 0$. Gleicherweise können wir alle Flächen betrachten, deren mittlere Krümmung verschwindet; es sind dies bekanntlich die Minimalflächen.

Deren Differentialgleichung wird dann sein:

$$2pqs - r(1+q^2) - t(1+p^2) = 0.$$

Wir sind nun bisher von der Flächengleichung $z = f(x,y)$ ausgegangen; es ist natürlich, dass wir auch die Gl. $\varphi(x,y,z) = 0$, oder homogen geschrieben,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$ zu Grunde legen können. Ferner kann man auch die Parameterdarstellung der Flächen als Ausgangspunkt wählen, man hat dann etwa die Gleichungen

$x = X_1(u,v)$, $y = X_2(u,v)$, $z = X_3(u,v)$ als gegeben anzusehen. Die sich anschliessende Aufgabe würde sein, für alle diese Darstellungsformen der Fläche unsere aufgestellten Differentialformeln umzugestalten. Doch wollen wir hierauf nicht weiter eingehen; wir wenden uns vielmehr gleich zu dem zweiten in Aussicht gestellten Punkte, der sich auf die Einführung der Ebenencoordinaten an Stelle der Punktgeometrie beziehen sollte. Wir wollen die Ebenencoordinaten bezeichnen mit X, Y, Z, und es sei demnach die Gleichung der Fläche $Z = F(X,Y)$ vorliegend, d. h. ein Gesetz, nach welchem eine Ebene eine Fläche umhüllt. Unsere Aufgabe wird es sein, in die vorhin gefundenen Formeln die partiellen Differentialquotienten $P, Q \ldots$ dieses Z einzuführen. Bekanntlich führt man die homogenen Ebenencoordinaten u_i am einfachsten ein als die Coefficienten der homogenen Gleichung einer Ebene in Punktcoordinaten:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

Da wir hier nicht homogen operiren, so werden wir die letzte Gleichung durch je eine der Grössen u und x dividiren. Dies lässt eine gewisse Willkür zu, wir wollen die Gleichung der Ebene insbesondere in der symmetrischen Gestalt schreiben: $z - Xx - Yy - Z = 0$. Die hier auftretenden Constanten X, Y, Z mögen dann

sowie als die Coordinaten der Ebene bezeichnet wurden. Es ist dieser die Art und Weise von der Plücker in seiner Raumgeometrie (1846) Gebrauch macht. Wir nehmen nun an, dass die durch die Gleichung $Z = F(X, Y)$ dargestellte Fläche in Punktcoordinaten durch die frühere Gleichung $z = f(x, y)$ gegeben wird, und untersuchen, wie die verschiedenen partiellen Differentialquotienten beider Gleichungen mit einander zusammenhängen. Wie wir bereits andeuteten, werden wir hierbei die partiellen Differentialquotienten der Gl. in Ebenencoordinaten in entsprechender Weise mit grossen Buchstaben bezeichnen, wie die der Gleichung in Punktcoordinaten.

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte $x_0 y_0 z_0$ lautet in Punktcoordinaten bekanntlich: $z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$, oder $z - p_0 x - q_0 y - (z_0 - p_0 x_0 - q_0 y_0) = 0$. Soll dies aber die Gleichung der Ebene sein, deren Coordinaten X, Y, Z sind, dann muss $\underline{X = p,\ Y = q,\ Z = z - px + qy}$ sein, was unsere ersten Formeln sind. Wir lassen hier den Index 0 fort, da diese Beziehungen ja für jeden Flächenpunkt gelten. Wir können nun aber in gleicher Weise ausgehen von der Gleichung $Z = F(X, Y)$ und die Gleichung des Berührungs-

punktes $x_0\ y_0\ z_0$ der Ebene $X_0\ Y_0\ Z_0$ bilden. Dieselbe wird gemäss des Principes der Dualität ganz analog wie die Gleichung der Tangentialebene gebaut sein und also lauten:

$$(Z - Z_0) = P_0 (X - x_0) + Q_0 (Y - y_0) \text{ oder:}$$
$$Z - P_0 X - Q_0 Y - (Z_0 - P_0 x_0 - Q_0 y_0) = 0$$

Es folgt daher die zweite Formelgruppe:

$x = -P,\ y = -Q,\ z = Z - PX - QY$, wo wir wieder den Index 0 fortgelassen haben.

Indem wir daher die Ebenencoordinaten X, Y, Z und die zugehörigen Differentialquotienten P, Q einführen, ergeben sich zwischen ihnen und den entsprechenden Grössen x, y, z, p, q die in den letzt unterstrichenen Gleichungen ausgedrückten Beziehungen. Vermöge derselben können wir dann jede partielle Differentialgleichung 1 Ordnung, die in Punktcoordinaten angelegt ist, sofort in eine partielle Differentialgleichung zwischen Ebenencoordinaten setzen.

Zugleich zeigt sich aus den Transformationsgleichungen, wie durch einfache Substitution zu verificiren ist, die merkwürdige Beziehung, dass:

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = dz - p\,dx - q\,dy \text{ wird;}$$

wir kommen später unter allgemeineren Gesichtspunkten auf diese Beziehung zurück.

Nun gehen wir zu den zweiten Differentialquotienten über.

Es gelten zunächst die beiden Doppelgleichungen:

$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dP = \mathfrak{R}\,dx + \mathfrak{S}\,dy$$
$$dq = s\,dx + t\,dy, \text{ und } \qquad dQ = \mathfrak{S}\,dx + \mathfrak{T}\,dy.$$

Setzen wir nun z. B. in die letzten Gleichungen P, Q, x und y gemäss der obigen Relationen ihre Werte ein, so gehen dieselben über in:

$$-dx = \mathfrak{R}\,dp + \mathfrak{S}\,dq,$$
$$-dy = \mathfrak{S}\,dp + \mathfrak{T}\,dq.$$

Aus dem ersten Gleichungspaar dagegen ergiebt sich durch Auflösen nach dx und dy:

$$-dx = \frac{-t\,dp + s\,dq}{rt - s^2},$$
$$-dy = \frac{s\,dp - r\,dq}{rt - s^2}.$$

Durch Vergleichung ergibt sich demnach:

$$\mathfrak{R} = \frac{t}{s^2 - rt}, \quad \mathfrak{S} = \frac{-s}{s^2 - rt}, \quad \mathfrak{T} = \frac{r}{s^2 - rt}, \text{ und hieraus folgt noch: } \mathfrak{S}^2 - \mathfrak{R}\mathfrak{T} = \frac{1}{s^2 - rt}.$$

In analoger Weise oder auch direkte Auflösung der letzthingeschriebenen Gleichungen erhält man darauf die dualistischen Formeln:

$$r = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}^2 - \mathfrak{R}\mathfrak{T}}, \qquad s = \frac{-\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}^2 - \mathfrak{R}\mathfrak{T}}, \qquad t = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}^2 - \mathfrak{R}\mathfrak{T}}.$$

Damit haben wir aber bereits die gesuchten Transformationsformeln für die Differentialquotienten 2. Ordnung erhalten.

Wir wollen nun noch 2 Beispiele durchführen, welche die Umsetzung partieller Differentialgleichungen von Punktcoordinaten in Ebenencoordinaten betreffen. Als erstes sei die Gleichung der Minimalflächen gewählt:

$0 = 2pqs - (1+q^2)r - (1+p^2)t$. Dieselbe geht durch die Substitutionen in die einfache Form über:

$$0 = 2XYS - (1+Y^2)T + (1+X^2)R.$$

Indem hier nur die Differentialquotienten S, T, R und zwar in jedem Gliede einmal auftreten, haben wir es mit einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung zu thun. Hierin liegt für die Theorie der Minimalflächen ein bemerkenswerter Ansatz.

Als zweite Beispiel sei die allgemeine sogenannte Monge - Ampère'sche Gleichung, die uns später noch beschäftigen wird. Dieselbe lautet:

$A \cdot r + B \cdot s + C t + D(s^2 - rt) + E = 0$, wo die Coefficienten A, B, C u. s. w. abkürzend Ausdrücke der Grössen x, y, z, p, q bezeichnen. Es ist wesentlich hervorzuheben, dass die Grössen r, s, t gerade in der charakteristischen Einfachheit vorkommen, wie sie aus der Formel

hervorleuchtet. Durch Substitution der Ebenencoordinaten geht die Gleichung dann über in:

$$A'.T - B'.S + C'.R + D' + E'(S^2 - RT) = 0,$$ woselbst wieder die Bezeichnungen A', B', C' u. s. w. als Abkürzung für Ausdrücke der Grössen X, Y, Z, P, Q eingeführt sind.

Jede Monge-Ampère'sche Gleichung geht daher bei unserer Transformation wieder in eine Monge-Ampère'sche Gleichung über.

Nun noch einige Werte über die weitere Ausdehnung der hiermit angebahnten Untersuchungen, die auf der Einführung der Ebenencoordinaten an Stelle der Punktcoordinaten beruhten.

Wir können doch die Grössen X, Y, Z auch als Parameter einer dreifach unendlichen Flächenmannigfaltigkeit deuten, die etwa durch die Gleichung

$$l(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

[illegible] kann [illegible] X, Y, Z als Parameter auftreten [illegible] Gleichung braucht keineswegs wie in dem von uns [illegible] Falle [illegible] zu sein. Die Frage wird [illegible] wie transformiren sich dann die Coordinaten, [illegible] Differentialquotienten und [illegible] die Differentialgleichungen? Die [illegible] welche [illegible] eine Gleichung $Z = F(X, Y)$ [illegible] welcher [illegible] Flächen $X, Y,$

ungen, welche die darzustellende Fläche, umhüllen"
dieser Frage hat sich bereits Plücker beschäftigt. –
n könnte weiter x, y, z mit Lie auch als Parame-
von ∞^3 Curven deuten, [deren Gesammtheit wir,
Lie, einen Curvencomplex nennen können.] Man
dessen Arbeit Ann. 5. 1871. Eine Gl. $z = F(x, y)$ liefert
n aus der 3fach unendlichen Curvenschaar der Com-
ex eine Congruenz heraus, welche eine Brennfläche be-
, und von dieser Brennfläche sagen wir dann, sie
eben durch die Gleichung $z = F(x, y)$ als Umhüll-
sgebilde dargestellt. Dieselbe Fläche denken wir
nun wieder in gewöhnlichen Punktcoordinaten
ben; und die Frage ist nun, wie bei ihr die Grös-
x, y, z, p, q, r, s, t mit den zu derselben Flächenstelle
rigen Grössen P, Q, R, S, T zusammenhängen mögen.
sehen allgemein:
Wenn wir mit Plücker und Lie an Stelle der Punkte ir-
welche andere von drei Parametern abhängende Ge-
e als Raumelement einführen, haben wir eine gros-
Reihe von Transformationen für die Differentialglei-
gen der Raumgeometrie an der Hand.
Letzte Verallgemeinerung würde sein, dass wir sol-
Flächen- oder Curvenschaaren einführen, die von
r als drei Parametern abhängen. Die ∞^4 Kugeln
Kugelgeometrie und die ∞^4 Geraden der Linien-

denem analytischen Apparat zu behandeln, sei es unter Benutzung verschiedener Punktcoordinaten, sei es von Ebenencoordinaten, Kugelcoordinaten u. s. w; wir werden so zu verschiedenen Gleichungen für diese Figur geführt. Jetzt jedoch wollen wir dieselbe Formel $f(x, y, z, \ldots) = 0$ in mehrere Weise geometrisch interpretiren indem wir die Grössen $x, y, z, \ldots$ bald als gewöhnliche Punktcoordinaten, bald als höhere Punktcoordinaten u. s. w. deuten. Solcherweise werden wir verschiedene geometrische Figuren in dieser einen Gleichung dargestellt finden. Den Uebergang von der ersten Figur zu der zweiten, dritten etc. nennen wir dann eine Transformation; unsere Aufgabe ist es, dieselbe geometrisch aufzufassen.

Dabei beschränken wir uns, um uns bestimmt ausdrücken zu können, zunächst auf gewöhnliche Punktcoordinaten und betrachten demnach im ersten Kapitel allein die:

I. Punkttransformationen des Raumes.

Es seien die Coordinaten wie gewöhnlich bezeichnet mit x, y, z, und es mögen die folgenden Bezeichnungen bestehen, welche die Coordinaten $x\,y\,z$ und $x'\,y'\,z'$ verbinden.

$$x' = \varphi(x, y, z), \quad y' = \chi(x, y, z), \quad z' = \psi(x, y\,z).$$

Während wir früher diese 3 Formeln so interpretirten,

wir kommen später unter allgemeineren Gesichtspunkten auf diese Beziehung zurück.

Nun gehen wir zu den zweiten Differentialquotienten über.

Es gelten zunächst die beiden Doppelgleichungen:

$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad d\mathfrak{P} = \mathfrak{R}\,d\mathfrak{X} + \mathfrak{S}\,d\mathfrak{Y}$$
$$dq = s\,dx + t\,dy, \text{ und } \quad d\mathfrak{Q} = \mathfrak{S}\,d\mathfrak{X} + \mathfrak{T}\,d\mathfrak{Y}.$$

Setzen wir nun z. B. in die letzten Gleichungen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ gemäss der obigen Relationen ihre Werte ein, so gehen dieselben über in:

$$-dx = \mathfrak{R}\,dp + \mathfrak{S}\,dq,$$
$$-dy = \mathfrak{S}\,dp + \mathfrak{T}\,dq.$$

Aus dem ersten Gleichungspaar dagegen ergiebt sich durch Auflösen nach dx und dy:

$$-dx = \frac{-t\,dp + s\,dq}{rt - s^2},$$
$$-dy = \frac{s\,dp - r\,dq}{rt - s^2}.$$

Durch Vergleichung ergibt sich demnach:

$$\mathfrak{R} = \frac{t}{s^2 - rt}, \quad \mathfrak{S} = \frac{-s}{s^2 - rt}, \quad \mathfrak{T} = \frac{r}{s^2 - rt}, \text{ und hieraus folgt noch: } \mathfrak{S}^2 - \mathfrak{R}\mathfrak{T} = \frac{1}{s^2 - rt}.$$

In analoger Weise oder auch direkte Auflösung der letzthingeschriebenen Gleichungen erhält man darauf die dualistischen Formeln:

$r = \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{S}^2 - \mathfrak{R}\mathfrak{T}}$, $s = \frac{-\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}^2 - \mathfrak{R}\mathfrak{T}}$, $t = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}^2 - \mathfrak{R}\mathfrak{T}}$.

Damit haben wir aber bereits die gesuchten Transformationsformeln für die Differentialquotienten 2. Ordnung erhalten.

Wir wollen nun noch 2 Beispiele durchführen, welche die Umsetzung partieller Differentialgleichungen von Punktcoordinaten in Ebenencoordinaten betreffen. Als erstes sei die Gleichung der Minimalflächen gewählt:

$0 = 2pqs - (1+q^2)r - (1+p^2)t$. Dieselbe geht durch die Substitutionen in die einfache Form über:

$0 = 2XYS - (1+Y^2)T + (1+X^2)R$.

Indem hier nur die Differentialquotienten S, T, R und zwar in jedem Gliede einmal auftreten, haben wir es mit einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung zu thun. Hierin liegt für die Theorie der Minimalflächen ein bemerkenswerter Ansatz.

Das zweite Beispiel sei die allgemeine sogenannte Monge-Ampère'sche Gleichung, die uns später noch beschäftigen wird. Dieselbe lautet:

$A \cdot r + B \cdot s + Ct + D(s^2 - rt) + E = 0$, wo die Coefficienten A, B, C u. s. w. abkürzend Ausdrücke der Grössen x, y, z, p, q bezeichnen. Es ist wesentlich hervorzuheben, dass die Grössen r, s, t gerade in der charakteristischen Einfachheit vorkommen, wie sie aus der Formel

hervorleuchtet. Durch Substitution der Ebenencoordinaten geht die Gleichung dann über in:

$$A'.T - B'.S + C'.R + D' + E'(S^2 - RT) = 0,$$

wobei wieder die Bezeichnungen A', B', C' u. s. w. als Abkürzung für Ausdrücke der Grössen X, Y, Z, P, Q eingeführt sind. Jede Monge-Ampère'sche Gleichung geht daher bei unserer Transformation wieder in eine Monge-Ampère'sche Gleichung über.

Nun noch einige Worte über die weitere Ausdehnung der hiermit angebahnten Untersuchungen, die auf der Einführung der Ebenencoordinaten an Stelle der Punktcoordinaten beruhten.

Wir können doch die Grössen X, Y, Z auch als Parameter einer dreifach unendlichen Flächenmannigfaltigkeit deuten, die etwa durch die Gleichung

$$\Lambda(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

gegeben sein kann, in der X, Y, Z als Parameter auftreten. Diese Gleichung braucht keineswegs, wie in dem von uns behandelten Falle, bilinear zu sein. Die Frage wird sein, wie transformieren sich dann die Coordinaten, ihre ersten und zweiten Differentialquotienten und dementsprechend die Differentialgleichungen? Die Vorstellung ist dabei die, dass man irgend welche Fläche immer durch eine Gleichung $Z = F(X, Y)$ „darstellen" soll, welcher diejenigen Flächen $X, Y,$

genügen, welche die darzustellende Fläche, umhüllen"
Mit dieser Frage hat sich bereits Plücker beschäftigt. -
Man könnte weiter x, y, z mit Lie auch als Parame-
er von ∞^3 Curven denken, [deren Gesammtheit wir,
mit Lie, einen Curvencomplex nennen können.] Man
ehe dessen Arbeit Ann. 5. 1871. Eine Gl. $z = F(x, y)$ liefert
nun aus der 3fach unendlichen Curvenschaar des Com-
plexes eine Congruenz heraus, welche eine Brennfläche be-
itzt, und von dieser Brennfläche sagen wir dann, sie
ei eben durch die Gleichung $z = F(x, y)$ als Umhül-
ungsgebilde dargestellt". Dieselbe Fläche denken wir
ns nun wieder in gewöhnlichen Punktcoordinaten
egeben; und die Frage ist nun, wie bei ihr die Grös-
en x, y, z, p, q, r, s, t mit den zu derselben Flächenstelle
örigen Grössen P, Q, R, S, T zusammenhängen mögen.
Wir sehen allgemein:
ndem wir mit Plücker und Lie an Stelle der Punkte ir-
end welche andere von drei Parametern abhängende Ge-
ilde als Raumelement einführen, haben wir eine gros-
e Reihe von Transformationen für die Differentialglei-
ungen der Raumgeometrie an der Hand.
ine letzte Verallgemeinerung würde sein, dass wir sol-
he Flächen- oder Curvenschaaren einführen, die von
mehr als drei Parametern abhängen. Die ∞^4 Kugeln
er Kugelgeometrie und die ∞^4 Geraden der Linien-

geometrie geben dafür das nächstliegende Beispiel. Auch mit ihrer Hülfe können wir andere Flächen „darstellen", indem wir nach allen „Umhüllungskugeln" oder „Umhüllungslinien" fragen. Wir werden sich nun mit Hülfe der bez. neuen Coordinaten die $x\,y\,z\;p\,q\,r\,s\,t$ darstellen: Allgemein ist diese Frage von Königs untersucht worden, vergl. z. B. dessen Abhandlung in Acta X. 1887. „Sur une classe de formes différentielles" „sur la théorie des systèmes d'éléments."

Zweiter Teil:

[Mo. 9.1.93]

Lehre von den Transformationen.

Die „Lehre von den Transformationen", die wir in der Ueberschrift als den Inhalt des zweiten Teiles der Vorlesung hinstellen, tritt zwar, wie wir sogleich zeigen werden, unseren bisherigen Betrachtungen gegenüber, die mit dem „Wechsel des Coordinatensystems" sich befassen, doch ist die innige Durchdringung beider Gebiete nicht zu verkennen und die Trennung im Vorgehenden auch nicht immer scharf durchgeführt worden. Wir haben als Grundlage der Untersuchung auf der einen Seite die geometrische Figur, auf der anderen Seite den analytischen Apparat eines bestimmten Coordinatensystems. Bisher herrschte die Tendenz vor, eine und dieselbe Figur mit verschie-

nem analytischen Apparat zu behandeln, sei es
der Benützung verschiedener Punktcoordinaten, sei
von Ebenencoordinaten, Kugelcoordinaten u. s. w;
rden so zu verschiedenen Gleichungen für diese
gur geführt. Jetzt jedoch wollen wir dieselbe For-
el $f(x, y, z, \ldots) = 0$ in mehrere Weise geometrisch
terpretiren indem wir die Grössen $x, y, z, \ldots$ bald
gewöhnliche Punktcoordinaten, bald als höhere
nktcoordinaten u. s. w. deuten. Solcherweise wer-
wir verschiedene geometrische Figuren in die-
einen Gleichung dargestellt finden. Den Ueber-
ng von der ersten Figur zu der zweiten, dritten ei-
nen wir dann eine Transformation; unsere Auf-
be ist es, dieselbe geometrisch aufzufassen.
ei beschränken wir uns, um uns bestimmt aus-
cken zu können, zunächst auf gewöhnliche Punkt-
rdinaten und betrachten demnach im ersten Ka-
el allein die:

Punkttransformationen des Raumes.

seien die Coordinaten wie gewöhnlich bezeichnet
it x, y, z, und es mögen die folgenden Bezeich-
ngen bestehen, welche die Coordinaten $x\,y\,z$
d $x'y'z'$ verbinden.

$$x' = \varphi(x, y, z), \quad y' = \chi(x, y, z), \quad z' = \psi(x, y, z).$$

hrend wir früher diese 3 Formeln so interpretirten,

dass wir sagten, sie ordnen dem Punkte x, y, z die 3 neuen Coordinaten x', y', z' zu, werden wir jetzt sagen, sie ordnen dem Punkte x, y, z einen neuen Punkt mit den (gewöhnlichen) Coordinaten $x' y' z'$ zu. Jetzt wird daher das Coordinatensystem als unverändert gewählt und der Punkt „transformiert", früher war der Punkt fest und das Coordinatensystem wurde transformirt. In den angegebenen Formeln ist somit die allgemeinste Form der Punkttransformation gegeben.

Die erste specielle Art der letzteren, die wir genauer betrachten müssen, ist die lineare Transformation, die durch die Gleichungen gegeben wird:

$$x' = \frac{ax + by + cz + d}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''}, \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'z + d'}{a'''x + b'''x + c'''z + d'''},$$

$$z' = \frac{a''x + b''y + c''z + d''}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''}.$$

Man bemerkt, der Nenner ist in allen 3 Ausdrücken derselbe. Hierin liegt gerade die grosse Zweckmässigkeit und Einfachheit der durch die Formeln gegebenen Beziehung. Führen wir homogene Coordinaten ein, indem wir statt x, y, z; $x' y' z'$ die Verhältnisse $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$; $\frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}, \frac{z'}{t'}$ setzen, so können wir die gegebenen Formeln unter Benutzung des Proportionalitätsfaktors ρ auch schreiben:

$$\rho x' = ax + by + cz + \partial t,$$
$$\rho y' = a'x + b'y + c'z + \partial' t,$$
$$\rho z' = a''x + b''y + c''z + \partial'' t,$$
$$\rho t' = a'''x + b'''y + c'''z + \partial''' t.$$

Es springt jetzt die Symmetrie der Formeln unmittelbar in die Augen: Die neuen homogenen Variablen werden einfach mit ganzen homogenen linearen Funktionen der alten homogenen Variablen proportional gesetzt. Wenden wir die oft bequeme Schreibweise an, die verschiedenen Coordinaten durch Indices desselben Buchstabens zu unterscheiden, so können wir die sämmtlichen Formeln in der einen zusammenfassen:

$$\rho \cdot x_i' = \sum_1^4{}_k\, a_{ik}\, x_k,$$

die für $i = 1, 2, 3, 4$ gilt. Nun wird offenbar der Wert, den die Determinante der Coefficienten a_{ik} dieser Gleichungen annimmt, besonders von Wichtigkeit sein. Wir nehmen denselben zunächst immer von Null verschieden, damit sich die Coordinaten x_k umgekehrt aus den x_i' eindeutig in ihren Verhältnissen berechnen lassen. Doch wollen wir schon jetzt vormerken, dass wir später auch gerade solche Transformationen betrachten werden, die einem verschwindendem Determinantenwerte entsprechen.

Was bedeutet nun unsere Transformation geometrisch? Diese Frage hat in ganz allgemeiner Form Moebius zu-

erst in seinem schon oft von uns genannten barycentrischen Calcul (1827) aufgeworfen und behandelt. Derselbe führte dabei statt „Transformation" die Bezeichnung „Verwandtschaft" ein, indem er überhaupt zwei durch irgend welche Gleichung aufeinander bezogenen Gebilde mit einander „verwandt" nennt. In unserm speciellen Falle linearer Gleichungen zwischen homogenen Punktcoordinaten bezeichnet Moebius die Verwandtschaft der beiden Punkträume insbesondere als „Collineation". (Diese Bezeichnung ist später von Chasles in Homographie umgeändert worden). Dieser Ausdruck wird sofort verständlich, wenn wir mit Moebius solche Punkte collinear nennen, die auf derselben Geraden liegen. Moebius' Bezeichnung will aussagen: Punkte, welche collinear sind, gehen bei unsrer Verwandtschaft wieder in collineare Punkte über, oder in gewöhnlicher Ausdrucksweise: gerade Linien bleiben gerade Linien. Um dies ins Einzelne nachzuweisen, stellen wir folgende Betrachtung an: Zunächst folgt nach der Determinantentheorie aus den Gleichungen $\rho x'_i = \sum_1^n a_{ik} x_k$ mit der Bedingung: $|a_{ik}| \gtrless 0$ das Bestehen der umgekehrten Relation $\sigma x_i = \sum_1^n A_{ik} x'_k$, in denen σ wieder ein Proportionalitätsfaktor ist*), d. h. in Worten:

Jedem Punkt x entspricht ein Punkt x' und jedem

*) A_{ik} soll dabei die zum Elemente a_{ik} in der Determinante der $|a_{ik}|$ zugehörige Unterdeterminante sein.

unkt x' ein Punkt x.

ind nun irgend zwei Punkte x_i und y_i gegeben, so
ird ein beliebiger Punkt ihrer Verbindungslinie
ach die Coordinaten $\lambda x_i + \mu y_i$ dargestellt werden.
urch den Gleichungen $\rho \cdot x'_i = \sum a_{ik} x_k$ und $\rho \cdot y'_i$
$\sum a_{ik} y_k$ folgen aber sofort durch Zusammenfassen
mit den Multiplicatoren λ und μ die neuen Gleichun-
en: $\rho \cdot (\lambda x'_i + \mu y'_i) = \sum a_{ik} (\lambda x_k + \mu y_k)$. Dem Punkte
$\lambda x_i + \mu y_i$ entspricht also gerade der Punkt $\lambda x'_i + \mu y'_i$.
ndem nun $\lambda x'_i + \mu y'_i$ wieder auf der Verbindungsgra-
en von x'_i und y'_i liegt, so haben wir den Satz:
rgend welchem Punkte, der auf der Verbindungsge-
den von x und y liegt, entspricht wieder ein Punkt,
er mit x' und y' auf gerader Linie liegt, und umge-
ehrt. Dies aber ist unsre obige Behauptung (in ver-
chärfter Form). Offenbar können wir den Satz und
einen Beweis noch leichter erweitern, indem wir
ie Punkte $\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i$ betrachten, die mit den
Punkten x_i, y_i, z_i in einer Ebene liegen. Es ergibt
ich:
Punkte, die in einer Ebene liegen, ergeben bei der
ransformation wieder Punkte, die in einer Ebene
iegen und umgekehrt.
n diesen Sätzen sehen wir die Haupteigenschaf-
en der Collineation vor uns. Wir wollen insbe-

sondere noch von den unendlich weiten Punkten reden. Ein Punkt liegt im Unendlichweiten, wenn bei gewöhnlicher Coordinatenbezeichnung eine der Coordinaten ∞ gross wird oder wenn bei der von uns benutzten homogenen Schreibweise $x_4 = 0$ bezw. $x_4' = 0$ ist. Setzen wir $x_4 = 0$, so ergiebt unsere Transformationsformel die Gleichung:

$$a_{14} x_1' + a_{24} x_2' + a_{34} x_3' + a_{44} x_4' = 0$$

und setzen wir $x_4' = 0$, so erhält man analog:

$$a_{14} x_1 + a_{24} x_2 + a_{34} x_3 + a_{44} x_4 = 0,$$

d. h. in beiden Fällen die Gleichung einer Ebene. Bei der Collineation verwandeln sich also die ∞ weiten Punkte in eine Ebene, und da im allgemeinen bei einer Collineation aus einer Ebene eine Ebene wird, so ist es bequem, die Ausdrucksweise zu wählen, dass die ∞ weiten Punkte selbst eine Ebene bilden.

Es giebt natürlich eine besondre Art der Collineation, bei der diese letzte Verabredung nicht nötig ist, wenn nämlich dem Werte $x_4 = 0$ der Wert $x_4' = 0$ entspricht. Unsere Gleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned}
\rho\, x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4, \\
\rho\, x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4, \\
\rho\, x_3' &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4, \\
\rho\, x_4' &= x_4,
\end{aligned}$$

indem wir den Coefficienten der letzten Gleichung sogleich in ϱ hineinziehen. Hier brauchen wir in der That nicht darum zu sorgen, ob das Unendlichferne des Raumes eine Ebene bildet oder nicht. Moebius bezeichnet eine solche Collineation, bei der die ∞ ferne Ebene ∞ fern bleibt, insbesondere als „affine" Verwandschaft.

Wie leicht zu sehen, ist diese dadurch ausgezeichnet, dass beim Gebrauche nicht homogener Parallelcoordinaten die Nenner in den Beziehungen fortfallen.

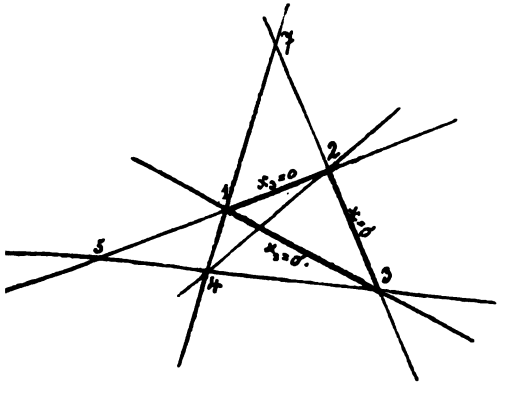
Nun ist es eine sehr interessante Frage, mit der auch Moebius sich bereits beschäftigt hat, die allgemeinste Collineation geometrisch zu konstruiren. Dieselbe hat 15 Constanten, da es ja auf das Verhältniss der 16 Coefficienten a_{ik} in den Substitutionsgleichungen ankommt. Wenn wir nun einem bestimmten Punkt x_i einen bestimmten Punkt x_i' zuordnen, so erhalten wir offenbar 3 lineare Bedingungen für die a_{ik}. Da wir nun 15 Bedingungen zur Bestimmung der 15 Constanten nötig haben, so erhalten wir den Satz: Eine Collineation ist eindeutig bestimmt, sofern man irgend 5 Punkten, von denen keine 4 in einer Ebene liegen, die ihnen entsprechenden Punkte, von denen na-

dürfen auch keine 4 in einer Ebene liegen dürfen, zugeordnet hat. Die hinzugefügten Bedingungen finden ihre analytische Begründung darin, dass bei der Berechnung der a_{ik} keine der 4 gliedrigen Determinanten Coefficienten von 4 Punkten verschwinden dürfen. Die Notwendigkeit derselben erhellt andererseits, wenn wir dazu übergehen, uns rein geometrisch ein Bild von der gegebenen Beziehung beider Punktgebilde zu verschaffen. Wir fragen uns: *Wie werden wir zu jenen 5 Punktepaaren beliebig viele weitere sich entsprechende Punkte hinzuconstruiren können?*

Diese Frage beantwortet die sogenannte *Abconstruktion von Mobius*. Derselbe legt nämlich durch je 3 von den 5 Grundpunkten des einen Raumes ihre Ebenen; dieselben werden sich zu dreien in bestimmten neuen Punkten schneiden. Diese neuen Punkte werden nun in Verbindung mit den alten genau so verwendet: wieder werden die sämmtlichen Punkte zu je dreien durch Ebenen verbunden gedacht, die zu weiteren Schnittpunkten führen und so fort. Ganz der analoge Proceß wird mit den Punkten des andern Raumes ausgeführt, indem man von den dort gegebenen 5 Grundpunkten ausgeht. So entsteht in beiden Räumen ein

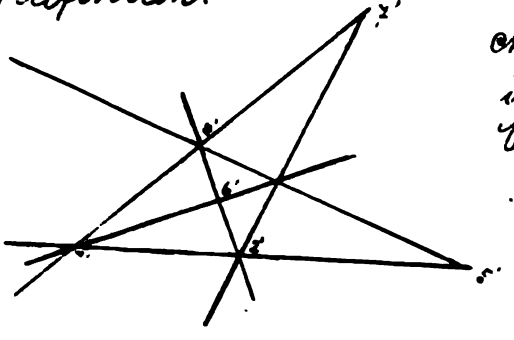
eigenartiges Netzwerk, und nun ist das Wesentliche, dass die Maschen des letzteren schliesslich jenen Raum überall dicht ausfüllen. Dies wird von Moebius streng nachgewiesen. Nun ist die Sache die, dass homologe Punkte der beiden Netze sich bei der Collineation notwendig entsprechen müssen. Daher ist durch die beiderseitige Netzkonstruktion die Verwandtschaft der beiden Räume, sobald wir noch zufügen, dass es sich um eine stetige Beziehung handeln soll, vollkommen festgelegt.

Wir wollen uns diese Verhältnisse noch et- [Di. 10.I.93]
was näher führen, indem wir uns einmal den analogen geometrischen Vorgang in der Ebene, d.h. bei der Beschränkung auf 3 homogene Variable, klar machen. Alsdann können wir leicht die einzelnen Schritte mit der Zeichnung verfolgen. Wir haben jetzt von 4 Grundpunkten auszugehen, von denen keine 3 in einer Geraden liegen; in der Figur sind dieselben mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet.



Ihre Verbindungslinien führen uns sogleich zu den Punkten 5, 6 und 7. Diese können wir weiter untereinander durch neue Geraden verbinden,

die zu neuen Schnittpunkten führen. Und so fahren wir unablässig fort. Wir wollen nun das Dreieck der Punkte 1, 2, 3 als Coordinatendreieck zu Grunde legen und den Punkt 4 als „Einheitspunkt" wählen. Dann ergiebt eine nähere Betrachtung zunächst den Satz: Alle Netzpunkte sind rationale Punkte in diesem Coordinatensystem d. h. ihre Coordinaten werden durch das Verhältniss ganzer Zahlen gegeben. Wichtiger jedoch ist noch die Umkehrung, auf deren übrigens nicht ganz einfachen Beweis wir leider nicht eingehen können: Jeder Punkt, der in unserem Coordinatensystem rational ist, ist ein Netzpunkt. Aus diesen Sätzen folgt dann unmittelbar, dass die Netzpunkte in der Ebene überall dicht liegen. Zwischen den rationalen Punkten liegen nun die irrationalen, die nicht durch eine endliche Zahl von Verbindungen geliefert werden; denselben wird man jedoch durch Netzpunkte beliebig nahe kommen und sie selbst daher durch einen Grenzübergang definiren.



Nun werden wir noch in unserer zweiten Ebene dieselbe Konstruktion ausfüh-

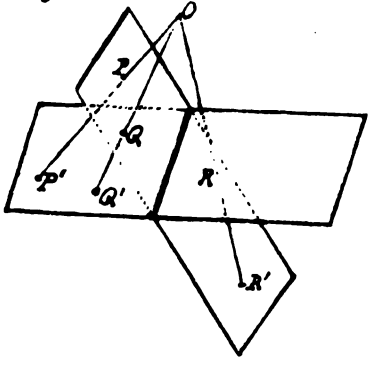
ren, ausgehend von 4 Punkten 1, 2, 3, 4. Setzt man dann allemal diejenigen beiden rationalen Punkte einander entsprechend, zu denen man in analoger Weise in beiden Ebenen gelangt ist, während man diejenigen irrationalen Punkte einander zuweist, welche beiderseits durch den gleichen Grenzprozess definiert werden können, so hat man anschaulich die Collineation vor Augen, die zwischen den beiden Ebenen festgelegt ist.

Bei der Möbius'schen Netzkonstruktion haben wir, was man wohl beachten mag, von einer linearen Beziehung zwischen den Coordinaten beider Ebenen noch gar nicht gesprochen; indem wir nun aber bemerken, dass eine solche durch das Entsprechen der 4 Punktepaare eindeutig festgelegt wird und darauf als Collineation die beiderseitigen Netzpunkte genau so geordnet, wie unsere geometrischen Konstruktionen, so folgt:

dass jede Collineation zweier Ebenen, umgekehrt mit einer linearen Substitution der Coordinaten zusammenhängt, dass aber die lineare Transformation geometrisch völlig charakterisiert ist, wenn wir sagen, sie sei eine Collineation. Ganz genau entsprechend mit Kreis in der Ebene

liegen die Verhältnisse im Raume, wie leicht zu übersehen ist, oder überhaupt bei mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten (Räumen); wie sich die Sache für eindimensionale Mannigfaltigkeiten stellt, werden wir erst weiter unten erörtern.

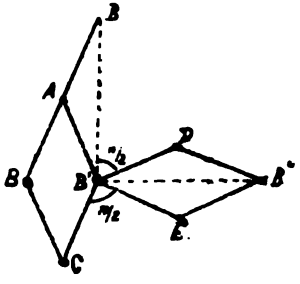
Nun wollen wir doch auch eine unmittelbare lebendige Anschauung uns verschaffen, wie die collineare Beziehung zwischen 2 Ebenen stattfindet. Wir betrachten ein Beispiel, das in den Anordnungen immer wieder hervortritt, indem wir sagen: <u>Jede Perspektive, durch welche 2 Ebenen auf einander bezogen werden, liefert eine Collineation dieser Ebenen.</u> Wir haben uns zu denken, dass allemal diejenigen Punkte der Ebenen einander zugeordnet sind, in denen ein beliebiger Strahl von einem festen Augenpunkte O aus die letzteren durchdringt. Dass dies in der That eine Collineation giebt, ist von selbst einleuchtend.



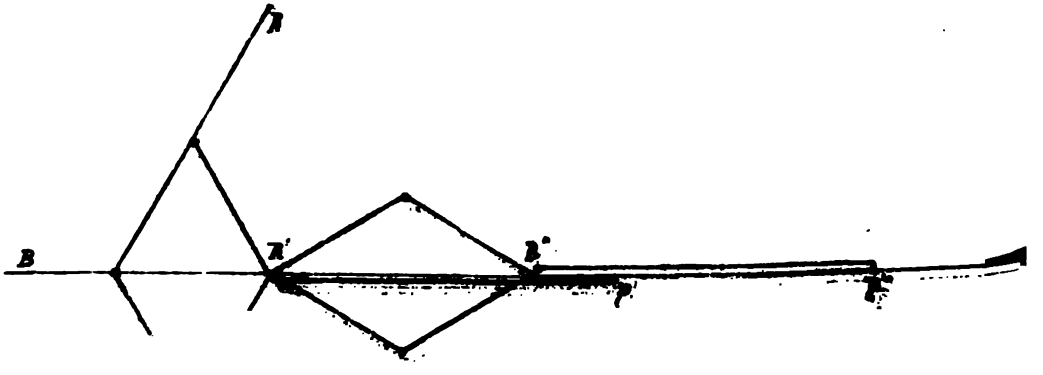
Diese Art der Transformation spielt bekanntlich eine grosse Rolle in der darstellenden Geometrie. Wir können uns nun fragen, wie die Formeln heissen, welche die Beziehung der beiden Ebenen in diesem Specialfall angeben, wie weit dieselben sich

noch von den Formeln der allgemeinen Collineation unterscheiden etc., dann wieder, wie man, wenn die beiden Zeichenebenen neben einander liegen, die perspektivische Figur zu einer gegebenen construiren kann u.s.w. Indem wir wegen aller dieser Fragen auf ausführlichere Darstellungen verweisen, wollen wir hier sogleich einen Apparat kennen lernen, der in einfachster Weise aus einer vorgelegten Zeichnung eine perspektivische zu entwerfen gestattet. Man nennt solche Apparate dementsprechend „Perspektographen"; der von uns zu erklärende ist von einem Ingenieur C Ritter in Frankfurt a/M. konstruirt worden, und dürfte in seiner Ausführung einer der einfacheren Apparate sein. Um das ihm zu Grunde liegende Princip zu erkennen, wollen wir vorerst einen seiner Teile in seiner mechanischen Construktion für sich betrachten. Derselbe besteht aus einem sogenannten „Froschschenkelsystem". Dasselbe zeigt aus Holzstäben zusammengefügt zwei Rhombengelenksysteme, die gleiche Seitenlängen haben. Dieselben sind jedoch solcherweise mit einander fest verbunden, dass zwei aufeinanderfolgende Seiten des einen Rhombus senkrecht stehen auf zwei Seiten des andern, wie die Figur es zeigt. Die Seite A B. ist ausserdem über A hinaus um sich selbst verlängert. Im übrigen befinden sich in sämmtlichen

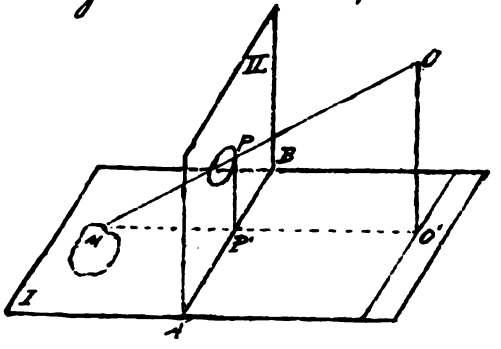
Eckpunkten Gelenke, welche dem System gestatten, sich zusammenzuziehen oder auszudehnen. Nun ist leicht zu sehen, dass die punktierten Linien RR' und R'R'' bei jeder Stellung der Rhomben einander gleich sind und aufeinander senkrecht stehen. In der That sind unsere beiden Rhomben immer congruent und zu einander senkrecht orientiert. –



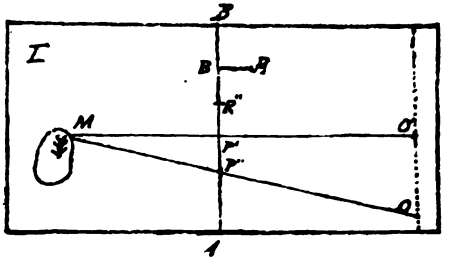
Die Punkte R und R'' sind nun in dem Apparat gezwungen auf einer geraden Linie AB sich zu bewegen, indem das Froschschenkelsystem in zwei gleichlange im Punkte R und R'' befestigte Stäbe sich fortsetzt (R'P' und R''P''), die gegen einander beweglich, als längs AB fahrbare Schlitten befestigt sind. Es ist daher insbesondere P'P'' stets = R'R'' d. h. ebenfalls = RR'. Die einfache Bedeutung der Hinzufügung der beiden Leitstangen R'P' und R''P'' werden wir sogleich erkennen.



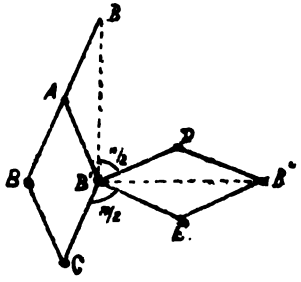
Machen wir nach dieser Vorbemerkung uns nun die Theorie des Apparates klar. Man denke sich, es sei von einer gegebenen Figur der Ebene I das perspektivische Bild vom festen Punkte O aus auf die zu ersterer senkrechte Ebene II zu entwerfen. Ein beliebiger Punkt M möge seinen Bildpunkt in P haben. Man fälle



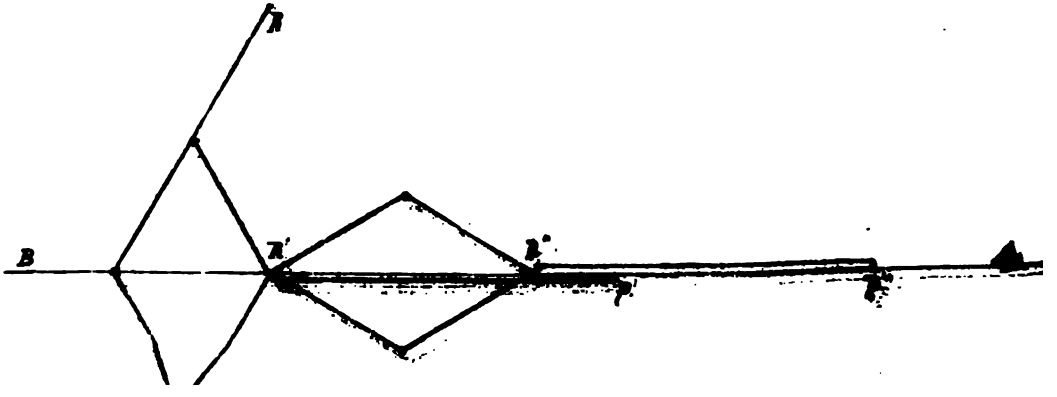
die Lote OO' und PP' auf die Grundebene I, und denke darauf die Dreiecksfläche MOO', die auch die Punkte PP' enthält, um die Linie MO' in O'' vielleicht nach vorn umgeklappt, wobei P in P'' O in O'' übergehen soll. Andererseits klappe man die Ebene II um AB nach rechts hin in die Ebene I um und verschiebe sie dann längs AB noch um ein beliebiges Stück, so dass die in ihr enthaltenen Punkte P und P' in den Punkten R und R' zu liegen kommen. Nun sind wir sogleich am Ziel. Es ist $R''R = P'P''$; wir nehmen noch einen zweiten Punkt R' auf der Geraden AB hinzu, so dass $P'P'' = R'R'$



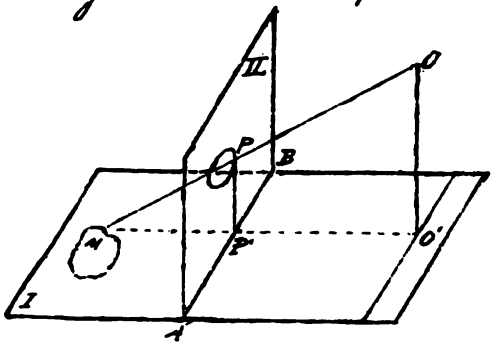
Eckpunkten Gelinke, welche dem System gestatten, sich zusammenzuziehen oder auszudehnen. Nun ist leicht zu sehen, dass die punktierten Linien RR' und R'R'' bei jeder Stellung der Rhomben einander gleich sind und aufeinander senkrecht stehen. In der That sind unsere beiden Rhomben immer congruent und zu einander senkrecht orientiert. –



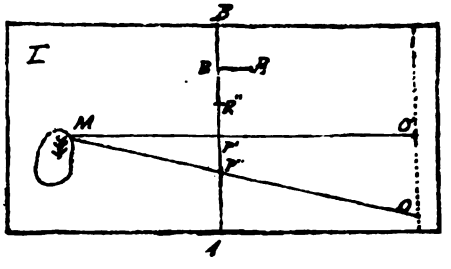
Die Punkte R und R'' sind nun in dem Apparat gezwungen auf einer geraden Linie AB sich zu bewegen, indem das Froschschenkelsystem in zwei gleichlange im Punkte R und R'' befestigte Stäbe sich fortsetzt (R'P' und R''P''), die gegen einander beweglich, als längs AB fahrbare Schlitten befestigt sind. Es ist daher insbesondere P'P'' stets = R'R'' d.h. ebenfalls = RR'. Die einfache Bedeutung der Hinzufügung der beiden Leitstangen R'P' und R''P'' werden wir sogleich erkennen.



Machen wir nach dieser Vorbemerkung uns nun die Theorie des Apparates klar. Man denke sich es sei von einer gegebenen Figur der Ebene I das perspektivische Bild vom festen Punkte O aus auf die zu ersterer senkrechte Ebene II zu entwerfen. Ein beliebiger Punkt M möge seinen Bildpunkt in P haben. Man fälle



die Lote OO' und PP' auf die Grundebene I, und denke darauf die Dreiecksfläche MOO', die auch die Punkte PP' enthält, um die Linie MO' in O'' vielleicht nach vorn umgeklappt, wobei P in P'', O in O'' übergehen soll. Andererseits klappe man die Ebene II um AB nach rechts hin in die Ebene I um und verschiebe sie dann längs AB, noch um ein beliebiges Stück, so dass die in ihr enthaltenen Punkte P und P' in den Punkten R und R' zu liegen kommen. Nun sind wir sogleich am Ziel. Es ist $R'R = P'P''$; wir nehmen noch einen zweiten Punkt R'' auf der Geraden AB hinzu, so dass $P'P'' = R'R''$



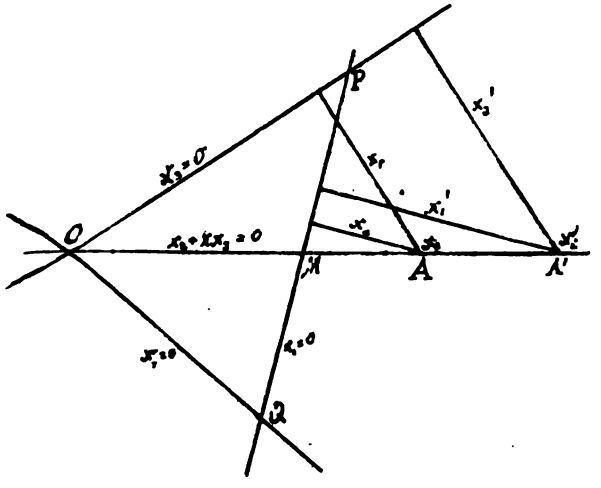
wird. Die Punkte O' und O'' sind in der Ebene I als fest anzusehen, die Punkte P' und P'' werden bei der Bewegung des Punktes M stets durch 2 Stahlen M O' und M O'' auf ct B gegeben und hierdurch auch die Punkte R', R'', R bestimmt. Beschreibt daher der Punkt M die gegebene Figur, so beschreibt der Punkt R die gesuchte perspektivische Figur. Nun kommt, wie wir sofort verstehen können, zur mechanischen Realisirung dieses Vorganges das beschriebene Proschenkelsystem in Anwendung, dessen Bezeichnungen mit denen unserer letzten Figur einfach zu identificiren sind. Wir haben nur noch ein Wort zu sagen, wie die Punkte P' und P'' mechanisch festgelegt werden. Zu dem Zweck dienen 2 Geradlineale, welche die Schenkel eines Winkels mit dem Scheitel im beweglichen Punkte M bilden und mittels geeigneter Führungen stets durch die Punkte O' resp O'' hindurchgehen. In den Punkten P' und P'' fassen diese Geradlineale die beiden auf ct B beweglichen Schlitten. Ersichtlich haben die Leitstangen P' R' und P'' R'' den Zweck, die einzelnen Teile des Apparates bequem auseinanderzulegen, um so für die Führung des Zeichenstiftes R geeignet Raum zu schaffen. Die Handhabung des Apparates ergiebt sich hiernach von selbst.

Handelte es sich soeben um die durch Raum- [Do. 12.I.93.]

Konstruktion vermittelte perspektivische Beziehung zweier Ebenen auf einander, so wollen wir jetzt eine neue Perspektive kennen lernen, welche jedem Punkte einer Ebene einen andern Punkt der Ebene zuordnet, ohne aus der Ebene selbst herauszugehen. Wir legen ein gewöhnliches Coordinatendreieck mit den Ecken O, P, A zu Grunde und wollen der einfacheren Ausdrucksweise halber die Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes direkt als den Abständen derselben von den Dreiecksseiten proportionale Grössen einführen. Wir betrachten nunmehr die durch folgende Gleichungen vermittelte Punktbeziehung:

$$\begin{aligned} \varrho\, x_1' &= k\, x_1, \\ \varrho\, x_2' &= x_2, \\ \varrho\, x_3' &= x_3, \end{aligned}$$

unter k eine beliebige Constante verstanden.



Wir erkennen sofort die folgenden Sätze: Der Eckpunkt O des Dreiecks entspricht sich selbst, ebenso sämmtliche Punkte der gegenüberliegenden Seite. Ein beliebiger durch den Punkt O gelegter

Strahl $x_2 + \lambda x_3 = 0$ geht gleichfalls in sich über, doch unter bestimmter Vertauschung seiner Punkte. Wir werden sogleich sehen, wie wir auf ihm die einander entsprechenden Punkte konstruieren. — Man bezeichnet die so festgesetzte einfache Beziehung als eine Perspektive. Den Punkt O nennen wir das Centrum, die Gerade $x_1 = 0$ die Axe derselben. Um nun zu einem Punkte $x_i = A$ den zugehörigen Punkt $x_i' = A'$ zu finden, verbinden wir denselben mit O und stellen die einfachen Beziehungen auf:

$$x_3 : x_3' = OA : OA'$$
$$x_1 : x_1' = MA : MA',$$

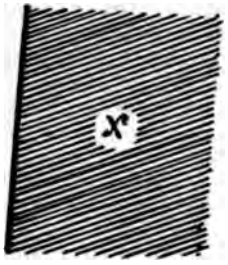
aus denen unter Benutzung unserer Ausgangsgleichungen folgt:

$$\frac{MA'}{OA'} = k \frac{MA}{OA}.$$

Diese Gleichung aber gestattet in einfachster Weise die gewünschte Konstruktion. Wir erkennen zugleich: in der ebenen Perspektive ist nur das Centrum O und die Axe wesentlich, die Strahlen $x_2 = 0$ u. $x_3 = 0$ sind mit allen andern Strahlen durch O gleich berechtigt.

Wir können nun mit leichter Mühe erkennen, wie sich eine Figur, die der Punkt X beschreibt, in die entsprechende Figur des Punktes X' umsetzt. Betrachten wir einmal die ganze Halbebene rechts von der Axe. Nehmen wir, um die Ideen zu fixieren, den Wert von

k ab echten Bruch, etwa $= \frac{1}{2}$, so wird der genannten Halbebene nur ein Parallelstreifen entsprechen, dessen Breite für $k = \frac{1}{2}$ beispielsweise gerade so gross ist, wie der Abstand des Centrums von der Axe. Die zur Axe parallele Begrenzungsgrade des Streifens nennt man die „Fluchtgrade" indem der zu einem beliebigen Punkte x' derselben gehörende Originalpunkt x in der ersten Figur gleichsam ins Unendliche gefloten ist.



Wird k grösser als $\frac{1}{2}$ (bleibt aber noch < 1), so nimmt die Breite des Streifens zu, wird umgekehrt $k < \frac{1}{2}$, so nimmt sie ab, - (wie im Falle $k > 1$ die Perspektive sich verhält ergiebt sich unmittelbar aus den bisherigen Beispielen durch Vertauschung von x' u. x).

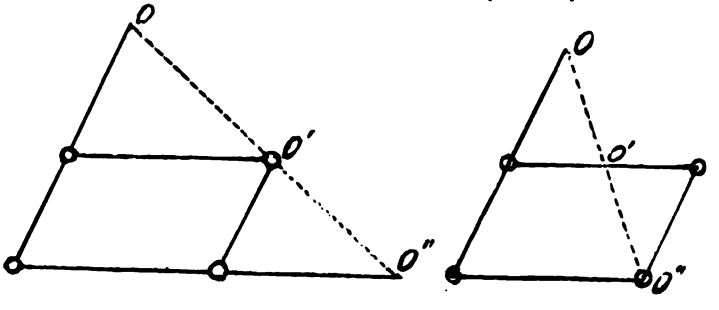
Um die Umformung einer einfachen Figur (für $k < 1$) zu zeigen, geben wir den Satz:

Beispielsweise giebt ein Kreis der Ebene x', der entweder

ganz in unserm Streifen liegt, oder die Fluchtgrade berührt oder sie trifft, in dem schraffierten Teile der x-Ebene eine Ellipse, eine Parabel oder einen Hyperbelast (dessen ergänzender Zweig in dem nicht schraffierten Teile der x-Ebene verlaufen wird).

Nun können wir offenbar auch die Umgebung der Punkte O u. O' mit einander vergleichen. Dieses wird ganz besonders in Frage kommen in dem speciellen Falle, dass die Axe der Perspektive in's Unendliche fällt. Wir erhalten dann einfach eine sogenannte <u>Ähnlichkeitstransformation</u>, wie wir sofort aus unsern Formeln ablesen können, indem ja jetzt an die Stelle der soeben betrachteten Dreieckscoordinaten gewöhnliche Parallelcoordinaten $x=\frac{x_2}{x_1}$, $y=\frac{x_3}{x_1}$ treten. Unsere Formeln ergeben nämlich $x'=\frac{x}{k}$, $y'=\frac{y}{k}$, d.h. <u>alle durch O hindurchlaufenden Geraden behalten ihre Lage, die Entfernungen von O aus aber werden mit einer bestimmten Constanten multipliciert.</u>

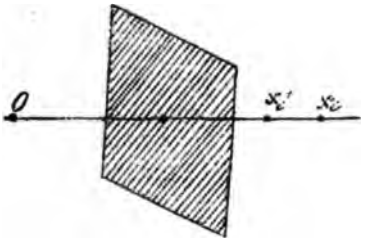
Die hierin liegende Beziehung wird mechanisch durch ein sehr einfaches Instrument, den <u>Storchschnabel o. Pantographen</u> vermittelt, (der praktisch dazu dient



irgend welche vorgelegte Zeichnungen zu vergrössern oder zu verkleinern). Dasselbe besteht aus einem Parallelogrammgelenksystem mit Fortsätzen zweier Seiten derart, dass die Punkte O, O', O'' in gerader Linie liegen. Wird dann einer dieser Punkte festgehalten und der zweite Punkt auf einer Zeichnung entlang geführt, so beschreibt der dritte Punkt eine ähnliche und ähnlich gelegene Zeichnung. Was wir nun soeben in der Ebene ausführten, lässt sich entsprechend auch auf den Raum übertragen durch den Ansatz:

$$\begin{aligned} x_1' &= k\, x_1 \\ x_2' &= k\, x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= x_4 \end{aligned}$$

Wir reden wieder von einem Centrum und einer ausgezeichneten Ebene der Perspektive; letztere ist dadurch definirt, dass alle ihre Punkte ebenso wie das Centrum sich selbst entsprechen. Der ganze Halbraum rechts von dieser Ebene wird



sich jetzt wieder für $k < 1$, auf eine Schicht x' von bestimmter Dicke abbilden. Jeder Strahl durch das Centrum geht gleichfalls, unter Vertauschung seiner Punkte, in

sich über. Man nennt diese specielle Collineation des Raumes die Reliefperspektive; man spricht von einem Hautrelief und einem Basrelief als Abbild einer körperlichen Figur, je nachdem die Schicht einigermassen dick oder nur dünn ist. Angewandt wird diese Perspektive übrigens nicht nur in der Skulptur, sondern z. B. auch als Theaterperspektive zur Bühnendarstellung. Es ist interessant an einem bestimmten Modell, z. B. an der in Brill'schem Verlage erschienenen Reliefperspektive eines Kegels, einer Pyramide mit einer Kugel, und eines Hohlcylinders sich der optischen Täuschung bewusst zu werden, welche uns die dargestellten Dinge unmittelbar in ihren richtigen Dimensionen sichtbar macht. Als Beispiel sei noch die Transformation eines hyperbolischen Paraboloids in ein einschaliges Hyperboloid, oder des letzteren in das erstere erwähnt.

Die gewöhnliche Arbeit des Bildhauers benutzt wieder den speciellen Fall der einfachen Aehnlichkeitstransformation. Doch wie verhält sich im Gegensatz hierzu die Darstellungsmethode des Malers? Derselbe bildet alle Gegenstände des Raumes, die er wiedergiebt, perspektivisch auf einer Ebene ab. Die formelle Darstellung und die Gesetze dieser malerischen Perspektive erhalten wir sehr einfach aus unseren allgemeinen Formeln, wenn wir $K = 0$ setzen; es wird dann:

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= 0 \\ \rho x_2' &= x_2 \\ \rho x_3' &= x_3 \\ \rho x_4' &= x_4 \end{aligned}$$

Dies aber hat zur Folge, dass die Determinante unserer Substitution Null wird; wir haben daher das Beispiel einer Collineation mit verschwindender Determinante, auf deren Möglichkeit wir schon früher hinwiesen. Die Hauptsätze dieser ausgearteten Collineation sind die folgenden:

1). Jedem Punkte x entspricht ein Punkt x_i'; nur das Centrum O der Perspektive bildet eine Ausnahme, sein Abbild ist völlig unbestimmt. Umgekehrt entsprechen jedem Punkte x_i' der ausgezeichneten Ebene alle Punkte x_i, die auf dem zugehörigen Strahl durch O liegen; jedem andern Punkte x_i' entspricht immer nur das Centrum O selbst.

2). Jeder von dem Punkte x_i beschriebenen Geraden entspricht eine Gerade der Punkte x_i'. Eine Ausnahme bilden die Geraden durch O, insofern ihre sämmtlichen von O verschiedenen Punkte sich in denselben Punkt x_i' projicieren. Man kann die formelle Uebereinstimmung so herbeiführen, dass man an alle anderen Punkte x_i' der Geraden als Bilder von O selbst an-

sieht. Umgekehrt entsprechen einer Geraden der Punkte x_i' der ausgezeichneten Ebene unendlich viele Gerade x, welche ihrerseits eine durch O gehende Ebene erfüllen, etc. etc.

Analog wäre noch ein Satz über das Entsprechen von Ebenen hinzuzufügen. Diese elementaren Bemerkungen, die wir leicht noch vervollständigen können, lassen erkennen, wie der Charakter der linearen Transformation ein durchaus andrer wird, sobald die Determinante verschwindet.

Sprechen wir nun insbesondre von dem Nutzen [Fr. 13. I. 93] dieser Betrachtungen für die Geometrie. Wir können durch eine vorliegende Gleichung $f(x_1', x_2', x_3' \ldots) = 0$ mittels der linearen Substitutionen der Variablen in manche andre Gestalt transformieren, die uns dann ein mit dem Gebilde der ersten Gleichung gleichwertiger Gebilde vorstellt. Die collineare Umformung auf der einen Seite, die lineare Transformation auf der andern Seite gestatten uns also, die geometrischen Figuren oder ihre Gleichungen gruppenweise zusammenzufassen und alle die Eigenschaften, welche den Gebilden der Gruppe gemeinsam sein mögen, am einfachsten Repräsentanten der Gruppe zu studieren. So sind für uns die Curven 2. Grades: Ellipse, Hyperbel, Parabel und Kreis, gleichwertig [wie dies durch

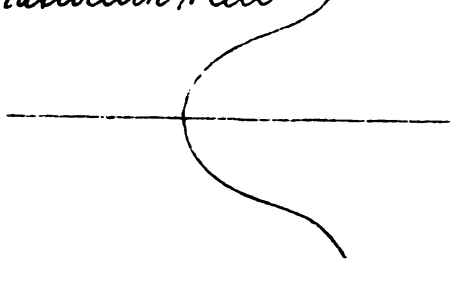
ihre Bezeichnung als „Kegelschnitte" ausgedrückt wird], und dementsprechend können wir am Kreis oder an der Parabel die allen diesen Gebilden gemeinsamen Eigenschaften studieren. Entsprechend sind im Raum die Flächen: Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid, elliptisches Paraboloid und Kugel einerseits und die geradlinigen Flächen 2. Grades: einschaliges Hyperboloid und hyperbolisches Paraboloid andrerseits unter sich collinear verwandt und also zusammengehörig. Dies sind allbekannte elementare Beispiele.

Sprechen wir doch im gleichem Sinne noch kurz von den <u>Curven 3. Ordnung in der Ebene.</u> Dieselben lassen sich durch collineare Umformung auf 5 Typen zurückführen. Wir wollen dieselben zusammenstellen, indem wir mit dem analytischen Ansatz beginnen. Alle Fälle lassen sich durch geeignete lineare Umformungen auf die folgende Gestalt der Gleichung bringen:

$$y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

[in der die Symmetrie der spez. Curvengestalt zur x-Axe ausgesprochen liegt]. Des Näheren gliedert sich die Sache nun wie folgt:

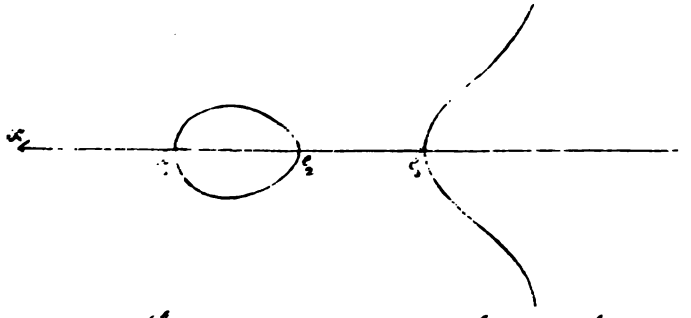
1.) Zwei der Werte e_i sind conjugiert imaginär, der dritte natürlich reell:



<u>Einteilige Curve dritter Ordnung.</u>

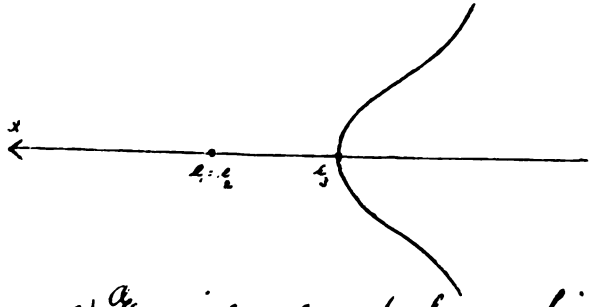
2) Alle Werte e_i sind reell. Dies ergiebt unter der Annahme $e_1 \geq e_2 \geq e_3$ die folgenden Unterfälle:

a). $e_1 > e_2 > e_3$, d.h. alle e_i von einander verschieden.



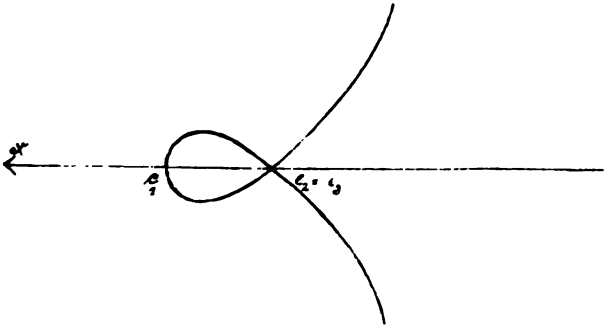
Zweiteilige Curve dritter Ordnung.

b). Es sei $e_1 = e_2$, doch verschieden von e_3



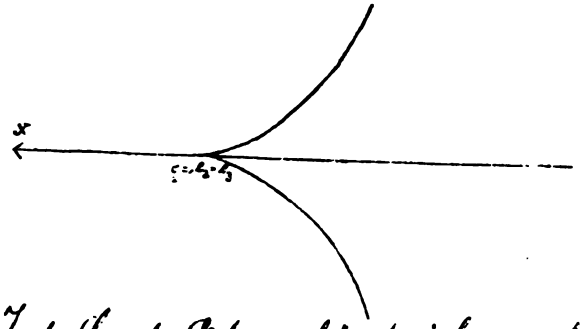
Curve dritter Ordnung mit isoliertem Doppelpunkt.

c). Es sei $e_2 = e_3$, doch verschieden von e_1



Curve dritter Ordnung mit eigentlichem Doppelpunkt.

d). Es sei $l_1 = l_2 = l_3$



Curve dritter Ordnung mit Spitze.

Jede C_3 der Ebene lässt sich durch Collineation, also etwa durch Perspektive, in einen dieser 5 Typen verwandeln, oder anders ausgedrückt: Alle C_3 erscheinen als ebene Schnitte von 5 Kegeln 3. Ordnung, die man erhält, wenn man von einem beliebigen Augenpunkt aus nach den obigen Figuren die Verbindungsstrahlen legt.

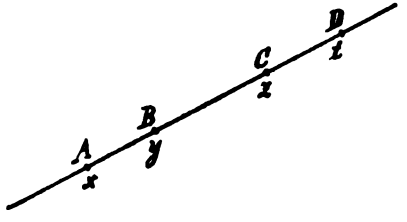
Dieses Resultat der Einteilung der C_3 geht bereits bis auf Newton zurück in dessen Schrift: Enumeratio linearum tertii ordinis (1711); man sehe insbesondere das Kapitel, de generatione curvarum per umbras. Man muss also nicht meinen, dass die projektiven Betrachtungen etwas ausschliesslich Modernes sind.

Wir wollen nun in der Weise weitergehen, dass wir weniger die Theorie der projektiven Geometrie ausführlich entwickeln, als die Hauptstufen ihrer Entwicklung nach ihrer historischen Aufeinander-

folge besprechen. Da ist gleich als erste Stufe zu nennen:

1). Poncelet's Werke 1822. Dort wird zwischen den Eigenschaften der Lage und des Masses bei geometrischen Gebilden unterschieden. Die ersteren sind dadurch charakterisiert, dass sie bei irgendwelchen projektiven Umformungen der Figur unverändert erhalten bleiben, was für die letzteren nicht gilt. Demgemäss wird die gesammte Geometrie in zwei Gebiete getheilt, die wir als Geometrie der Lage und des Masses einander gegenüber stellen können.

Nun hat es offenbar ein ganz besonderes Interesse, aus Massgrößen der geometrischen Gebilde solche Ausdrücke zusammenzusetzen, die bei der Collineation unverändert bleiben, die demnach Eigenschaften der Lage bezeichnen. Das einfachste Beispiel dieser Art bildet das Doppelverhältniss von 4 collinearen Punkten. Sind 4 Punkte $A B C D$ einer Geraden gegeben,



so bezeichnet man als Doppelverhältniss derselben das Streckenverhältniss:

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$

Dasselbe drückt sich in den Coordinaten x, y, z, t der

Punkte, die wir als Abscissen auf der geraden Linie selbst messen, aus als: $\frac{x-z}{x-t} : \frac{y-t}{y-z}$ oder bei homogener Schreibweise $\frac{(x_1 z_2 - x_2 z_1)(y_1 t_2 - y_2 t_1)}{(x_1 t_2 - x_2 t_1)(y_1 z_2 - y_2 z_1)}$, welches wir in leicht verständlicher Abkürzung:

$$\frac{(xz)(yt)}{(xt)(yz)}$$ schreiben wollen.

Dass dieser Ausdruck bei projektiver Umformung unverändert bleibt, wollen wir zunächst für die lineare Transformation der Geraden in sich zeigen, die durch die Gleichung $x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta}$, oder in homogener Form:

$$x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2'$$
$$x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2'$$

(unter Fortlassung des Proportionalitätsfaktors) gegeben sein möge.

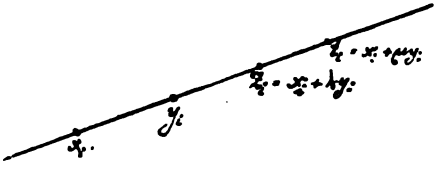
Die entsprechenden Transformationsgleichungen sollen natürlich für die Punkte x, y und t gelten. Setzen wir diese Werte in den soeben mitgeteilten Ausdruck des Doppelverhältnisses ein, so geht z. B. der Faktor (xz) über in:

$$\begin{vmatrix} \alpha x_1' + \beta x_2' & \gamma x_1' + \delta x_2' \\ \alpha z_1' + \beta x_2' & \gamma z_1' + \delta z_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} (x'z').$$

Im Zähler und Nenner hebt sich dann die je zwei-

mal auftretende Determinante der Substitution fort. Die Unveränderlichkeit des Doppelverhältnisses bei linearer Transformation der Geraden in sich ist daher eine Folge des Determinantenmultiplicationssatzes.

Wenn wir nun aber eine lineare Transformation nicht blos in der Geraden selbst, sondern in der Ebene oder im Raume betrachten, so zeigen wir die Invariabilität der Doppelverhältnisse wie folgt:



Die Punkte x_i u. t_i können wir bekanntlich darstellen als $x_i + \lambda y_i$ und $x_i + \mu y_i$, worauf eine einfache Berechnung des Doppelverhältnisses als Wert desselben $\frac{\lambda}{\mu}$ ergiebt.

Lassen wir nun eine Collineation eintreten $x_i' = \sum_\kappa a_{i\kappa} x_\kappa$, so gehen aus den Punkten x_i, y_i, $x_i + \lambda y_i$, $x_i + \mu y_i$ entsprechend die collinearen Punkte $x_i', y_i', x_i' + \lambda y_i', x_i' + \mu y_i'$ hervor. Deren Doppelverhältnis ist aber ersichtlich wieder gleich $\frac{\lambda}{\mu}$, q. e. d. Diese angeführte Eigenschaft des Doppelverhältnisses ist ja allbekannt und in jedem Lehrbuch der analytischen oder synthetischen Geometrie enthalten. Doch können wir nicht noch andre Ausdrücke konstruieren, die gleichfalls gegenüber linearer Transformation der Variablen unverändert blei-

ben? Es seien z. B. die 5 Punkte x_i, y_i, z_i, t_i, u_i in einer Ebene gegeben. Aus ihren Coordinaten setzen wir dreigliedrige Determinanten zusammen und fassen etwa insbesondere den Ausdruck $\frac{(x\,y\,z)(x\,t\,u)}{(x\,t\,z)(x\,y\,u)}$ ins Auge, in dem insbesondre der Punkt x_i eine ausgezeichnete Rolle bekommen hat. Auch diese Form wird bei linearer Transformation der Ebene, wie sofort zu übersehen ist, unverändert bleiben; dasselbe gilt bei einer Raumcollineation. Der Ausdruck ist in dieser Eigenschaft bereits von Möbius in seinem baryecentrischen Calcul angeführt worden; man sieht leicht, dass man noch zu weiteren Ausdrücken der gleichen Eigenschaft übergehen kann. Die so angeführten einfachen Beispiele eröffnen uns einen ersten Blick in das Gebiet der Invariantentheorie.

Bei der Ausgestaltung der projektiven Geometrie hat man ganz besonders an der Betrachtung des Doppelverhältnisses festzuhalten. Wir müssen kurz lernen, wie man dasselbe in dualer Weise übertragen hat.

Es gelten in dieser Hinsicht die folgenden 3 Sätze, die wir der Kürze halber ohne Beweis anführen. [Mo. 16.I.93].

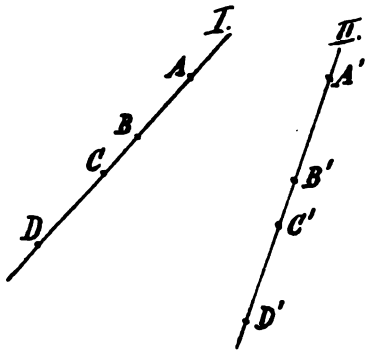
1). Eine lineare Transformation der Punktcoordi-

naten x_i ist zugleich eine lineare Transformation der Ebenen- resp. Liniencoordinaten u_i und umgekehrt.

2). Vier Ebenen eines Büschels (d. h. der Gesammtheit aller durch dieselbe Gerade gehenden Ebenen), sowie 4 Geraden eines Büschels (d. h. der Gesammtheit aller Strahlen durch denselben Punkt in einer Ebene) haben ein bestimmtes Doppelverhältnis, welches sich durch die Coordinaten der Ebenen resp. Geraden genau in derselben Weise ausdrückt, wie das Doppelverhältnis von 4 collinearen Punkten durch deren Coordinaten.

3). Wenn diese 4 Ebenen oder Geraden eines Büschels durch 4 Punkte einer Punktreihe hindurchgehen, so haben dieselben genau dasselbe Doppelverhältnis wie die 4 Punkte. (Satz des Pappus).

Wir wollen ferner noch eine in unserer bisherigen Darstellung vorhandene Lücke ergänzen. Im Raume und in der Ebene haben wir die lineare Transformation uns geometrisch als Collineation anschaulich vor Augen geführt; wie werden wir jedoch die lineare Transformation einer Mannigfaltigkeit erster Dimension, speciell einer Geraden geometrisch definieren können, bei der das Wort Collineation ja seine Bedeutung verliert?

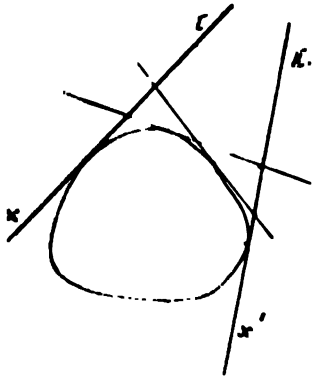


Die lineare Beziehung zwischen den 2 Geraden I u. II: $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ ist festgelegt, sobald wir 3 beliebigen Punkten der Geraden I drei beliebige Punkte der Geraden II entsprechen lassen. Um nun diese hierdurch vermittelte Verwandtschaft geometrisch zu bestimmen werden wir den Begriff des Doppelverhältnisses heranziehen und sagen, dass jedem Punkte X ein Punkt X' entspricht, für welche die Gleichung: $DV(ABCX) = DV(A'B'C'X')$ besteht.

Diese an sich triviale Sache wird nun dadurch interessant, dass man häufig glaubte, diese projektive Verwandtschaft zwischen einstufigen Gebilden einfacher festlegen zu können. Man findet in vielen Lehrbüchern den Satz: Wenn 2 Gerade eindeutig und stetig aufeinander bezogen sind, so werden entsprechende Punkte durch eine lineare Substitution einander zugeordnet. Dieser Satz ist jedoch nur richtig, wenn er richtig gedeutet wird; fügt man keine weitere Erklärung hinzu, so ist er unrichtig. Denken wir z. B. an ein stets in gleichem Sinne gekrümmtes Oval in beliebigen 2 Punkten die Tangenten konstruiert und allemal 2 solche Punkte auf diesen einander zugeordnet, in

denen eine variable dritte Tangente sie trifft, so haben wir in der That eine eindeutige, stetige Beziehung zwischen den beiden ersten Geraden festgelegt.

Doch stellt dieselbe gewiss nicht allgemein zu reden eine lineare Beziehung vor. Wäre sie nämlich linear, so würden unsere Tangenten nach bekannten Sätzen nicht ein beliebiges Oval, sondern eine Ellipse umhüllen. Sonach ist unser obiger Satz zunächst falsch. Ganz anders wird jedoch die Auffassung desselben, wenn man ihn auch auf complexe Werte der Veränderlichen x u. x' ausgedehnt wissen will, und wenn man zufügt, dass in der Formel $x' = \varphi(x)$ [illegible] $\varphi(x)$ eine analytische Funktion vorstellen soll. [illegible] die complexen Variablen x und x' durch eine [illegible] Beziehung analytisch verbunden [illegible] dann ist dieselbe in der That notwendig linear, [illegible] man in der Functionentheorie in strenger Weise [illegible] Von hieraus erkennt man auch, dass der [illegible] falsche Satz richtig wird, wenn man das [illegible] Ellipse nimmt.



Denn von jedem Punkte der einen Tangente geht nur noch eine zweite Tangente an die Curve, und da sich diese Beziehung in einer algebraischen Gleichung ausdrückt, so gilt sie für complexe Werte der Veränderlichen so gut wie für reelle Werte. Demnach ist die Beziehung zwischen den Grössen x u. x' dann nicht mehr nur im Reellen für das Auge ein-eindeutig, sondern sie ist im algebraischen Gebiete ein-eindeutig, und damit sind die Prämissen für die funktionentheoretische Schlussweise gegeben.

2). Wir gehen nun zu der zweiten Stufe der Entwicklung der projektivischen Geometrie über, welche durch die Namen: Steiner und Chasles bezeichnet ist. Ueber Steiner haben wir bereits früher Näheres erfahren. Chasles hat von 1846 bis 1878 eine eigene Lehrstelle in der Faculté des Sciences zu Paris für Géométrie supérieure innegehabt und dort eine ausgezeichnete Lehrthätigkeit entwickelt. Zu nennen sind von seinen Werken hier insbesondere sein: „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie etc" (1837), in dessen Noten sich neben der historischen Darstellung auch viele selbständige Ideen zur projektiven Geometrie finden, ferner der „traité de géométrie supérieure" (1852, in zweiter Auflage 1880),

endlich der traité des sections coniques (1865), von dem indess nur ein Band erschienen ist. Chasles hat hierüber hinaus sehr zahlreiche weitgehende Untersuchungen veröffentlicht, von denen wir jedoch an dieser Stelle nicht zu sprechen haben.*)

In den elementaren Betrachtungen hat Chasles wenig Eigenes hinzugefügt, sondern sich durchaus an Poncelet und Steiner angeschlossen (obwohl er von sich behauptete, kein Deutsch lesen zu können). Doch gebrauchte er andere Bezeichnungen: statt Collineation sagt er Homographie, statt Dualität Correlation, statt Doppelverhältnis rapport anharmonique. (Das Wort „anharmonique" bedeutet soviel wie „überharmonisch" dementsprechend, dass man den speciellen Wert $DV = -1$ als harmonisches Doppelverhältnis zu bezeichnen pflegt. –)

Hatten wir früher zwischen metrischen und projektiven Eigenschaften der Gebilde unterschieden, so ist die zweite Stufe der projektiven Geometrie, von der wir jetzt reden, durch das völlige Zurücktreten des Metrischen charakterisiert. Insbesondre tritt der Steinersche Grundgedanke der projektiven Erzeugung in den Vordergrund. Wir werden denselben an einzelnen Beispielen leicht verstehen.

1). Es seien $p + \lambda q = 0$ und $p' + \lambda q' = 0$ zwei Büschel

*) Man vergleiche Chasles, „Rapport sur les progrès de la géométrie" Paris 1870, der auch sonst als Nachschlagebuch nützlich zu brauchen ist.

gerader Linien derselben Ebene in Beckammer abgekürzter Bezeichnungsweise. Indem wir nun diejenigen Geraden, welche dasselbe λ besitzen, zusammenordnen, beziehen wir die Büschel linear auf einander. Als Schnitt der jedesmal sich entsprechenden Strahlen ergiebt sich das Eliminationsresultat von λ

$p q' - p' q = 0$, d. h. ein Kegelschnitt. –

Derselbe wird also erzeugt durch den Schnitt entsprechender Strahlen zweier projektiv aufeinander bezogenen Geradenbüschel.

2). In ganz entsprechender Weise erzeugen im Raume 2 projektive Ebenenbüschel $p + \lambda q = 0$ und $p' + \lambda q' = 0$ ein einschaliges Hyperboloid, dessen Gleichung wieder durch $pq' - p'q = 0$ gegeben wird.

3). Es seien endlich drei Ebenenbündel gegeben. (Unter einem Ebenenbündel haben wir die Gesammtheit der durch einen festen Punkt gehenden Ebenen zu verstehen). Ihre Gleichungen mögen sein:

$$p + \lambda q + \mu r = 0,$$
$$p' + \lambda q' + \mu r' = 0,$$
$$p'' + \lambda q'' + \mu r'' = 0.$$

Dieselben sollen wieder in der Art auf einander bezogen sein, dass je die gleichen Werten λ, μ zugehörigen Ebenen sich entsprechen; dies besagt wieder eine projektive Beziehung der 3 Bündel auf einander.

Je drei zusammengehörige Ebenen schneiden sich nun in einem Punkte; derselbe beschreibt, bei variablem λ und μ dann eine Fläche, deren Gleichung wir durch Elimination aus den vorstehenden Gleichungen in der Determinantenform

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{vmatrix} = 0$$ erhalten.

Wir sehen, wir erhalten eine <u>Fläche dritter Ordnung</u>. Die hier gegebene projektive Erzeugung derselben ist insbesondre von <u>Grassmann</u> entwickelt worden.

4). Ein ebenes Gebilde dritter Ordnung erhalten wir aus der projektiven Beziehung eines Büschels von Kegelschnitten $\varphi + \lambda \psi = 0$ auf ein Geradenbüschel $p + \lambda q = 0$. Die Elimination von λ ergiebt in der Gleichung $\begin{vmatrix} p & q \\ \varphi & \psi \end{vmatrix} = 0$ eine <u>ebene Curve 3. Ordnung</u>. Analog eine ebene Curve 4. Ordnung als Schnitt zweier projektiver Kegelschnittbüschel. — Beidemal erhält man zugleich die allgemeinste Curve der betreffenden Ordnung. —

Der diesen Beispielen zu Grunde liegende Steiner'sche Gedanke, höhere geometrische Gebilde aus niedren durch projektive Beziehung zu erzeugen, ist vorallem in Reye's Geometrie der Lage systematisch zu Grunde gelegt und durchgeführt. Man vergleiche

auch Schur in Annalen 18, sowie die Abhandlungen von Reye in den Bänden 74 ff. des Journals.

Was wird nun von der Tragweite dieser Methode zu sagen sein? [Di. 17. I. 93.]

Die projektive Erzeugung der algebraischen Gebilde ist ja selbstverständlich sehr einfach und schön; sie entspricht dem Umsetzen der algebraischen Gleichungen in eine Determinantenform. Indess ist doch nicht ausser Acht zu lassen, dass es einmal daneben durchaus andre ebenfalls schöne geometrische Erzeugungsarten von Curven z. B. durch Gelenkmechanismen giebt, andrerseits die projektive Erzeugung auch keine allgemeine Definition dessen, was wir ein algebraisches Gebilde nennen, vermittelt. In der That sind Steiner und Chasles in ihren späteren Arbeiten auch von dem ausschliesslich synthetischen, d. h. konstruktiven Prinzip abgegangen und haben den allgemeinen Begriff des algebraischen Gebildes und der algebraischen Konstruktion aus der Analysis entnommen. So ist denn die sogenannte „methode nicke" entstanden, die zwar die Definition des Gebildes der analytischen Gleichung entlehnt, dann aber weiterhin die Formeln zurückdrängt

Sie ist beispielsweise in den Cremona'schen Lehrbüchern zu Grunde gelegt: „Höhere ebene Curven" und „Oberflächen" (die beide in deutscher Uebersetzung erschienen sind). Ich verweise übrigens auf meine Vorlesungen über Riemann'sche Flächen (den historischen Bericht, über die Theorie der algebraischen Curven.)

3). Wir kommen nun zur dritten Stufe der projectiven Geometrie, die darauf ausgeht, die Metrik durch Projectivität zu beherrschen.

Der erste Ansatz hierzu ist bereits von Poncelet gegeben, indem er in bestimmter Weise die Kugel von den übrigen Flächen 2. Grades unterschied. Es sei die Gleichung der ersteren wie folgt gegeben:

$(x^2+y^2+z^2)+2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta=0$, oder homogen geschrieben

$(x^2+y^2+z^2)+2\alpha x t+2\beta y t+2\gamma z t+\delta t^2=0$.

Als Schnitte mit der unendlich fernen Ebene $t=0$ ergiebt sich die Curve: $\left\{\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=0 \\ t=0 \end{matrix}\right\}$,

welche ersichtlich allen Kugeln gemeinsam ist. Dieselbe nennt man den imaginären „Kugelkreis". Umgekehrt lassen sich die Kugeln nun durch die Bedingung, den Kugelkreis zu enthalten, unter den Flächen 2. Grades charakterisieren. — Das Entsprechende für die Ebene ist der Satz, dass alle Kreise durch die

beiden Kreispunkte $x^2 + y^2 = 0$, $t = 0$ hindurchgehen.

Nun hat diese Definition der Kugeln (oder Kreise) insofern projektiven Charakter, als sie uns erkennen lässt, welche Flächen 2. Grades aus den Kugeln des Raumes bei beliebiger linearer Transformation hervorgehen, nämlich diejenigen Flächen, welche den Kugelschnitt enthalten, der bei der linearen Transformation aus dem Kugelkreis entsteht. — Der allgemein angestrebte Gedanke ist nun, alle metrischen Eigenschaften der Gebilde als projektive Beziehung derselben zum Kugelkreis aufzufassen. Chasles und seine Schule haben in dieser Richtung die ersten erfolgreichen Schritte gethan. Insbesondre ist ein kleiner Aufsatz von Laguerre zu nennen in den Nouvelles Annales von 1853. In demselben ist der Winkel φ zweier Strahlen t, u in einer ganz neuen Weise projektiv definiert. Laguerre zieht von dem Scheitel der Winkels die Verbindungslinien v, w nach den beiden Kreispunkten der Ebene und betrachtet das Doppelverhältnis $(t\ u\ v\ w)$ der 4 Geraden. Er stellt dann die Formel auf $\varphi = \frac{i}{2} \log D$ und gibt in solcher Weise den Winkel der beiden Strahlen als eine projektive Beziehung derselben zu den beiden Kreispunkten.

Der Anlass ist der Winkel zweier Ebenen im Raume zu definiren. Wir wissen: bei beliebiger linearer Transformation bleibt dieses Doppelverhältnis ungeändert; dasselbe bezieht sich jedoch dann auf diejenigen Geraden, welche von dem Scheitel des neuen Winkels nach den neuen Kreispunkten entstandenen Punkten hinlaufen. Der Winkel im gewöhnlichen Sinne wird also nur ungeändert bleiben, wenn letztere Punkte zufälligerweise selbst die Kreispunkte sind, d.h. wenn die Kreispunkte bei der linearen Transformation in sich selbst übergegangen sind. Hierdurch eben werden unter der Gesammtheit der Collineationen die Bewegungen und Umlegungen bezw. die „Aehnlichkeits-Transformationen" charakterisirt sein. Die Auffassung Laguerre's hat eine wesentliche Erweiterung erfahren durch Cayley (1859) in einer Abhandlung der Londoner Philos. Transactions. Dieselbe ist die 6te in einer Reihe von Abhandlungen, die unter dem Titel „upon Quantics" (d.h. „Formen") von Invariantentheorie und projektive Geometrie handeln. Cayley entwickelt dort auf projektiver Basis eine allgemeine Lehre der Metrik oder Massbestimmung, indem er nämlich die projektive Beziehung der räumlichen Figur zu einer beliebigen Fläche 2. Grades in solcher Form entwickelt, dass die Formeln der gewöhnlichen Massbestimmung herauskommen, sobald man die Fläche

Grades in den Kugelkreis ausarten lässt. –
Alle diese Dinge sind ausführlich von mir in meinen
Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie behan-
delt worden; es wird also nicht nötig sein, auf diesel-
ben hier noch genauer einzugehen.
Wir wenden uns jetzt zu der 4. Stufe der projektiven
Geometrie, die als prinzipielle Grundlegung derselben
zu überschreiben ist. Bei der zweiten und dritten Stufe
wurde gewissermassen ein Zirkel im Denken statt. Um
nämlich den Zahlenwert eines Doppelverhältnisses
festzulegen, muss man Strecken messen, um Coordi-
naten einzuführen, Abstände messen u. dergl.
Versteckt die metrische Geometrie, welche man durch
die projektive Geometrie beherrschen will, selbst bereits
den Grundlagen der projektiven Geometrie drin. Wir
werden uns daher fragen, können wir nicht ganz un-
abhängig von jeglicher Anwendung der Massgeome-
trie, vielleicht allein durch Ziehen von geraden Linien,
die Zahl einführen, welche wir das Doppelverhält-
nis von 4 Punkten einer Geraden nennen? Können
wir ferner nicht auch die homogenen Coordinaten x_i der
Ebene oder des Raumes als bestimmte Zahlen ohne Mass-
begriff festlegen? Derjenige Geometer, der in dieser Hinsicht
Arbeit geschaffen hat, ist von Staudt (ein Süddeut-
scher (aus Rothenburg a/d Tauber), der während seiner gan-

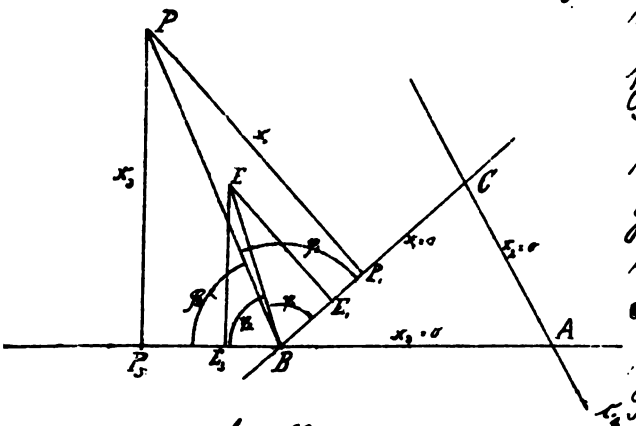
jene Lehrthätigkeit in Erlangen (1835–1867) lebte). Sein Hauptwerk ist: „die Geometrie der Lage“ (1847), der er 1856–59 „die Beiträge zur Geometrie der Lage“ folgen liess. Dies sind ausserordentlich inhaltreiche Bücher, wie jedenfalls v. Staudt einer der am tiefsten eindringenden Geometer gewesen ist, die je gelebt haben. Dieselben sind wegen ihres knappen und etwas schwer lesbaren Stiles bisher leider immer noch nicht so bekannt geworden, besonders im Ausland, wie sie es verdienen. Zwei Aufgaben kommen für uns besonders in Betracht, die dort ihre Lösung finden. Einmal ordnet v. Staudt 4 Punkten einer geraden Linie, ohne den Zirkel zu gebrauchen, eine Zahl zu, welche er den „Wurf“ $(ABCD)$ nennt, nämlich vermöge der Chasles'schen Abstraktion, und diese Zahl erweist sich genau identisch mit der, die man von der metrischen Geometrie aus als das Doppelverhältnis der 4 Punkte einführt *).

Zweitens führt er auf solche „Würfe“ die Definition der Dreieckscoordinaten der Ebene, der Tetraedercoordinaten im Raume zurück.

Diesen letzten Punkt können wir uns leicht klar machen, wenn wir zeigen, wie wir die betreffenden Coordinaten als Doppelverhältnisse einführen können.

*) v. Staudt vermeidet prinzipiell den Ausdruck: Doppelverhältnis; in der That bezieht sich dieser ja darauf, dass man den „Wurf“ als Quotienten von Strecken definiert, während doch hier von allem Messen abgesehen werden soll.

Bleiben wir der Einfachheit halber bei den Punktcoordinaten in der Ebene. In Beziehung auf das Coordinatendreieck ABC gilt für einen beliebigen Punkt P, dass seine Coordinaten sich wie die mit beliebigen Constanten multiplicierten Abstände von den Seiten des Dreiecks verhalten. Also z. B. $x_1 : x_3 = PP_1 : c_3\, PP_3$. Wir müssen nun mit v. Staudt den Einheitspunkt E der Ebene hinzunehmen, d. h. denjenigen Punkt, dessen Coordinaten $1,1,1$ sind. Dann gilt weiter in unserer Figur $c_1 \cdot EE_1 : c_3 EE_3 = 1:1$; wir können daher setzen:



$$c_1 = \frac{1}{EE_1}\,,\quad c_3 = \frac{1}{EE_3}\,;\ \text{dann folgt:}$$

$$x_1 : x_3 = \frac{PP_1}{EE_1} \cdot \frac{EE_3}{PP_3}\,.$$

Bezeichnen wir die Winkel der Verbindungslinien EB u. PP_3 mit den Seiten $x_1 = 0$ u. $x_3 = 0$ entsprechend mit $\psi_1\ \psi_2,\ \varphi_1\ \varphi_2$ so ergiebt sich aus der letzten Gleichung:

$$x_1 : x_3 = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} \cdot \frac{\sin\psi_2}{\sin\psi_1}\,.$$

Die rechte Seite stellt aber die elementare Definition des Doppelverhältnisses der 4 Strahlen von B nach den Punkten

P, E, C, A Lar. Aus dieser Hülfsbetrachtung geht nun allgemein hervor, dass sich die Dreiecks-coordinaten unter Zuhülfenahme des Einheitspunktes durch gewisse Doppelverhältnisse definieren lassen, und man hat also alle Mittel, Dreiecks-coordinaten durch blosse projektive Konstruktionen einzuführen, sobald man in der Lage ist, Doppelverhältnisse rein projektiv numerisch festzulegen, wie dies von Staudt thut.

Weiter als hiermit geschildert ist, ist v. Staudt nicht gegangen; er hat sich darauf beschränkt, für die projektive Geometrie als solche eine prinzipielle Grundlage zu schaffen. Es hat aber keine Schwierigkeit, die Entwickelungen von Cayley nunmehr heranzuziehen und so ein einheitliches Lehrgebäude zu errichten, welches auf projektiver Basis die ganze Geometrie, d. h. auch die Geometrie der Massen, umspannt. Dies ist, was ich in meinen Arbeiten zur „Nichteuklidischen Geometrie" in Annalen 4 und 6 (1871-72) gewollt habe. Wegen der näheren Ausführung muss ich wieder auf meine Nichteuklidischen Vorlesungen verweisen.

In der heutigen Stunde wenden wir uns zu [Do. 19. I. 93.] dem Untersuchungsgebiete der englischen Mathematiker Cayley und Sylvester, d. h. zur Invariantentheorie, und haben deren Beziehung zur projektiven Geometrie darzulegen. Beide Disciplinen stehen einander

nahe und sind doch von einander verschieden. Definieren wir zunächst den Inhalt der projektiven Geometrie in analytischer Form: Es sei (um bei 3 Variablen zu bleiben) die Curve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben. Wir wollen dieselbe der Collineation $\varrho x_i' = \sum a_{ik} x_i$ unterwerfen und uns fragen, welche Eigenschaften dabei unverändert bleiben. Diese Frage suchen wir in der Weise in Angriff zu nehmen, dass wir Functionen der Coefficienten von $f = 0$, vielleicht speciell rationale Functionen, aufsuchen, die bei linearer Substitution sich nicht ändern. Functionen der Coefficienten, die eine solche Eigenschaft haben, nennen wir dann „absolute Invarianten" oder Invarianten schlechtweg. Das einfachste Beispiel einer absoluten Invariante bietet wieder das DV von 4 auf einer Geraden gelegenen Punkten, deren Coordinaten mit $\frac{x_1}{x_2}\ \frac{y_1}{y_2}\ \frac{z_1}{z_2}\ \frac{t_1}{t_2}$ bezeichnet seien. Die letzten Grössen stellen 4 Reihen binärer Veränderlicher vor, welche „congruente" oder „cogrediente" lineare Substitutionen erleiden, sodass immer gleichzeitig:

$$\varrho x_i' = \sum a_{ik} x_k$$
$$\varrho y_i' = \sum a_{ik} y_k \quad \text{u. s. w. fort ist. Aus}$$

ihnen bildet sich alsdann der invariante Ausdruck des DV $\frac{(xz)(yt)}{(xt)(yz)}$, der als Form 0ten Grades in jeder Variablenreihe seine unmittelbare geometrische Bedeutung als Streckenverhältnis hat. (Unser Beispiel

geht ja in der Beziehung über das soeben allgemein Gesagte hinaus, insofern wir mehrere Reihen Variabler „simultan" verändern.) Neben den so definierten invarianten Ausdrücken (absoluten Invarianten) stellen sich dann noch invariante Gleichungen, deren linke Seiten in der Art aus den Coefficienten der vorgelegten Gebilde zusammengesetzt sind, dass sie sich bei linearer Transformation nur um einen Faktor ändern. Ich erinnere in diesem Betracht an die Gleichung, welche in der Theorie des Nullsystems aussagte, dass man es mit einem speciellen Nullsystem zu thun habe. Diese etwas unbestimmten Definitionen verschärfen sich nun beim Uebergang zur eigentlichen Invariantentheorie.

Die Invariantentheorie verfährt nämlich folgendermassen: Zunächst ist ihr Gegenstand nicht sowohl die homogene Gleichung $f = 0$ selbst, als die homogene Form $f(x_1, x_2, x_3)$, die linke Seite der Gleichung. In den Substitutionen der Variablen wollen wir dementsprechend auch nicht einen Proportionalitätsfaktor ϱ einführen, sondern einfach setzen: $x_i' = \sum a_{ik} x_k$. Die Determinante a_{ik} der Substitution, die jetzt einen bestimmten Zahlenwert hat, sei $= r$ gesetzt. Denken wir uns nun aus der ursprünglichen Form $f(x_1, x_2, x_3)$ mit den Coefficienten c die neue Form $f'(x_1' x_2' x_3')$ mit

den Coefficienten c' erhalten, so können wir von letzterer zur ersteren zurückgehen, indem wir für x_i' ihre Substitutionswerte einsetzen. Zunächst ergiebt sich die Form

$$f'(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3),$$

und die Vergleichung derselben mit der Form $f(x_1\ x_2\ x_3)$ führt zu dem Satze: *Die Coefficienten c sind homogene lineare Funktionen der Coefficienten c', welche von den Substitutionscoefficienten $a_{i\varkappa}$ im m^{ten} Grade abhängen, wenn m die Ordnung von f ist.*

Es handelt sich jetzt einfach darum, eine Invariante von f zu bilden.

Unter einer Invariante versteht man jetzt eine Funktion dieser Coefficienten c, $J(c)$, welche die Eigenschaft hat, von derselben Funktion der Coefficienten c' nur um einen Faktor abzuweichen, der eine Potenz von r ist.

In der Formel drückt sich dies aus durch die Gleichung: $J(c) = r^{\lambda} \cdot J(c')$.

Ist λ von Null verschieden, so spricht man von einer *relativen Invariante*, oder einer Invariante schlechtweg. Ist dagegen $\lambda = 0$, so hat man insbesondere eine *absolute Invariante*. Man erkennt sofort: *Man kann sich absolute Invarianten immer verschaffen, indem man 2 relative Invarian-*

ein, mit demselben Δ durch einander dividiert. Andererseits: Man erhält invariante Gleichungen, indem man irgendwelche relative Invarianten gleich Null setzt.

Auch hier können wir wieder zu dem Beispiel des $f^2 \varphi$ zurückgreifen, (wobei wir dann freilich wieder mit mehreren Reihen Variabler zu thun haben, die congruente Substitutionen erfahren). Aus den 2 Reihen binärer veränderlicher bilden wir zunächst die Determinante (xz), die bei linearer Substitution übergeht in $(x'z') = r(xz)$. Demnach ist beispielsweise bereits die Determinante (xz) eine relative Invariante. In der That hat $(xz) = 0$ eine bleibende geometrische Bedeutung; es besagt, dass die Punkte x, z zusammenfallen. Aus verschiedenen solchen relativen Invarianten setzt sich dann das Doppelverhältnis $\frac{(xz)(yt)}{(xt)(yz)}$ als absolute Invariante zusammen. Schon der einfache Quotient $\frac{(xz)}{(xt)}$ wäre eine absolute Invariante. Er kommt aber geometrisch nicht in Betracht, weil er in den z und t nicht von nullter Dimension ist. Wir werden uns nun fragen, welchen Vorteil es hat, die Theorie der absoluten Invarianten an diejenigen der relativen anzuschliessen. Dies ist leicht zu beantworten. Wir wollen hier nur von rationalen Invarianten reden.

...leg. absoluten Invarianten, müssen offenbar in-
...e rationale gebrochene Formen der Coefficien-
...sein, da in ganzen Funktionen derselben bei
...wendung der Substitution $x_i' = \lambda \cdot x_i$ sicher ein
...tor aus allen Gliedern heraustreten muss. Re-
...ive Invarianten kann man dagegen sehr wohl
...rationale ganze Formen der Coefficienten kon-
...ieren. Der Fortschritt, der hier vorliegt, ist in
...ganz allgemein in der Mathematik geltenden
...ndsatz zu suchen, dass es immer viel besser ist
...h im Gebiete der ganzen Funktionen zu bewegen
...im Gebiet der gebrochenen. *)

...übrigen tritt die Invariantentheorie in Bezie-
...ng zu einer andern wichtigen Disciplin, zu der
...lentheorie. Auch hier betrachtet man Formen
...deren Variable man linearen Substitutionen un-
...wirft; nur wird jetzt allemal die Bedingung der
...ngzahligkeit hinzugenommen. Die Aufgabe der
...variantentheorie, wie wir sie bezeichneten, bildet
...mach zugleich die Grundlage für die zahlentheo-
...sche Betrachtung der Formen. Als Unterschied
...enüber der projektiven Geometrie, wollen wir
...h insbesondere hervorheben, dass 2 Formen, die
...h nur durch einen constanten Faktor unterschei-
..., in der Zahlentheorie sehr verschieden, in der

*) man vergl. z.B. die Darstellung der elliptischen Functionen durch Quo-
...ten von ϑ-Produkten; die Lehre von den ϑ-Produkten ist die na-
...emässe Basis, auf welche man die Theorie der elliptischen Funk-
...en zu gründen hat.

Curvenlehre dagegen gleichbedeutend sind, insofern man ja nur das Gebilde betrachtet, welches durch Nullsetzen der Formen vorgestellt wird).

Um etwas ins Concrete zu gehen, wollen wir einige einfache Beispiele anschliessen: Es sei die Form gegeben: $f_2 = a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2$. Der Ausdruck $b^2 - ac$, die sogenannte „Determinante der Form" giebt uns dann das einfachste Beispiel einer Invariante. Das Verschwinden ihres Werthes giebt bekanntlich an, dass die Gleichung $f_2 = 0$ eine Doppelwurzel besitzt. — Wir können eine erste Verallgemeinerung bilden, indem wir zu einer binären Form n^{ten} Grades $f_n = a x_1^n + b x_1^{n-1} x_2 + \ldots + p x_1 x_2^{n-1} + q x_2^n$ übergehen. Hier giebt allemal die „Discriminante" der Gleichung $f_n = 0$, d. h. diejenige ganze Form der Coefficienten, deren Verschwinden auf eine Doppelwurzel schliessen lässt, ein ferneres Beispiel einer Invariante. — Eine andre Verallgemeinerung der Form f_2 entsteht, indem wir zu einer grösseren Zahl Variabler übergehen. Da haben wir zunächst die ternäre Form 2. Grades: $f_2 = k_{11} x_1^2 + 2 k_{12} x_1 x_2 + \ldots + k_{33} x_3^2$, welche gleich Null gesetzt einen Kegelschnitt ergiebt. Die Determinante der Coefficienten:

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix}$$

(mit der Bedingung $k_{il} = k_{li}$) liefert

uns dann wieder eine zugehörige Invariante. Aus der analytischen Geometrie wissen wir, dass das Verschwinden dieser Determinante ein Zerfallen des Kegelschnittes in gerade Linien angiebt. Ferner wählen wir, um noch ein specielles Beispiel näher auszuführen, eine binäre Form 4ten Grades:
$f_4 = a x_1^4 + 4b x_1^3 x_2 + 6c x_1^2 x_2^2 + 4d x_1 x_2^3 + e x_2^4$. Man hat gefunden, dass hier bei Beschränkung auf rationale Invarianten 2 einfachste Invarianten bestehen, nämlich: eine ganze Funktion 2ten Grades: $ae - 4bd + 3c^2 = g_2$ und eine ganze Funktion 3ten Grades: $ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = g_3$. Und zwar gilt gegenüber linearen Substitutionen: $g_2 = r^4 g_2'$, $g_3 = r^6 g_3'$. Aus g_2 u. g_3 setzen sich alle andern rationalen relativen Invarianten rational und ganz zusammen; die Discriminante von f_4 erweist sich z. B. als $g_2^3 - 27 g_3^2 = \Delta$.

Wir können nun hier, wo wir 2 Invarianten gegeben sehen, leicht eine absolute Invariante bilden, etwa $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$; dieselbe ist wieder eine gebrochene rationale Funktion der Coefficienten, und aus ihr setzen sich wieder alle rationalen absoluten Invarianten von f_4 rational (aber nicht ganz) zusammen. Ich wähle hier ganz die Bezeichnungen, welche in Weierstraß' Theorie der elliptischen Funk-

formen, beg. der Theorie der elliptischen Modulfunktionen üblich ist. Mit dem D. V. λ der 4 Punkte $f_4 = 0$, welches eine irrationale, absolute Invariante von f_4 ist und immer auf 6 Weisen gebildet werden kann, hängt das J durch die Gleichung 6ten Grades zusammen:

$$J\left(\frac{g_2^3}{\Delta}\right) = \frac{4}{27}\,\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}.$$

Eine nähere Ausführung aller dieser Dinge ist hier unmöglich, ich muss mich hier auf das vorstehende Referat beschränken, welches nur den Ansatz zum Studium der Invariantentheorie geben soll. Doch wollen wir sogleich noch einzelne termini technici kennen lernen: Unter einer simultanen Invariante versteht man eine Funktion, die von den Coefficienten zweier oder mehrerer Formen abhängt und sich nur um den Faktor r^λ bei linearer Substitution ändert, unter einer Covariante eine Funktion, die ausser den Coefficienten auch die Variablen x_i enthält und sich bei linearer Substitution wieder nur um den Faktor r^λ ändert, unter einer Contravariante schliesslich eine Funktion, die auch die „contragredienten" Variablen u_i enthält.

Beispiele:

Simultane Invariante: die Resultante zweier linearer Formen.

Covariante: die Hesse'sche Determinante einer binären Form f: $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$, sofort auf ternäre Formen zu übertragen.

Contravariante: die „Adjuncte" einer ternären quadratischen Form: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$, gleich Null gesetzt die Gleichung in Liniencoordinaten desjenigen Kegelschnittes, der in Punktcoordinaten durch $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ gegeben ist. —

Gehen wir nun zum Ausgangspunkt der heutigen Betrachtung zurück, zu der Frage nach dem Verhältnis der projektiven Geometrie und Invariantentheorie, so sehen wir: Die Invariantentheorie greift über die projektive Geometrie hinaus, indem sie eben die Formen f selbst, nicht nur die Gleichung $f = 0$ studiert; (wir können auch sagen, indem sie die Variablen $x_1 x_2 \ldots$ selbst, nicht nur ihr Verhältnis ins Auge fasst).

Dennoch kann der Gesammtinhalt der Invariantentheorie geometrisch einfach gedeutet werden. Wir brauchen z. B. bei den binären Formen x_1 u.

x_2 nur als gewöhnliche Coordinaten der Ebene (nicht mehr als homogene Coordinaten) zu deuten, zu denen wir f_n selbst als dritte Coordinate des Raumes hinzunehmen. Die Gleichung: $f_n = a x_1^n + \ldots + q x_2^n$ stellt dann eine Fläche im Raume dar. Soll f_n insbesondre = const. sein, so haben wir eine bestimmte horizontale Schnittcurve dieser Fläche vor uns. Analog wird man bei mehr als 2 Variablen x_i verfahren, indem man einfach in einen höheren Raum geht. Nur haben wir nicht mehr die Deutung der gewöhnlichen projektiven Geometrie.

Wir wollen nun einmal im Zusammenhang [Fr. 20. I. 93.] von der Bedeutung der projektiven Geometrie und der Invariantentheorie sprechen. Wir sagen zunächst: Die projektive Anschauung in Räumen von beliebig vielen Dimensionen in Verbindung mit der Invariantentheorie ist nicht nur für die Geometrie, sondern nachgerade für sämmtliche Teile der reinen Mathematik, insbesondere für Funktionentheorie, von der durchschlagendsten Bedeutung. Wie könnte ohne dieselbe z. B. von einem eingehenden Studium der elliptischen Funktionen, Abel'schen Funktionen u. dergl. die Rede sein? Andrerseits ist klar, dass neben der projektiven Geometrie eine ganze Zahl selbständiger geometrischer An-

sätze bestehen, welche dieselbe Existenzberechtigung besitzen wie jene. Man wird keineswegs z. B. immer die Kreise (oder Kugel) nur als einen speciellen Fall der Kegelschnitte (resp. der Flächen 2ten Grades) einführen wollen, dazu haben sie doch zu viel Interesse vor den allgemeineren Gebilden voraus; ebenso würde es absurd sein, die Verwandtschaft der reciproken Radien absolut auf projektive Beziehungen aufbauen zu wollen. Schliesslich behält doch auch die elementare Geometrie selbst ihre gute, eigene Bedeutung. Es entsteht daher die Frage nach einem allgemeinen Prinzip, unter welches sich die verschiedenen neben einander stehenden Arten der Geometrie gemeinsam unterbegreifen und in ihrer wechselseitigen Beziehung verstehen lassen. Hierauf eine Antwort zu geben, ist die Absicht meines Erlanger Programms gewesen. Das gesuchte Prinzip liegt in der Gruppentheorie; neben der Gruppe aller linearen Transformationen werden noch andere Arten von Transformationsgruppen zu betrachten sein. Jede Gruppe hat ihre eigene Invariantentheorie. Es wird die Hauptaufgabe der spätern Vorlesung sein, über alle diese Gesichtspunkte volle Klarheit zu schaffen. Hier können dieselben nur erst ganz

vorläufig hingestellt werden. –

Wir müssen nun noch einige weitere Ausführungen zur projektiven Geometrie hinzufügen und zwar wollen wir unsere Aufmerksamkeit zunächst auf Gebilde mit einer continuirlichen Schaar linearer Transformationen in sich lenken. Grade diese Gebilde werden besonders Interesse verdienen. Der hierin angedeutete Gedanke liegt umformuliert schon den elementaren Teilen der Theorie zu Grunde. Um gar nicht von der Kugel zu sprechen, z. B. eine Rotationsfläche geht durch eine continuirliche Drehung um ihre Axe in sich über. Etwas Analoges findet bei den Schraubenflächen statt. Wegen dieser besonderen Eigenschaften zieht man diese Flächen immer als Beispiele in der gewöhnlichen Differentialgeometrie (Flächentheorie) heran. Ferner ist hier die logarithmische Spirale zu nennen. Es ist bekannt, dass ausserordentlich viele Umformungen immer wieder zu logarithmischen Spiralen führen. Es sei nur an den Satz erinnert, dass die Evolute einer logarithmischen Spirale wieder eine logarithmische Spirale (und zwar eine zur ursprünglichen congruente Spirale) ist, eine Eigenschaft, die Jacob Bernoulli zu dem Ausspruch veran-

veranlasste: „iterum renata resurgo."

Wir können alle diese Eigenschaften an die linearen Transformationen anknüpfen, welche die logarithmische Spirale in sich überführen. Wenn wir in der Ebene um den Anfangspunkt O eine Drehung ausführen und sogleich eine ihr stets proportionale Aehnlichkeitstransformation vom Punkte O aus hinzunehmen, die je nachdem eine Verkleinerung oder eine Vergrösserung darstellen, so werden wir als Bahncurve des einzelnen Punktes der Ebene eine logarithmische Spirale erhalten, die im ersten Fall sich zusammenzieht, im letzten Fall sich öffnet. Je nachdem Verhältnis der Drehung zur Verkleinerung oder Vergrösserung erhalten wir Spiralen von verschiedener Steilheit. In diesem Sinne stellt die logarithmische Spirale die Verbindung dar zwischen den Kreisen um O, die bei bloßer Drehung und den Strahlen durch O, die bei bloßer Aehnlichkeitstransformation entstehen. Man kann auch die archimedische Radialspirale zum Vergleich heranziehen, bei der ähnliche Verhältnisse obwalten. Die aus der Drehung und der gleichzeitigen Aehnlichkeitstransformation sich zusammensetzenden Collineationen geben dann die

einfach unendlich vielen Transformationen der logarithmischen Spirale in sich an. In der Existenz dieser ∞ vielen linearen Transformationen erblicken wir aber, wie schon angedeutet, den eigentlichen Grund für alle weiteren schönen Eigenschaften der logarithmischen Spirale.

Unser nächstes Interesse wenden wir nun wieder den Kegelschnitten und Flächen 2ten Grades zu. Der einzelne Kegelschnitt in der Ebene ist durch 5 Constante bestimmt, d. h. es giebt in ihr ∞^5 verschiedene Kegelschnitte, andrerseits haben wir ∞^8 Collineationen, deren jede einen beliebigen Kegelschnitt in einen andern überführt. Endlich ist es bekannt, dass man jeden Kegelschnitt in jeden andern durch Collineation überführen kann. Demnach wird es $\frac{\infty^8}{\infty^5}$ Collineationen geben, die einen bestimmten Kegelschnitt in sich selbst überführen. Analog zählen wir im Raume ∞^9 Flächen 2. Ordnung, ∞^{15} Collineationen, demnach ∞^6 lineare Transformationen einer bestimmten Fläche 2. Ordnung in sich ab. Stehmen wir in gleicher Weise noch den linearen Complex des Nullsystems hinzu. Es giebt ∞^5 Nullsysteme, ∞^{15} Collineationen, also geht das Nullsystem durch ∞^{10} Collineationen in sich

über. Wenn wir das Interesse, das ein Gebilde verdient, nach der Mannigfaltigkeit der linearen Transformationen desselben in sich abzählen, was seine gute Berechtigung hat, so ist also das Nullsystem noch viel schöner als die Flächen 2. Grades.

Wir hatten nun schon vor Weihnachten von den W-Curven gesprochen, die sich als Integralcurven eines (bilinearen) Connexes (1,1) darstellen. Wir wollen, ohne alle Specialfälle erschöpfend zu behandeln, nur den allgemeinen Fall noch näher ins Auge fassen. Die Gleichung der W-Curven wurde in Bezug auf ein bestimmtes Coordinatendreieck gegeben durch:

$x_1^a x_2^b x_3^c = \text{const.}$ mit der Bedingung $a+b+c=0$,

dieselbe mögen wir geradezu als Definition an die Spitze stellen. (Im Raume sind analog die W-Flächen durch die Gleichung $x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d = \text{const.}$ mit der Bedingung $a+b+c+d=0$ definiert).

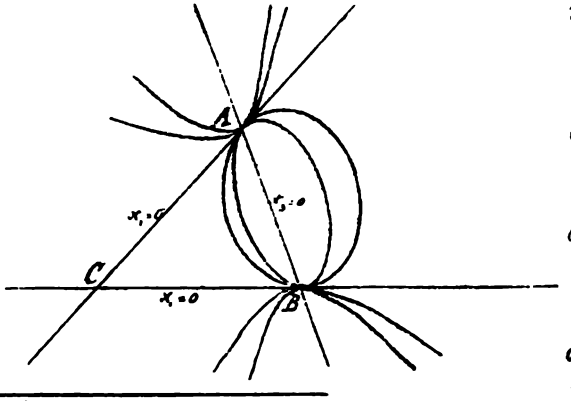
Nun sehen wir sofort, jede lineare Transformation, welche die W-Curven in sich überführt, muss in der Form gegeben sein:

$$\varrho x_1' = \lambda \cdot x_1,$$
$$\varrho x_2' = \mu \cdot x_2,$$
$$\varrho x_3' = \nu \cdot x_3.$$

Durch die Collineation geht nun $x_1'^a x_2'^b x_3'^c$ über in $(\lambda^a \mu^b \nu^c) \cdot x_1^a x_2^b x_3^c$, indem der Faktor $\rho^{-(a+b+c)}$ wegen $a+b+c=0$ zu 1 wird. Dies ergiebt sofort den Satz.

Unsere W-Curven gehen durch alle Collineationen der genannten Form in sich selbst über, welche der Bedingung genügen: $\lambda^a \mu^b \nu^c = 1$. Hiermit sind dann einfach ∞ viele lineare Transformationen bestimmt,*) gerade so viel der Kreis durch einfach ∞ viele Bewegungen der Ebene, nämlich die Drehungen um seinen Mittelpunkt in sich selbst übergeht.

Nun wollen wir vor Allem einige specielle Arten der W-Curven kennen lernen. Zunächst gehören zu ihnen die Curven 2. Ordnung: $x_1 x_2 = C \cdot x_3^2$ oder $x_1 x_2 x_3^{-2} = C$, d. h. Kegelschnitte, für welche das Coordinatendreieck ein sogenanntes Tangentialdreieck ist. Dann können wir auch leicht zeigen, dass die Kreise in demselben Sinne wie hier die allgemeinen Kegelschnitte zu den W-Curven zu rechnen sind. Gehen wir aus von der Glei-



*) Es sind nur einfach ∞ viele Collineationen, weil man unbeschadet der Allgemeinheit im geometrischen Sinne eine der Grössen λ, μ, ν oder auch die Substitutionsdeterminante $\lambda\mu\nu$ gleich 1 nehmen kann.

ng $x^2+y^2=r^2$, oder homogen geschrieben, $x^2+y^2=r^2t^2$,
nnen wir dieselbe umformen in: $(x+iy)(x-iy)t^{-2}=r^2$,
nun brauchen wir nur $x_1=x+iy$, $x_2=x-iy$, $x_3=t$
tzen, um die Gleichungsform der W-Curven zu er-
n. Die Kreise ordnen sich daher in der Weise in die
le betrachteten W-Curven ein, dass man die beiden
spunkte $(x+iy=0, t=0)$ und $(x-iy=0, t=0)$ und
Mittelpunkt des Kreises $x\pm iy=0$ als Ecken der Coor-
tendreiecke wählt.

gehen wir zur logarithmischen Spirale; auch diese
ht hierher, wie jetzt nachzuweisen. Die Gleichung
ben in Polarcoordinaten ist bekanntlich:

$$r=C.e^{\varkappa\varphi} \text{ oder:}$$
$$(x+iy)^{\frac{1}{2}}(x-iy)^{\frac{1}{2}}=C.e^{\varkappa\varphi}.$$

un allgemein $x+iy=r.e^{i\varphi}$ und $x-iy=r.e^{-i\varphi}$ ist,
gt: $\dfrac{x+iy}{x-iy}=e^{2i\varphi}$ oder $\left(\dfrac{x+iy}{x-iy}\right)^{-\frac{\varkappa i}{2}}=e^{\varkappa\varphi}$.

e wir das in unsere letzte Gleichung ein, so kommt:

$$(x+iy)^{\frac{1+\varkappa i}{2}}.(x-iy)^{\frac{1-\varkappa i}{2}}.t^{-\varkappa}=C,$$

für $x_1=x+iy$, $x_2=x-iy$, $x_3=t$:

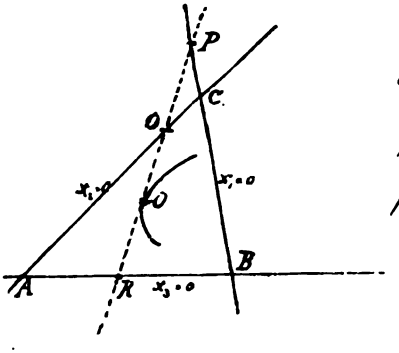
$$x_1^{\frac{1+\varkappa i}{2}}.x_2^{\frac{1-\varkappa i}{2}}x_3^{-\varkappa}=C,$$

die gewünschte Form der W-Curven Gleichung.
h die logarithmische Spirale ist also eine W-Curve;
n Grunde liegende Coordinatendreieck ist wieder
lbe, wie soeben beim Kreise; nur haben die Expo-

nenten a, b, c der Gleichungsform zum Teil complexe Werte.

Nun ist nur noch die Frage, wie der Name W-Curve zu verstehen ist. Das W bezieht sich auf die von Standt'sche Bezeichnung des Doppelverhältnisses als „Wurf". W-Curve heisst soviel wie Doppelverhältniscurve, d. h. eine Curve, die durch ein ausgezeichnetes Doppelverhältnis definiert ist. Als solches ergiebt sich das Doppelverhältnis der 4 Punkte, welche die 3 Schnittpunkte jeder Tangente mit den Seiten des Coordinatendreiecks und der zugehörige Berührungspunkt mit einander bilden. Wir behaupten, dieses Doppelverhältnis hat für jede Curve einen constanten Wert, und umgekehrt kann die ganze Schaar von W-Curven $x_1^a x_2^b x_3^c = C$, zu der die vorgelegte Curve gehört, durch dieses Doppelverhältnis charakterisiert werden.

Der Beweis dieses Satzes ist besonders einfach. [Mo. 23. I. 93.] Denken wir in nebenstehender Figur das Coordinatendreieck und ein Stück der vorliegenden W-Curve gezeichnet. Konstruieren wir dann in einem beliebigen Punkte O der letzteren die Tangente, so schneidet dieselbe auf den Seiten des Coordinatendreiecks die drei Punkte P, Q, R ab, die mit O in



beliebiger Reihenfolge genommen ein Doppelverhältnis bilden. Wir wissen über dies, dass wir durch verschiedene Wahl der Reihenfolge der Punkte (O P Q R) 6 Werte des Doppelverhältnisses erhalten, die in bestimmter Weise zu einander in Beziehung stehen. Nun geht das Coordinatendreieck, sowie die W-Curve, durch die Gesammtheit der auf der vorletzten Seite angegebenen linearen Transformation in sich über. Bei jeder einzelnen derselben verschiebt sich daher der Punkt O und mithin dessen Tangente längs der Curve, während die Punkte P, Q, R längs der Dreiecksseiten hinwandern, d. h. die Schnittpunkte der Tangente mit den Dreiecksseiten bleiben. Daraus aber folgt unmittelbar die behauptete Constanz des Doppelverhältnisses.

Doch lässt sich der Wert des letzteren auch sehr einfach berechnen. Die Tangente der W-Curve $f = x_1^a x_2^b x_3^c = \text{const}$ im Punkte $x_1^0 x_2^0 x_3^0$ wird durch die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \cdot x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \cdot x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_0 \cdot x_3 = 0$$

gegeben. Setzen wir für die Differentialquotienten ihre Werte ein, so ergiebt sich nach einfacher Umformung die Gleichung:

$$\frac{a x_1'}{x_1^0} + \frac{b x_2}{x_2^0} + \frac{c x_3}{x_3^0} = 0.$$

Nun wollen wir in einer kleinen Tabelle die aus dieser Gleichung folgenden Coordinaten der Schnittpunkte P, Q, R sowie die des Punktes O eintragen:

	x_1	x_2	x_3
O	x_1^0	x_2^0	x_3^0
P	0	cx_2^0	$-bx_3^0$
Q	$-cx_1^0$	0	ax_3^0
R	bx_1^0	$-ax_2^0$	0

Hier erkennt man leicht, dass die Coordinaten der Punkte Q und R sich aus denen der Punkte O und P wie folgt darstellen:

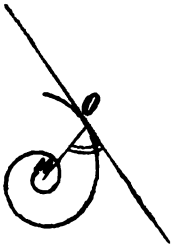
$$(Q) = -c(O) + (P)$$
$$(R) = b(O) + (P),$$

indem wir uns der Bedingung $a + b + c = 0$ erinnern. Die in Klammern geschriebenen Buchstaben sollen allemal die Coordinaten des betr. Punktes bezeichnen. Aus den letzten beiden Gleichungen folgt dann sofort für das Doppelverhältnis $(OPQR)$ der constante Wert $\lambda = -\frac{b}{c}$. Hätten wir die Punkte in anderer Reihenfolge genommen, so würden wir noch die 5 andern Werte für ihr Doppelverhältnis haben: $-\frac{c}{b}$, $-\frac{c}{a}$, $-\frac{a}{c}$, $-\frac{a}{b}$, $-\frac{b}{a}$. Nun können wir aus dem Wert des Doppelverhältnisses noch den Wert der rationalen Invariante J berechnen, welche durch die Formel:

$J = \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^2}{\lambda^2 . (\lambda - 1)^2}$ gegeben wird. Es ergiebt sich, wenn wir für λ seinen Wert setzen, die symmetrische Form:

$$J = \frac{4}{27} \cdot \frac{(ab + bc + ca)^3}{a^2 . b^2 . c^2} .$$

In derselben Weise wie soeben für das Doppelverhältnis der 4 Punkte (O, P, Q, R) können wir auch den Beweis der folgenden dualen Sätze führen: Die Tangente in einem beliebigen Punkte O einer W-Curve bildet zusammen mit den 3 Geraden, welche von O nach den Ecken des Coordinatendreiecks laufen, wieder ein constantes Doppelverhältnis. Von diesem Satze wollen wir die Anwendung auf die logarithmische Spirale machen. Die Ecken des zugehörigen Coordinatendreiecks werden in diesem Falle durch den Asymptotenpunkt M und die beiden Kreispunkte gegeben.



Für einen beliebigen Punkt O der Spirale werden daher die genannten Geraden durch die Tangente, den Radius nach dem Punkte M, sowie die Strahlen nach den Kreispunkten gegeben. Nun wissen wir aber, dass nach Laguerre das Doppelverhältnis dieser 4 Geraden mit dem Winkel φ der ersten beiden in der Beziehung steht: $\varphi = \frac{1}{2i} \log DV$.

Ist nun nach obigem Satze der Wert von D constant, so ergiebt sich das anderweit bekannte Resultat, dass die logarithmische Spirale die vom Anfangspunkt ausgehenden Radien unter constantem Winkel schneidet.

In dem genannten Aufsatze von Lie und mir finden sie noch eine ganze Reihe ähnlicher Sätze. Der Ausgangspunkt unserer Untersuchung sind dabei die Betrachtungen, welche Lie vorher in den Göttinger Nachrichten vom Januar 1870 über einen besonderen Liniencomplex entwickelt hat. Was Lie hier an dem Raumgebilde entwickelt hat, ist von uns zusammen dann auf die W-Curven der Ebene [resp. die W-Flächen des Raumes] angewandt worden. Der bete Liniencomplex führt den Namen „tetraedraler Complex" oder „Reye'scher Complex", indem derselbe von Reye in seiner Geometrie der Lage besonders behandelt wird. Unter demselben versteht man denjenigen Liniencomplex, dessen sämmtliche Geraden die Ebenen eines festen Tetraeder nach Konstantem Doppelverhältnis schneiden; er ist insbesondre vom 2. Grade und wird analytisch durch die einfache Gleichung gegeben:

$$a \cdot p_{12} : p_{34} + b \cdot p_{13} : p_{42} + c \cdot p_{14} : p_{23} = 0,$$

wobei das Tetraeder als Coordinatentetraeder eingeführt

ist. Wir wollen uns erinnern, dass zugleich zwischen den p_{ik} die Identität besteht: $p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0$, so dass man immer eines der Glieder der vorstehenden Gleichung fortlassen kann. Sie hat nun diesen Complex in neuer Weise untersucht, indem er davon ausging, dass derselbe durch die dreifach ∞ vielen Collineationen in sich übergeht, welche das Tetraeder in sich selbst überführen. Die letzteren werden in den Gleichungen dargestellt:

$$\rho\cdot x_1' = \lambda\cdot x_1,$$
$$\rho\cdot x_2' = \mu\cdot x_2,$$
$$\rho\cdot x_3' = \nu\cdot x_3,$$
$$\rho\cdot x_4' = \sigma\cdot x_4.$$

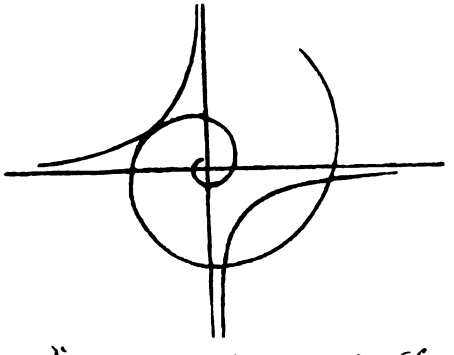
In der That wird ja jede gerade Linie, welche das Tetraeder unter irgend einem Doppelverhältnis trifft, bei jeder einzelnen dieser Collineationen immer in eine gerade Linie transformiert werden, welche das Tetraeder unter demselben Doppelverhältnis trifft.

Sie erzeugt geradezu den tetraedralen Complex, indem er sich denkt, dass man auf eine gegebene Raumgerade die genannten dreifach ∞ vielen Collineationen anwendet.

Von hieraus leitet Sie nun, wie ich in Kürze bemerken will, eine ganze Reihe geometrischer Operationen ab, bei denen der Complex immer wieder in sich selbst übergeht, und es sind dann später, wie ich

schon bemerkte, von Lie und mir zusammen dieselben Schlussweisen mutatis mutandis auf die ebenen W-Curven übertragen worden.

Der oben angeführte Ausspruch, iterum renata resurgo" gilt daher von manchen allgemeineren Gebilden als die logarithmische Spirale, und für diese selbst in viel allgemeinerem Sinne als J. Bernoulli wusste. Als ein Beispiel will ich einen interessanten Satz für die letztere Curve anführen, der in unserer Arbeit sich findet. Zeichnen wir zu einer logarithmischen Spirale irgend ein rechtwinkliges Axenkreuz durch den Anfangspunkt und zu ihm als Asymptotenpaar eine gleichseitige Hyperbel, welche die Spirale berührt. Fassen wir dann die Gesammtheit der Polaren für alle Curvenpunkte der Spirale in bezug auf die Hyperbel ins Auge, so werden wir nach der Umhüllungscurve derselben fragen können. Wir finden das Resultat, dass hierbei unsere logarithmische Spirale selbst resultiert; anders ausgesprochen:



Die logarithmische Spirale ist ihre eigene reciproke Polare in bezug auf jede gleichseitige Hyperbel, von

der sie berührt wird. –
Soviel über die W-Curven und überhaupt über die Gebilde mit linearen Transformationen in sich. Wir gehen dazu über, das Verhältnis der projektiven Anschauungen zu einer andern Disciplin zu erläutern, nämlich der Differentialgeometrie. Es ist von vornherein klar, dass die Auffassung der projektiven Geometrie ebensosehr in den Betrachtungen der Differentialgeometrie zur Geltung zu bringen ist, wie in der algebraischen Geometrie. Sowie man bei letzterer allgemein zwischen projektiver Geometrie und Massgeometrie unterscheidet, so kann man auch innerhalb der Differentialgeometrie eine projektive und eine elementare, metrische Auffassung auseinanderhalten; vermöge der projektiven Auffassung erscheinen die Massverhältnisse dann hinterher als Beziehungen zum Kugelkreis bezw. den Kreispunkten der Ebene. Es ist nur das allgemeine Gesetz, an dem Althergebrachten mit einer gewissen vis inertiae festzuhalten, demzufolge die hiermit bezeichnete Auffassung noch nicht in die Lehrbücher und die Universitätsvorlesungen über Differentialgeometrie eingedrungen ist. Betrachten wir z. B. den Differentialausdruck des Krümmungsradius der ebenen Curve $y = f(x)$,

wie durch die Formel:

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

in bekannter Weise gegeben wird. Wir wollen nun die projektive Auffassung insofern einführen, dass wir uns fragen, was das Verschwinden des Zählers oder des Nenners geometrisch bedeutet. Die Gleichung $y''=0$ besagt, dass ein Wendepunkt der Curve vorliegt; dies ist aber offenbar eine projektive Eigenschaft, d. h. eine Eigenschaft, die bei Collineation der Ebene erhalten bleibt. Die Gleichung $1+y'^2=0$ oder $y'=\pm i$ andrerseits besagt, dass die Tangente des betr. Curvenpunktes durch einen der Kreispunkte geht. Sie bezeichnet also keine projektive Eigenschaft der Kurve an sich, sondern des von ihr und den Kreispunkten gebildeten Systems. Man sollte nun offenbar systematisch vorgehen, nämlich erstens alle Verbindungen der $y, y', \ldots$ bilden, welche gleich Null gesetzt direkt eine projektive Bedeutung haben, dann alle Verbindungen, welche sich in entsprechendem Sinne auf das von der Kurve mit den Kreispunkten gebildete System beziehen. Alle Formeln der Differentialgeometrie müssten sich hernach aus den so gewonnenen Ausdrücken zusammensetzen lassen.

setzen wir bei der vorstehenden Formulirung die
uppe der projektiven Umformungen durch irgend
ne continuerliche Gruppe von Transformationen,
wird die Theorie, welche wir postuliren, keine
ndere sein, als die allgemeine Theorie der Differen-
ialinvarianten, wie Sie sie entwickelt. Die speci-
le Theorie der projektiven Differentialinvarianten
t explicite zuerst von Halphen in seiner These
n 1878 entwickelt worden.

i gehen nun näher auf die projektiven [Do. 26.I.93.]
fferentialinvarianten ein. Indem wir der Einfach-
it der Schreibweise wegen die aufeinanderfolgen-
n Differentialquotienten durch die Variable y mit
ierem Index bezeichnen, also $y = f(x)$, $y_1 = \frac{dy}{dx}$,
$= \frac{d^2y}{dx^2}$ u. s. w. setzen, werden wir diese Differential-
rianten in der allgemeinen Form aufsuchen:
$(y, y_1, y_2, \ldots y_n, x)$; d. h. als ganze rationale Funk-
n der Abhängigen und ihrer n ersten Ableitun-
n, sowie der unabhängigen x. Ihre wesentliche
genschaft besteht, wie wir nochmals wiederholen
ollen, darin, dass sie bei beliebigen Collineationen
ch nur um einen Faktor ändern sollen. Die fun-
mentale Aufgabe in dieser Theorie besteht natür-
h darin, alle projektiven Differentialinvarian-
n für steigende Werte von n aufzusuchen, d. h.

alle diejenigen, aus denen sich die übrigen rational und ganz zusammensetzen. Diese Aufgabe bildet gerade den Inhalt der genannten Arbeit von Halphen, der in strenger Entwicklung die Invariante bis zu dem Werte $n = 7$ aufstellt. Wir wollen ohne auf die Beweise einzugehen, die von ihm gefundenen Resultate in kurzem Referat zusammenstellen. Es zeigt sich, dass innerhalb der bezeichneten Grenze 4 wesentliche Invarianten vorhanden sind, die wir der Reihe nach anführen wollen.

1.) Die einfachste Differentialinvariante giebt der Ausdruck $\underline{U = y_2}$. Gleich 0 gesetzt liefert dieselbe die Differentialgleichung der geraden Linie.

2.) Die letzte Bemerkung führt uns sofort zu der nächsten Differentialinvariante, welche gleich 0 gesetzt die Differentialgleichung der Curven 2. Ordnung darstellt. Wir wissen, ein Kegelschnitt ist allgemein durch 5 Punkte eindeutig bestimmt; als solche kann man insbesondere 5 benachbarte Punkte wählen, deren Coordinaten durch x, y; $x + dx$, $y + dy$; $x + 2\,dx + dx^2$, $y + 2\,dy + dy^2$; etc. gegeben seien. Durch letztere lassen sich sofort die Coefficienten der allgemeinen Gleichung des Kegelschnittes ausdrücken. Indem wir dann noch einen 6ten benachbarten Punkt hinzunehmen und verlan-

Ton, dass er wiederum der Kegelschnittgleichung genügen soll, finden wir eine bestimmte Differentialgleichung 5. Ordnung z. B. Schon Monge hat die letztere ausgerechnet. Dieselbe lautet in geordneter Form: $y_2^2 y_5 - 3 y_2 y_3 y_4 + 2 y_3^2 = 0$. Die linke Seite dieser Gleichung stellt also hinter U die nächsthöhere Differentialinvariante dar, die wir mit V bezeichnen wollen.

3.) Weiter ergiebt sich als dritte Invariante der Differentialausdruck 7. Ordnung

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \\ y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ -y_2^2 & 0 & y_3^2 & 2y_3y_4, & 2y_3y_5 + y_4^2 \\ 0 & y_2^2 & 2y_2y_3, & 2y_2y_2 + y_3^2 & 2y_2y_5 + 2y_3y_4 \\ 0 & 0 & y_2^2, & 3y_2y_3, & 3y_3^2 + 3y_2y_4 \end{vmatrix}$$

4). und als 4te Invariante ein Ausdruck, der sich aus den vorhergehenden in der Form zusammensetzt:

$$H = \frac{256\,\Delta^3 - 27\,V^8}{U^4},$$

woselbst der Zähler sich durch den Nenner teilbar erweist.

Ferner wollen wir sogleich bemerken, dass der Ausdruck $\frac{\Delta^3}{V^8}$ die niedrigste absolute Invariante darstellt.

Alle rationalen ganzen Differentialinvarianten bis zur 7ten Ordnung incl. (d.h. solche, welche keine höheren Differentialquotienten als den 7ten enthalten) setzen sich nun aus diesen 4 Invarianten U, V, Δ und H rational und ganz zusammen, alle rationalen absoluten Invarianten rational aus der einen $\frac{\Delta^3}{V^8}$.

Nun werden wir zu fragen haben, welche geometrische Bedeutung denn diese 4 Invarianten U, V, Δ, H haben. Natürlich wird eine solche nur bei dem Null-setzen der gegebenen Ausdrücke sich bieten können. Nun werden wir durchgehends 2 Auffassungen neben einander halten müssen. Einmal werden wir betrachten, was es für eine bestimmt gegebene Curve bedeutet, wenn einer ihrer Punkte die betr. Differentialgleichung erfüllt; andrerseits aber fragen, was das für Curven sind, für deren sämmtliche Punkte unsere Differentialinvarianten verschwinden. Beide Auffassungen hängen natürlich auf das Engste zusammen.

Gehen wir nun die einzelnen Ausdrücke durch; Ad 1.) Wird die Gleichung $U = 0$ von einem einzelnen Punkte einer vorgegebenen Curve befriedigt, so besagt das bekanntlich, dass dieser Punkt ein Wendepunkt der Curve ist, d.h. dass drei aufeinan-

der folgende Curvenpunkte an dieser Stelle in gerader Linie liegen. Andererseits ist $U = 0$, wie wir bereits sagten, die Differentialgleichung der geraden Linie und drückt als solche aus, dass sämmtliche Punkte der letzteren Wendepunkte sind.

Ad 2). Die Gleichung $V = 0$ giebt analog für eine beliebige Curve die Bedingung, wann 6 aufeinander folgende Punkte der letzteren auf einem Kegelschnitt liegen; solche Curvenpunkte für die letzteres der Fall ist, nennt man sextactische Punkte. Eben deshalb ist $V = 0$ zugleich die Differentialgleichung der Kegelschnitte, wie wir ebenfalls bereits anführten. In entsprechender Weise führen uns nun die folgenden Invarianten Δ, H zu den W-Curven zurück, so dass wir solchermaßen an die früheren Entwickelungen Anschluss finden:

Ad 3). $\Delta = 0$ ist nämlich die Differentialgleichung derjenigen W-Curven, deren Repräsentant im projektiven Sinne eine logarithmische Spirale ist, welche die Radien unter 30° schneidet. Ist dagegen wieder in einem einzelnen Punkte einer beliebigen Curve $\Delta = 0$, so besagt dieses, dass dort 8 aufeinander folgende Punkte auf einer logarithmischen Spirale der genannten Art liegen, (indem ja die Gleichung $\Delta = 0$ eine Differentialgleichung 7ter Ordnung ist.)

Ad 4). Die Differentialgleichung $\mathcal{H} = 0$ definiert uns die Curven, welche bei Zugrundelegung eines geeigneten Coordinatensystems durch $x_1 x_2^2 \cdot x_3^{-3} = C$ oder $x_1 x_2^2 = C \cdot x_3^{+3}$ gegeben sind, d.h. wieder eine besondre Art von W-Curven, die Curven 3. Ordnung mit Spitze. Wenn in einem einzelnen Curvenpunkt einer beliebigen Curve die Gleichung $\mathcal{H} = 0$ erfüllt ist, so liegen dort wieder 8 aufeinanderfolgende Punkte auf einer Curve der genannten Art. —

Nun haben wir uns noch um die geometrische Bedeutung der absoluten Invariante $\frac{\Delta^3}{V^8}$ zu kümmern. Dieselbe ergiebt sich offenbar, wenn wir $\frac{\Delta^3}{V^8}$ gleich einer beliebigen Constante k setzen, und dementsprechend die Gleichung $\Delta^3 - k V^8 = 0$ anschreiben. Diese Differentialgleichung 7. Ordnung $\Delta^3 - k V^8 = 0$ definiert dann allgemein die W-Curven, deren Doppelverhältnis λ zu dem Werte der Constante k durch die folgende Gleichung in Beziehung gesetzt wird:

$$k = \frac{25 \cdot 27}{16 \cdot 343} \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^2}{[(\lambda - 2)(\lambda + 1)(2\lambda - 1)]^2}.$$

Führen wir statt λ die absolute Invariante J oder die relativen Invarianten g_2 und g_3 ein, so gelten die Gleichungen:

$$J = \frac{64 \cdot 343 \cdot k}{64 \cdot 343 k - 25 \cdot 27}$$

und: $\frac{g_2^3}{g_3^2} = \frac{64 \cdot 343}{25} \cdot k \cdot$ —

Gehen wir weiter zu Differentialinvarianten von höherer als der 7. Ordnung, so führen uns die Differentialinvarianten 8. Ordnung z. B. auf die Differentialgleichungen derjenigen Curven 3. Ordnung, welche eine gegebene absolute Invariante haben. — Die näheren Entwickelungen müssen bei Halphen nachgesehen werden. —

Wir wenden uns nun zu einer neuen Seite der projektiven Geometrie,

zu der Lehre von den imaginären Elementen.

Wir haben bisher schon gelegentlich vom Imaginären gehandelt, in der unbefangenen Weise, dass wir z. B. imaginäre Punkte, Geraden u. s. w. schlechtweg behandelten, als wenn sie reelle Punkte oder Geraden wären, ohne uns über ihre geometrische Bedeutung irgend welche Scrupel zu machen. Gerade diese naive Art ist für die projektive Auffassung der metrischen Geometrie sehr nützlich. Wir wollen dies hier zunächst durch ein Beispiel belegen. Wir wählen als solches die Lehre von den confocalen Kegelschnitten. Die letzteren wurden früher von

und definiert durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a_1-\lambda}+\frac{y^2}{a_2-\lambda}=1.$$

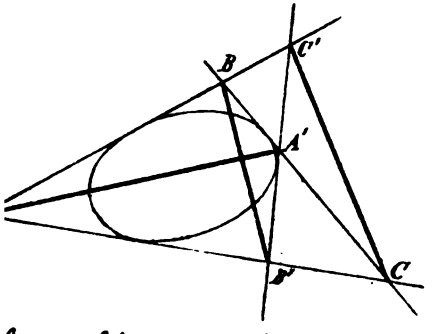
Dieselbe wollen wir hier zunächst in Liniencoordinaten u, v umsetzen, welch' letztere wir in der üblichen Weise einführen, dass die Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Linie durch $ux+vy+1=0$ gegeben ist. Indem wir in bekannter Weise die Gleichung der Tangente des Kegelschnitts benutzen, kommt:

$(a_1-\lambda)u^2+(a_2-\lambda)v^2=1$, oder indem wir nach λ ordnen: $(a_1u^2+a_2v^2-1)-\lambda.(u^2+v^2)=0$.

Wir haben nun schon öfter eine ähnliche Gestalt einer Gleichung in Punktcoordinaten gehabt, etwa $\varphi_2-\lambda.\psi_2=0$ und dieselbe geometrisch als ein <u>Büschel</u> aller der Curven 2. Grades gedeutet, die durch die 4 Schnittpunkte von $\varphi_2=0$ und $\psi_2=0$ hindurchgehen; analog reden wir hier von einer <u>linearen Schaar von Curven 2. Klasse</u>: Indem die Curven $a_1u^2+a_2v^2-1=0$ und $u^2+v^2=0$ 4 Tangenten gemeinsam haben, wird sich die Schaar geometrisch definieren lassen als die Gesammtheit aller derjenigen Kegelschnitte, welche jene 4 Tangenten gleichfalls berühren. <u>Wir schliessen daher hieraus, dass alle Kegelschnitte der confocalen Schaar 4 gemeinsame Tangenten besitzen, d.h. einem gemeinsamen</u>

seit einbeschrieben sind. Natürlich zeigt ja die
nittelbare Anschauung, dass diese 4 Tangenten
nesweges reell sind, (womit wir denn eben in das
iet des Imaginären kommen). Wir werden et-
s Bestimmteres aussagen, wenn wir uns die zwei-
'urve $u^2 + v^2 = 0$ näher betrachten. Dieselbe stellt
einfach das System der beiden Kreispunkte
, welcher daher eine ausgeartete Curve unter den
focalen C_2 bildet. Das genannte Vierseit besteht
er aus den 4 imaginären Tangenten, welche man
den beiden Kreispunkten aus an irgend eine
ve der Schaar legen kann.

. uns nun eine nähere Vorstellung zu bilden, wol-
len wir uns zunächst
einmal klar machen, wie
das System der Kegelschnit-
te beschaffen ist, welche
4 reelle gerade Linien be-
rühren, um dann von
hieraus die Resultate



das Imaginäre zu übertragen.

besondere finden wir in der linearen [Mo. 30. I. 93.]
ar der Curven 2ter Klasse, welche vier gegebene
rde Linien berühren, drei ausgezeichnete Cur-
, welche in Punktepaare übergegangen sind.

Ihre bezüglichen Verbindungslinien AA', BB', CC', welche die Grenzlagen von Ellipsen angeben, sind in der Figur ausgezogen. Es ist leicht, diesen Satz aus der analytischen Gleichungsform abzulesen, die wir in der vorigen Stunde für das System der confocalen Kegelschnitte aufgestellt hatten:

$$(a_1 u^2 + a_2 v^2 - 1) - \lambda (u^2 + v^2) = 0$$

Wir erhalten für $\lambda = \infty$ die Gleichung:

$$u^2 + v^2 = 0$$

d. h. die beiden Kreispunkte;

für $\lambda = a_2$ die Gleichung:

$$(a_1 - a_2) u^2 - 1 = 0.$$

d. h. zwei auf der x-Axe gelegene reelle Punkte — $a_1 > a_2$ angenommen —, die sich als die Brennpunkte der Curven 2ten Grades erweisen;

für $\lambda = a_1$ die Gleichung:

$$(a_2 - a_1) v^2 - 1 = 0,$$

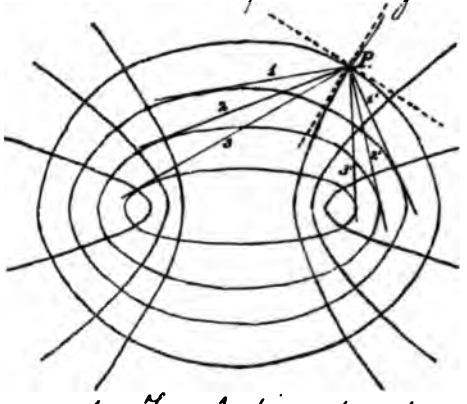
d. h. zwei imaginäre Brennpunkte auf der y-Axe. Von letzteren spricht man gewöhnlich nicht, eben weil sie imaginär sind. Wir können nun dieses Resultat, soweit es unsere confocale Kegelschnittschar betrifft, geometrisch noch etwas näher führen, indem wir von den Kreispunkten die beiden Paare gemeinsamer Tangenten, die natürlich nicht reell sind, gezogen denken. Man beachte, dass die letzteren zu je zweien conjugirt imaginär sind; daher müssen

für diese zwei reelle Schnittpunkte vorhanden sein, die uns die eigentlichen (reellen) Brennpunkte liefern, während andrerseits das Zusammenfassen der nicht zu einander conjugierten imaginären Tangenten zu zwei weiteren imaginären Schnittpunkten hinführt. Insbesondere werden wir uns die hierin liegende projektive Definition der Brennpunkte merken, (welch letztere wir bisher in metrischer Weise aus der analytischen Geometrie eingeführt hatten):

Als Brennpunkte eines Kegelschnitts bezeichnet man eben diejenigen beiden reellen Punkte, in denen sich die imaginären Tangenten kreuzen, welche man von den Kreispunkten an den Kegelschnitt legen kann.

Von unserem neuen Standpunkte aus können wir nun auch leicht zeigen, dass die confocalen Kegelschnitte ein orthogonales Kurvensystem bilden. Denken wir uns zunächst von einem beliebigen Punkte P aus an alle Kegelschnitte mit vier gemeinsamen Tangenten, d. h. an die Kegelschnitte einer linearen Schar, die Tangentenpaare gelegt, so bilden letztere ein involutorisches Strahlenbüschel. Es ist dies nicht schwer nachzuweisen, doch wollen wir nicht auf den Beweis näher eingehen. Zur Erklärung sei nur bemerkt, dass das charakteristische Merkmal einer Involution darin liegt, dass die beiden Strahlen jedes Paares harmonisch liegen zu zwei festen Richtungen, den

Doppelelementen, die ihrerseits reell oder conjugirt imaginär sein können. Betrachten wir nun in diesem Sinne unser confocales System, wie es die Figur wiedergeben möge. Die von einem beliebigen Punkte gezogenen Strahlenpaare 11', 22', 33' u. s. w. liegen dann harmonisch zu den Tangenten, welche man im Punkte P an die hindurchgehende Ellipse und Hyperbel construieren kann, indem doch letztere die Doppelstrahlen der Involution darstellen werden. Nun sind unter den Kegelschnitten des Systems, wie oben angegeben ist, auch die beiden Kreispunkte vorhanden. Wir können daher insbesondere auch von P die beiden Tangenten nach letzterem construieren, und da auch diese zu den beiden festen Richtungen harmonisch liegen müssen, so stehen die festen Richtungen eben auf einander senkrecht, was zu beweisen war.



Wir können bei diesen Einzelheiten, die in der Hauptsache bereits von Poncelet entwickelt sind, ja leider nicht länger verweilen. Die Berechtigung der hier im Beispiel gegebenen Behandlung des Imaginären liegt darin, dass alle unsere Konstruktionen eine algebraische Bedeutung haben, und letztere ganz unabhängig davon gilt, ob wir es mit reellen oder imaginären Werten der Variabeln zu thun haben.

ne vollständige geometrische Deutung dieser Konstruc-
nen ist dann in höchst interessanter Weise von v. Staudt
geben worden in seinen, Beiträgen zur Geometrie der
ge" 1856-59. Doch wollen wir nicht näher darauf ein-
hen, zumal sie in meinen Vorlesungen über nichteuklid-
che Geometrie ausführlich behandelt ist. Wir bemerken
dessen: so wichtig die Staudt'sche Theorie ist, so um-
ändlich und schwerfällig ist sie in ihrer Anwendung
d gerade die Leichtigkeit, mit der man vom analy-
chen Standpunkt aus vorgeht, und auf die wir beson-
n Wert legen, geht dabei völlig verloren. Wir werden darum
der Folge auch nicht weiter auf dieselbe zurückkommen.
i wollen nun nach einer allgemeineren Richtung hin das
uftreten des Imaginären in der projektiven Geometrie ver-
gen. Die allgemeine Beziehung der Collineation, die sich
der Gleichung $\rho x_i = \sum a_{ik} x_k$ ausdrückt, ordnet je-
m Punkte x einen andern Punkt x' zu, jedoch haben
ir uns bisher fast ausschliesslich auf reelle Punkte be-
hränkt. Wir werden jetzt nach zwei Seiten eine Verall-
meinerung eintreten lassen. Zunächst werden wir auch
mplexe Werte von x und x' in Betracht ziehen. Für diese
usdehnung der linearen Transformation bleibt die Be-
ichnung als Collineation selbstverständlich unver-
ndert giltig, denn der Satz, dass geraden Linien stets
ieder gerade Linien entsprechen, behält auch im Gro-

[illegible] seine Geltung, da er eine algebraische Aussage enthält.

Weiter erteilen wir jedoch auch den Coefficienten a_{ik} complexe Werte. Mit diesem Schritt wird es im allgemeinen eintreten, dass reellen x complexe x' entsprechen und umgekehrt. Doch ändert auch dieses den Charakter der Transformation als einer Collineation nicht, wie man leicht überlegt. Nun haben wir früher gelernt auf Grund der Moebius'schen Netzconstruction, dass jede Collineation eine lineare Transformation sei und umgekehrt. Dem ist jetzt nicht mehr in demselben Sinne so.

Neben die gewöhnliche Collineation stellt sich nämlich eine zweite Art von Transformation $\rho x_i' = \sum a_{ik} \bar{x}_k$ wo $\bar{x}_k$ den zu x_k conjugierten Wert bezeichnet. Dieselbe ist vielfach von Autoren übersehen worden. Während bei der gewöhnlichen Collineation alle Doppelverhältnisse von vier collinearen Punkten, d. h. auch die complexen Doppelverhältnisse, völlig ungeändert bleiben, gehen hier die Doppelverhältnisse in ihre conjugiert imaginären Werte über; bei Beschränkung auf reelle Werte ist natürlich gegen früher nichts geändert. Das einfachste Beispiel dieser neuen Transformation giebt die Ersetzung jedes Raumpunktes durch seinen conjugiert imaginären, wie sie durch die Formeln dargestellt wird:

$$\rho x_1' = \bar{x}_1, \quad \rho x_2' = \bar{x}_2, \quad \rho x_3' = \bar{x}_3, \quad \rho x_4' = \bar{x}_4 .$$

Was gewinnen wir nun, wenn wir die genannten Begriffserweiterungen einführen, für die projektive Geometrie und die Invariantentheorie? Es werden vor allem verschiedene Gebilde linear verwandt werden, die es bisher nicht waren. Nach unseren bisherigen Begriffen haben wir z. B. zwei wesentlich verschiedene nicht zerfallende Arten von Kegelschnitten unterschieden, die einteiligen C_2 (Ellipse, Hyperbel, Parabel), gegeben durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, und die nullteiligen C_2, gegeben durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Diese lassen sich nun in einfachster Weise durch imaginäre Collineation, z. B. wenn wir $\rho x_1' = x_1$, $\rho x_2' = x_2$, $\rho x_3' = i x_3$ setzen, in einander überführen.

Das genau entsprechende Verhalten zeigen die Flächen zweiten Grades, die wir bisher einzuteilen gewohnt sind in

nullteilige F_2: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$,

ovale F_2: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$,

d. h. Ellipsoid, zweischaliger Hyperboloid, ell. Paraboloid,

ringförmige F_2: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$,

d. h. einschaliger Hyperboloid, hyperbolisches Paraboloid oder die geradlinige F_2.

Vom Standpunkte der imaginären Collineation aus verschwinden wieder die charakteristischen Unterschiede dieser Flächentypen.

Wenn wir noch allgemeiner vorgehen wollen, können wir die Frage aufwerfen nach Einteilung der quadratischen Formen für n homogene Veränderliche vom Standpunkt einerseits der allgemeinen linearen Transformationen, andrerseits der reellen linearen Transformationen. Es sei allgemein die Form gegeben:
$\sum a_{ik} x_i x_k$. Wir unterscheiden dann zunächst solche Formen, für welche die Determinante D der Coefficienten von 0 verschieden ist und solche, für die sie verschwindet. Letztere teilen wir weiter ein, je nachdem nicht sämmtliche ersten Unterdeterminanten D_{ik} oder alle verschwinden, weiter ob im letzten Falle nicht sämmtliche zweiten Unterdeterminanten $D_{ik,lm}$ verschwinden oder doch u. s. f. Diese Einteilung möge in Kürze das folgende Schema wiedergeben:

Es sei
0) $D \gtrless 0$
1.) $D = 0, D_{ik} \gtrless 0$
2.) $D_{ik} = 0, D_{ik,lm} \gtrless 0$
3.) $D_{ik,lm} = 0$ u. s. f.

Alle Formen derselben Art sind mit einander linear verwandt. Insbesondere zeigt es sich, dass man die quadratische Form in allen Fällen auf eine Summe von Quadraten zurückführen kann.

(1) Die verschiedenen Arten charakterisieren sich dabei in der Weise, dass wir als kanonische Typen im Falle

O eine Summe von n Quadraten, im Falle 1 von n-1 Quadraten, im Falle 2 von n-2 Quadraten u.s.w. bekommen.

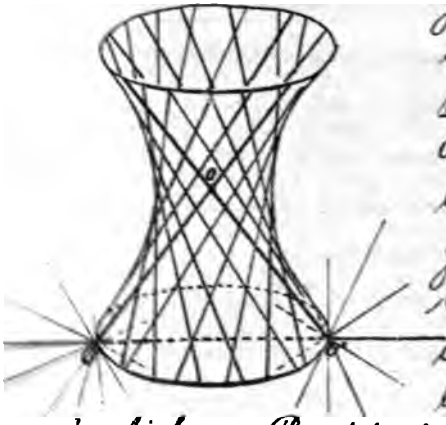
Stellen wir uns jetzt aber auf den speciellern Standpunkt der reellen linearen Transformationen, so greifen alle diejenigen Unterscheidungen Platz, welche mit dem Trägheitsgesetz der quadratischen Formen zusammenhängen, d.h. wir unterscheiden im Falle O je nach der Wahl der Vorzeichen $(n+1)$ Unterarten $\sum_1^n \pm x_i^2$, entsprechend im Falle 1 n Unterarten, im Falle 2 $(n-1)$ Unterarten u.s. fort. Dies ist die ganze in betracht kommende Einteilung. —

Den speciellen Fall der Flächen zweiten Grades wollen wir nun nach seiner geometrischen Seite hin weiter verfolgen, indem wir das einschalige Hyperboloid und die Kugel neben einander stellen. Da wir wissen, dass beide Flächen, allerdings nur durch imaginäre Collineation, in einander übergeführt werden können, so werden wir auch alle Sätze, die wir von der einen Fläche erkannt haben, auf die andere übertragen können. Betrachten wir nun das einschalige Hyperboloid genauer, indem wir es von einem beliebigen Punkte O auf ihm auf eine Ebene projektiv bezogen denken.

Man bezeichnet diese Beziehung von Alters her als

Stereographische Projektion.

Durch den Punkt O gehen zwei Erzeugende des Hyperboloids der einen und der anderen Art; dieselben mögen die Ebene in den Punkten O' und O'' durchstossen, deren Verbindungslinie zugleich die Schnittspur der Tangentialebene in O darstellt. Es gelten dann die folgenden Sätze: Den Punkten O' und O'', die wir die Fundamentalpunkte nennen, entsprechen auf dem Hyperboloid die sämtlichen Punkte der beiden Erzeugenden welche durch O laufen. Andrerseits entsprechen dem Punkte O selbst unendlich viele Punkte der Ebene, nämlich alle Punkte der Verbindungslinie O'O''. Ueberhaupt aber ist die Beziehung zwischen den Punkten des Hyperboloids und der Ebene ein-eindeutig.



Alle nicht durch O laufenden Erzeugenden erster Art projicieren sich als Strahlbüschel durch O', alle nicht durch O laufenden Erzeugenden der zweiten Art als Strahlbüschel durch O'. Jedem ein beliebiger Ebenenschnitt auch die beiden Erzeugenden durch [illegible] projicieren sich in die Ebene als Kegelschnitt [illegible]

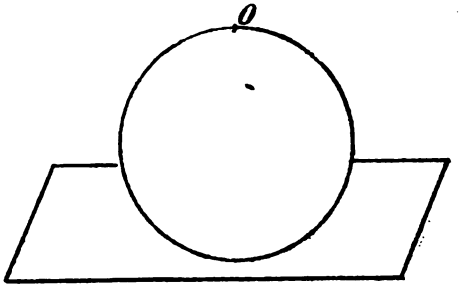
Diese Bemerkungen über die stereographische Projektion des Hyperboloids wollen wir nun auf die Kugel übertragen, wobei natürlich mancher Einzelne imaginär wird, was dort reell ist. Zunächst wird auch die Kugel zwei Scharen gerader Linien tragen, die freilich imaginär sind. Konstruiert man in einem beliebigen Punkte O der Kugel eine Tangentialebene, so schneidet diese zwei Erzeugende der Kugel aus, eine Erzeugende der ersten Art und eine Erzeugende der zweiten Art. Da die Tangentialebene auch den zu der Kugel gehörigen imaginären Kugelkreis in zwei Punkten trifft, so müssen die genannten Erzeugenden den Kugelkreis schneiden. Gerade Linien dieser letzten Eigenschaft nennen wir nun mit Lie allgemein Minimalgerade.

Wir können daher unsere bisherige Ueberlegung in dem kurzen Satze aussprechen: Alle geraden Linien der Kugel sind Minimalgerade. Wir wollen hier einen kleinen Excurs über die Minimalgeraden einschalten.

Wir stellen, wie leicht zu sehen, alle durch den Anfangspunkt laufenden Minimalgeraden dar in der Gleichung $x : y : z = \lambda : \mu : \nu$, indem wir zugleich $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$ nehmen. Diese Geraden haben einige merkwürdige, im Vergleich zu dem Verhalten reel-

aden paradoxe Eigenschaften. Da zunächst
$x^2+y^2+z^2=0$, so folgt, dass die Entfernung
beliebiger Punkte der Minimalgeraden von
ter gleich 0 ist. Ferner pflegt man gewöhn-
sagen, jede Minimalgerade stehe auf sich
senkrecht. Doch ist dies nicht streng richtig.
wird die Bedingung $xx'+yy'+zz'=0$, die wir
Senkrechtstehen zweier Richtungen vom Null-
aus erhalten, von der einzelnen Minimalgera-
füllt, da $x^2+y^2+z^2=0$ ist. Doch wenn wir die
eine Formel für den Winkel zwischen zwei Stra-
ch den Nullpunkt betrachten
$\cos\vartheta = \dfrac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)}}$,
ten wir, indem wir die beiden Strahlen mit
linimalgeraden zusammenfallen lassen,
$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{0}{0}.$$
den daher richtiger sagen, nicht: jede Mini-
ade steht auf sich selbst senkrecht, sondern: sie
t mit sich selbst einen unbestimmten Winkel
denfalls immer ein überraschendes Resultat. –
– nun zu der in Angriff genommenen stereographi-
Projektion zurück, indem wir die Ergebnisse
auf die Kugel übertragen. Wir wollen hier die

Projektionsebene speciell so wählen, dass sie der Tangentialebene der Kugel im Punkte O parallel ist.



Bei dieser Anordnung fallen alsdann die Fundamentalpunkte O' u. O'' der Abbildung als Schnitte der ungenden Minimalgeraden durch O in die beiden Kreispunkte der Bildebene. Ferner verwandeln sich die geradlinigen Ergenenden der Kugel, d.h. die Minimalgeraden, welche auf der Kugel liegen, in die beiden Büschel der Minimalgeraden, welche in der Bildebene vorhanden sind. Nun sind für diese stereographische Projektion der Kugel schon vom Alterthum her (Ptolemäus und die Geographen von Alexandria) zwei Sätze bekannt, dass jeder Kreis der Kugel in einen Kreis der Ebene übergeht und zu dem die Abbildung eine conforme ist. Wir erhalten die Sätze von unserem Standpunkte aus folgendermassen: Jeder ebene Schnitt der Kugel muss ein Kreis werden, weil er nach unserem analogen Satze beim Hyperboloid einen Kegelschnitt geben wird, der die Kreispunkte O' u. O'' enthält. Was den zweiten Satz betrifft, so definieren wir den Winkel zweier Richtungen auf der Kugel als

$\frac{i}{2}\log DV$, wo DV das Doppelverhältnis der letzteren mit den zugehörigen auf der Kugel vom Scheitel der Winkels auslaufenden Minimalgeraden darstellt. Nun aber überträgt sich dieses Doppelverhältnis ungeändert auf die vier entsprechenden Richtungen in der Ebene; von denen zwei gerade wieder Minimalgerade in der Ebene sind, so dass wir zur Berechnung des entsprechenden Winkels in der Ebene den mit $\frac{i}{2}$ multiplicierten Logarithmus desselben Doppelverhältnisses zu nehmen haben. —

Im vorstehenden haben wir ein Beispiel gegeben, wie die Schlussweise, die sich auf Anwendung complexer Collineationen stützt, manche Sätze direkt aus der Anschauung abzulesen gestattet, welche in anderer Weise einige analytische Rechnung oder besondere Ueberlegung erfordern. Indem die Sätze dann ganz selbstverständlich herauskommen, hat die Methode für denjenigen, der zum ersten Male von ihr Kenntniss nimmt, etwas Geheimnisvolles; sie öffnet sozusagen den Blick hinter den Schleier, der uns sonst den inneren Zusammenhang der Dinge verbirgt.

Wir müssen heute zunächst von dem allge- [Di. 31.I.93.]
meinen Begriff der „Minimalcurven" sprechen. Als solche bezeichnen wir allgemein diejenigen Curven, deren Bogendifferential $dx^2 + dy^2 + dz^2$ (in rechtwinkligen

Coordinaten) einen verschwindenden Wert hat. Dies aber besagt geometrisch, dass die Tangenten der Curven beständig den Kugelkreis treffen, dass also der Kugelkreis auf der zur Curve gehörigen developpablen Fläche liegt. Die Bogenlänge einer solchen Minimalcurve ist ihrer Definition gemäss natürlich gleich 0. Indem ferner die Osculationsebene zwei benachbarte Tangenten der Curve enthält, wird sie zugleich stets eine Tangentialebene des Kugelkreises sein. — Das einfachste Beispiel der Minimalcurven bilden eben die Minimalgeraden.

Es sei nun eine beliebige (vielleicht reelle) Fläche gegeben. In einer jeden ihrer Tangentialebenen werden wir vom Berührungspunkt aus zwei Fortschreitungsrichtungen auf den Kugelkreis zu, sagen wir zwei „Minimalrichtungen" angeben können. Indem wir in jeder derselben weiter gehen, werden die betr. Fortschreitungsrichtungen sich zu bestimmten Curven zusammensetzen, deren Tangenten stets Minimalgerade sind. Jede Fläche ist daher von zwei Scharen Minimalcurven überdeckt, welche durch Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung 2. Grades gefunden werden müssen. Ein Beispiel solcher Curvenscharen geben uns die geradlinigen Erzeugenden der Kugel, von denen wir in der letzten Stunde

ausführlicher sprechen. Wir behaupten nun: Die Minimalcurven auf der vorgelegten Fläche bilden eine besondere Art geodätischer Linien. Die gewöhnliche Definition einer geodätischen Linie nach welcher ihre Bogenlänge ein Maximum oder Minimum ist, wie es sich in der Bedingungsgleichung $\delta \int ds = 0$ und in dem ersten Vorzeichen der zweiten Variation ausdrückt, können wir hier nicht heranziehen. Denn sie hat offenbar nur im Reellen Bedeutung, indem man im Imaginären geradezu erst die Begriffe Maximum und Minimum festlegen müsste. Infolgedessen müssen wir auf die Differentialgleichung der geodätischen Linien zurückgehen, d. h. auf den Satz nach welchem eine geodätische Linie eine solche ist deren Osculationsebene immer auf der Tangentialebene der Fläche senkrecht steht.

Um dies durchzuführen merken wir uns vorerst die projektive Definition wann zwei Ebenen im Raume aufeinander senkrecht stehen. Indem wir die Schnittspuren mit der unendlich fernen Ebene in Betracht ziehen, finden wir die Beziehung: Zwei Ebenen nennen wir aufeinander senkrecht, wenn die genannten Spuren in Bezug auf den Kugelkreis conjugiert sind, d. h. wenn die eine Spur durch den Pol der anderen läuft.

Nun wollen wir uns überzeugen, dass letzteres in der That für die Osculationsebene und die Tangentialebene im zugehörigen Flächenpunkte der Fall ist. Die Schnittgerade der beiden Ebenen wird offenbar als Tangente der Minimalcurve eine Minimalgerade sein, d. h. den Kugelkreis treffen. Da nun zu dem letzteren nach dem früheren Satze von der Osculationsebene eben im Treffpunkte berührt wird, so sind die Spuren beider Ebenen in der unendlich fernen Ebene wirklich in Bezug auf den Kugelkreis conjugiert, und die beiden Ebenen stehen auf einander senkrecht. Damit ist unser Beweis geführt. Man nehme als Beispiel unsere früheren Entwickelungen über die geodätischen Linien der Flächen zweiten Grades.

Die Minimalcurven auf einer beliebigen Fläche werden insbesondere benutzt, um den Winkel φ zu definieren unter welchem sich zwei Curven auf derselben schneiden. Wir werden sagen, dass $\varphi = \frac{i}{2} \log D$ ist, unter D das Doppelverhältnis verstanden, welches die Fortschreitungsrichtungen der beiden Curven mit den Fortschreitungsrichtungen der von ihrem Schnittpunkte auslaufenden Minimalcurven einschliessen. Auf Grund dieser Winkeldefinition verstehen wir auch leicht, was es mit der conformen Abbildung zweier Flächen aufeinander für eine geometrische Bewandnis hat.

Die Aufgabe der conformen Abbildung spielt ja in den Anwendungen wie insbesondere in der Funktionentheorie eine hervorragende Rolle, und zwar handelt es sich dabei immer um solche specielle Abbildungen, die durch irgendwelche Nebenbedingungen festgelegt sind. Wir sprechen hier natürlich nur von der conformen Abbildung im Allgemeinen. Da zeigt sich nun folgendes Ergebnis: Zwei Flächen werden vermöge irgendwelcher Punkttransformationen dann und nur dann aufeinander conform abgebildet heissen, wenn bei der in Betracht kommenden Transformation die Minimalcurven der einen Fläche in die Minimalcurven der anderen Fläche übergegangen sind. Denn da jede Transformation im Unendlichkleinen linear ist, so wird das Doppelverhältnis von vier Fortschreitungsrichtungen auf der einen Fläche sich bei jeder Punkttransformation in das Doppelverhältnis der vier entsprechenden Fortschreitungsrichtungen der anderen Fläche verwandeln, der Winkel φ zweier Richtungen also, den wir unter Heranziehung der Minimalcurven durch $\frac{i}{2}\log J$ festlegen, unter der angegebenen Bedingung aber auch nur beim Stattfinden derselben in der That unverändert bleiben. In Formeln drückt sich die conforme Abbildung der Flächen aufeinander nun folgendermassen aus. Es seien

$$\left.\begin{aligned} u &= c_1 \\ v &= c_2 \end{aligned}\right\} \text{ und } \left.\begin{aligned} u' &= c_1' \\ v' &= c_2' \end{aligned}\right\}$$

die beiden Schaaren der Minimalcurven auf jeder der abzubildenden Fläche, indem wir annehmen, es sei gelungen die Integrale der beg. Differentialgleichungen in dieser Form aufzustellen. Setzen wir dann

$$u = f_1(u'), \quad v = f_2(v'),$$

so werden diese Gleichungen in allgemeinster Weise eine conforme Abbildung vermitteln. Denn mit $u' = \text{const}$ (oder $v' = \text{const}$) wird auch $u = \text{const}$ (oder $v = \text{const}$) werden. Andrerseits geben auch die Gleichungen: $u = f_1(v')$, $v = f_2(u')$ eine conforme Abbildung, nur sind die beiden Minimalcurvenschaaren jetzt mit einander gegen vorhin vertauscht. Wollen wir insbesondere eine reelle conforme Abbildung zweier reellen Flächen aufeinander haben, so werden wir u und v, u' und v' zu einander conjugiert nehmen und dann unter f_1 und f_2 ebenfalls conjugierte Funktionen verstehen.

Diese vielleicht zuerst ungewohnte Ausdrucksweise ist Ihnen doch in der Ebene ganz bekannt, sofern wir nur die hier benutzte geometrische Ausdrucksweise abstreifen. Es seien die beiden Ebenen mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y, begw. x', y' ausgestattet, dann sind doch die Minimalcurven auf ihnen begw. gegeben durch:

$$u = x + iy = C_1, \quad u' = x' + iy' = C_1',$$
$$v = x - iy = C_2, \quad v' = x' - iy' = C_2'.$$

Es soll nun $x+iy=f(x'+iy')$ nun dasjenige gelt, falls reelle Werte x,y wieder reellen Werten $x'y'$ entsprechen sollen und umgekehrt,

$$x-iy=f(x'-iy').$$

Dies ist die eine Art der Beziehung die andere ist

$$x+iy=\varphi(x'-iy'),$$
$$x-iy=\bar{\varphi}(x'+iy').$$

Diese Formeln der conformen Abbildung zweier Ebenen auf einander sind aus der Functionentheorie her ganz bekannt, sie unterscheiden sich dadurch, dass im letzten Fall noch eine Umlegung der Winkel, wie sie die Spiegelung liefert, eingeschlossen ist: — Soviel über das Problem der conformen Abbildung.

Was nun diese ganze „pseudogeometrische" Ausdrucksweise betreffend Veranschaulichung der Imaginären angeht, so ist dieselbe insbesondere von Chasles und seiner Schule, etwa in den Jahren 1860-1870, entwickelt worden. In Deutschland hat sie, wenigstens in der Differentialgeometrie, nicht rechten Fuss zu fassen vermocht. Man hat sich ihr gegenüber ablehnend verhalten, weil sie zu verschwommen sei. Wir sagen demgegenüber, dass diese Methode ihre volle mathematische Berechtigung besitzt, indem sie dem mathematischen Fortschritt dient; sie wird erst bedenklich und dann unzweckmässig, wo sie mangelhaft verstanden wird

Als einen glänzenden Beleg für die Nützlichkeit dieser Methode will ich in den Grundzügen die Lie'sche Theorie der Minimalflächen vortragen, die völlig auf diesen Vorstellungen beruht. Dieselbe findet sich in Ann. 14. 15 (1878, 79) entwickelt und knüpft an die alten Formeln an, die Monge in seinen Applications d'Analyse und Weierstrass in den Berliner Monatsberichten 1866 abgeleitet hat, indem diese in dem discutierten Sinne geometrisch aufgefasst werden. Dass hiermit ein ganz neues Leben in die Theorie der Minimalflächen hineingetragen wird, liegt auf der Hand; man vergleiche nur l.c. die neuen Resultate, zu denen Lie gelangt.

Indem wir die Formeln von Monge beiseite lassen, die minder einfach gebaut sind, schliessen wir uns sogleich an die folgenden Formeln von Weierstrass an:

$$\begin{aligned} X &= \Re\left[(1-s^2)F''(s) + 2sF'(s) - 2F(s)\right] = \Re\left[2A(s)\right], \\ Y &= \Re\left[i(1+s^2)F''(s) - 2isF'(s) + 2iF(s)\right] = \Re\left[2B(s)\right], \\ Z &= \Re\left[2sF''(s) - F(s)\right] \qquad\qquad\qquad = \Re\left[2C(s)\right], \end{aligned}$$

in denen X, Y, Z die Coordinaten des einzelnen Flächenpunktes und $\Re$ den reellen Teil der in Klammern beigefügten Funktionen bezeichnen; für letztere haben wir sogleich zweckmässige Abkürzungen eingeführt. Die Funktion $F(s)$ soll eine ganz beliebige Funktion der complexen Variabeln s sein.

Sie führt nun Variable x, y, z ein, die er den complexen

Functionen der Klammerausdrücke selbst gleichsetzt, also

$$x = \mathfrak{A}(s),$$
$$y = \mathfrak{B}(s),$$
$$z = \mathfrak{C}(s),$$

und fügt eine zweite analoge Formelgruppe für Variable x', y', z' hinzu:

$$x' = \mathfrak{A}'(s'),$$
$$y' = \mathfrak{B}'(s'),$$
$$z' = \mathfrak{C}'(s'),$$

in denen s' irgend welche complexe Variable und $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ Functionen bezeichnen, die aus irgend welcher Function $F'(s')$ in derselben Weise zusammengesetzt sind, wie $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ aus $F(s)$.

Die Weierstrass'schen Formeln kommen dann darauf hinaus, dass man allemal eine Minimalfläche hat, wenn man $X = x + x'$, $Y = y + y'$, $Z = z + z'$ setzt. Nur dann, wenn man darauf ausgeht, eine reelle Minimalfläche zu haben, wird man die Grössen s und s', $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ conjugirt imaginär nehmen müssen.

Wir wollen nun mit Lie näher auf den geometrischen Inhalt dieses Satzes eingehen:

Durch einfache Ausrechnung finden wir die Formeln:

$$dx = (1 - s^2)\, F'''\, ds,$$
$$dy = i(1 - s^2)\, F'''\, ds,$$
$$dz = 2s F'''(s)\, ds,$$

und analoge Formeln für dx', dy', dz'. Da sonach $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$ (bezw. $dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0$) wird, so haben wir das Re-

sultat: Der Punkt x, y, z (bezw. x', y', z') beschreibt, wenn sich s (bezw. s') bewegt, eine erste resp. zweite Minimalcurve. Aus diesen beiden Minimalcurven setzt sich nun die Fläche zusammen vermöge der Gleichungen $x = \mathfrak{A}(s) + \mathfrak{A}'(s')$, $y = \mathfrak{B}(s) + \mathfrak{B}'(s')$ $z = \mathfrak{C}(s) + \mathfrak{C}'(s')$. Es handelt sich nun um die Bedeutung dieser Gleichungen. Sie bemerkt, dass jede solche Formelgruppe für x, y, z ganz allgemein (abgesehen von der specielleren Form der Functionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ u.s.w.) eine Fläche definiert, welche in doppelter Weise durch Translation erzeugt werden kann und deshalb Translationsfläche genannt wird.

Setzen wir nämlich s' zunächst gleich einem constanten Wert, so erkennen wir, dass die ursprüngliche Curve $x = \mathfrak{A}(s)$, $y = \mathfrak{B}(s)$, $z = \mathfrak{C}(s)$ auf unserer Fläche in bestimmter Weise mit sich selbst parallel verschoben erscheint, indem jede der Coordinaten um einen constanten Wert vermehrt ist. Indem nun aber s' variabel wird, bekommen diese hinzugefügten Werte andere und andere Grössen, d.h. die Curve der x, y, z wird mit sich selbst parallel in bestimmter Weise längs der Curve der x', y', z' in Translationsbewegung entlang geführt. Andererseits kann man auch die Curve der $x' y' z'$ an der Curve der $x y z$ in Translationsbewegung entlang führen; beide Male kommt man, wie leicht zu sehen, zu derselben Fläche.

Es ist nun die charakteristische Eigenschaft der allgemeinen Translationsfläche (deren Leitcurven keineswegs Minimalcurven zu sein brauchen), dass in jedem ihrer Punkte die beiden Hauptfangenten harmonisch zu den beiden erzeugenden Curven liegen. Man beweist dies sofort indem man die dX, dY, dZ nach Potenzen von ds entwickelt. Hiervon ist es ein blosses Corollar, dass ein unserem Falle wo die beiden Erzeugenden Minimalcurven sind, eine Minimalfläche entsteht. Denn die Hauptfangenten werden bei uns in einem beliebigen Flächenpunkte zu den Minimalcurven harmonisch liegen, sie stehen demnach aufeinander senkrecht, und dieses ist der bekannte Charakter der Minimalflächen.

Wir lassen so zusammen:

Der geometrische Inhalt der Formeln von Monge und Weierstrass erscheint als dieser, dass die Minimalflächen [illegible] specielle Fall der Translationsflächen sind, welcher herauskommt, wenn man insbesondere eine Minimalcurve an einer anderen Minimalcurve verschiebt. [illegible] weiteren Ausführung dieser Lie'schen Theorie [illegible] in der Autographie [illegible] verwiesen; [illegible] Formeln durch [illegible] mehr symmetrische

Formeln übergeführt.

Wir wollen heute zunächst die stereographische [Do. 2. II. 93.] Projektion der Kugel auf die Ebene noch näher untersuchen, um diese Betrachtungen dann auf höhere Räume zu verallgemeinern, und zwar ist unser Zweck, die erstere mit den Entwickelungen über die tetracyclischen Punktcoordinaten der Ebene, wie sie vor Weihnachten gegeben sind, in Beziehung zu setzen. Die Gleichung der Kugel in homogen geschriebenen rechtwinkligen Coordinaten sei gegeben durch $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$.

Wir wählen die xy-Ebene als Projektionsebene und den Punkt $x = 0, y = 0, z = 1$ als Centrum der Projektion. Dann gelten die Formeln:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= x_1 \\ \varrho x_2 &= y \\ \varrho x_3 &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{2} \\ \varrho x_4 &= \frac{x^2 + y^2 + 1}{2}, \end{aligned}$$

welche die Beziehung von Kugel und Ebene analytisch wiedergeben. Denken wir nun daran zurück, dass wir die tetracyclischen Punktcoordinaten in der Ebene als den linken Seiten von Kreisgleichungen, die auch gerade Linien vorstellen konnten, proportionale Grössen eingeführt hatten.

Unsere letzten Formeln zeigen dann unmittelbar, dass

die x_1, x_2, x_3, x_4 der Kugelpunkte geradezu tetracyclische Coordinaten für die entsprechenden Punkte der Ebene sind, deren identische Gleichung durch die Kugelgleichung gegeben wird. Nun hatten sich aus irgend welchem Gebenderen System der tetracyclischen Coordinaten die allgemeinen als lineare Verbindungen der letzteren ergeben, zwischen denen dann immer wieder eine quadratische Bedingungsgleichung $R(x_i) = 0$ bestand. Führen wir die gleiche Transformation im Raume aus, so besagt dieses einfach, dass wir die Kugel auf ein neues Coordinatentetraeder beziehen.

Die allgemeinen tetracyclischen Coordinaten x_i eines Punktes der Ebene werden wir daher immer auffassen können als die homogenen Linearcoordinaten des entsprechenden Kugelpunktes, wobei die Identität $R(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ einfach die Gleichung der Kugel in dem betreffenden Coordinatensystem ist.

Tetracyclische Coordinaten in der Ebene einführen heisst daher die Ebene als stereographisches Bild einer Kugel betrachten die auf irgend ein Coordinatentetraeder bezogen ist. Mit dieser Auffassung haben wir dann in das Wesen der tetracyclischen Coordinaten sowie in die auf sie sich gründenden Entwickelungen eine weit bessere und klarere Einsicht gewonnen,

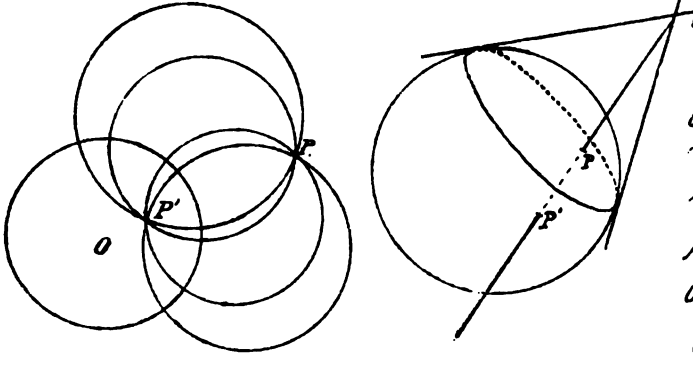
als es früher möglich war. Beispielsweise wird jetzt ganz klar, warum das unendlich Weite der Ebene beim Gebrauche tetracyclischer Coordinaten als ein Punkt auftritt, dem das unendlich Weite entspricht bei der stereographischen Projektion ja einem einzelnen Kugelpunkte, dem Centrum der Projektion.

Doch wollen wir sogleich einen weniger einfachen Gegenstand in der neuen Beleuchtung uns ansehen, nämlich die Theorie der confocalen cyclischen Curven. Wir wollen die Gleichung der Kugel in der Gestalt $\sum_1^4 x_i^2 = 0$ gegeben denken, was natürlich nur unter Zulassung einer imaginären Transformation möglich ist. Das Orthogonalsystem der cyclischen Curven der Ebene wird dann gegeben durch die Gleichung

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0 .$$

Indem diese Gleichung im Raume eine Schaar von Flächen zweiten Grades darstellt, erscheinen die confocalen cyclischen Curven jetzt als die Schnittcurven unserer Kugel mit dieser bestimmten Schaar von F_2. Um letztere nun geometrisch zu verstehen, werden wir wieder Ebenencoordinaten einführen, also Coordinaten u_1, u_2, u_3, u_4, der Gleichung $u_x = 0$ entsprechend, welche der Ausdruck für die vereinigte Lage von Punkt und Ebene sein soll. Die Gleichung der Kugel geht dann

wir das einfache Resultat: Die Kreise der Ebene entsprechen den ebenen Schnitten der Kugel. Weiter ergibt sich als Bedingung für die senkrechte Durchdringung zweier Kreise $\sum a_i x_i = 0$ und $\sum b_i x_i = 0$ die Gleichung $\sum a_i b_i = 0$, d.h. wieder auf den Raum übertragen: Die Kreise stehen auf einander senkrecht, wenn die beiden Schnittebenen in Bezug auf die Kugel conjugiert sind. Was bedeutet nun die Inversion in der Ebene für die Kugel im R_3? Wir wissen, zwei Punkte P u. P' der Ebene sind durch die Transformation der reciproken Radien in bezug auf einen Kreis einander zugeordnet, wenn die durch erstere gehende Kreisschaar den letzteren rechtwinklig schneidet.



Diese Beziehung gestattet uns sogleich den letzten Satz anzuwenden. Indem wir dann berücksichtigen, dass die räumliche Verbindungslinie PP' der auf die Kugel übertragenen Zeichnung sich als Schnitt zweier Ebenen, die

beide zu der Schnittebene des Grundkreises conjugiert sein müssen, darstellt, ergiebt sich der neue Satz:

Zwei reciproke Pole in bezug auf einen Kreis der Ebene liefern auf der Kugel zwei Punkte, deren Verbindungsgerade durch den Pol M desjenigen Ebenenschnittes der Kugel läuft, der dem gegebenen Kreise der Ebene entspricht. Die Umformung der Ebene durch reciproke Radien liefert daher auf der Kugel die einfache Umformung durch Perspektive vom Punkte M aus. Das letztere aber eine lineare Transformation der Coordinaten x_1 x_2 x_3 x_4 darstellt liegt auf der Hand.

Wir wollen nun unseren Standpunkt noch allgemeiner wählen, indem wir geradezu von einer projektiven Geometrie auf der Kugel machen. Die projektive Geometrie der Ebene behandelt, wie wir wissen, alle diejenigen Eigenschaften der Figuren, welche bei den linearen Transformationen der Ebene in sich unverändert [illegible] Gesammtheit der [illegible] Man- [illegible] Satz [illegible] Kugel [illegible] Collineationen [illegible] bereits [illegible] Wir [illegible] der [illegible] Geometrie [illegible]

Eigenschaften der sphärischen Figuren handelt, die bei den genannten sechsfach unendlich vielen Collineationen ungeändert bleiben. In dieser Geometrie bilden die ebenen Schnitte der Kugel und insbesondere die Minimalgeraden derselben die wichtigsten Elemente. Vor allen Dingen ist auch der Winkel zweier Richtungen etwas Bleibendes, da er mit Hülfe der Minimalgeraden projektivisch definiert wird. Indem wir jetzt die Kugel stereographisch auf die Ebene projiciren, erhalten wir in letzterer eine sechsfach unendliche Gruppe von Umformungen, welche wir die Gruppe der reciproken Radien nennen, weil sie neben den gewöhnlichen Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen der Ebene insbesondere sämmtliche Transformationen derselben durch reciproke Radien umfasst. Als Gegenstück der projektiven Geometrie auf der Kugel bekommen wir so eine Geometrie der Ebene, welche wir die Geometrie der reciproken Radien nennen; bei derselben sind die Kreise der Ebene, die Minimalgeraden derselben und die Winkel zweier Richtungen die elementaren bleibenden Elemente. Diese Geometrie der reciproken Radien wird nun in vielen Teilen der mathematischen Physik, insbesondere aber allgemein in der Funktionentheorie zu Grunde gelegt, indem die reellen Transformationen der

Gruppe der reciproken Radien durch die allgemeinen Formeln gegeben werden

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \text{ u. } z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}, \text{ unter } z$$

eine complexe Variable, unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ complexe Coefficienten verstanden.

Diese Geometrie der reciproken Radien mit den Punkten, Kreisen und Winkeln als bleibenden Elementen stellt sich hier neben die projektive Geometrie der Ebene, welche die Punkte und geraden Linien als Elemente betrachtet. Man hat die Letztere, besonders in elementaren Lehrbüchern, wohl als die absolute Geometrie hingestellt, d. h. als die einzige sich aus dem Wesen der Sache aufbauende Geometrie. Dem gegenüber ist ausdrücklich zu betonen, dass die beiden genannten ebenen Geometrien gleiche Berechtigung haben und einander vollständig coordiniert sind. Auch wollen wir andererseits bedenken, dass die Geometrie der reciproken Radien sich analytisch als quaternäre Invariantentheorie linearer Substitutionen bei ein für allemal zugrundegelegter Gleichung 2ten Grades darstellt, während die projektive Geometrie ihr Gegenbild in der ternären linearen Invariantentheorie findet. Beide Geometrien sind also unterbegriffen unter die allgemeine lineare Invariantentheorie, oder, wenn wir wollen, unter die projektive Geometrie hinreichend ausge-

dehnter Räume; insofern hat hier die projektive Geometrie, wenn wir sie nicht auf die Betrachtung der Ebene einschränken, doch eine beherrschende Stellung. Nun wollen wir dazu übergehen, die analogen Entwickelungen im Raume höherer Dimensionen durchzuführen, und zwar werden wir uns der Analogieschlüsse bedienen, die aber ihre volle Berechtigung haben, da ihnen die analytischen Entwickelungen jedergeit zur Seite stehen. Wir denken uns etwa eine Kugel im Raume von vier Dimensionen gegeben; dieselbe werden wir stereographisch auf den dreidimensionalen Punktraum bezogen denken. In dem wir die Kugel mit irgendwelchen fünf homogenen Linearcoordinaten

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 behandeln, sehen wir in letzteren dann gerade jene pentasphärischen Coordinaten des R_3, die wir vor Weihnachten in anderer Weise eingeführt hatten.

Allgemein gilt der Satz: Die Behandlung des Raumes von n Dimensionen mit $n+2$ polysphärischen Coordinaten mit einer quadratischen Identitätsgleichung kommt darauf hinaus, den Raum von n Dimensionen als stereographische Projektion einer Kugel im Raum von $n+1$ Dimensionen anzusehen, die man ihrerseits mit gewöhnlichen homogenen Coordinaten behandelt. Bei $n+2$ homogenen Variabeln enthält aber die allgemeine lineare Substitution $(n+2)^2$ Coefficienten; an-

dreiseits besitzt eine Form zweiten Grades der genannten Variabeln $\frac{(n+2)(n+3)}{2}$ Coefficienten. Die Differenz der beiden Zahlen $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ giebt daher die Mannigfaltigkeit der linearen Transformationen an, welche eine einzelne Form zweiten Grades die in unserem Falle die Kugel der R_{n-1} darstellt, in sich selbst überführen. Die Angahl der Umformungen, welche bei der projektiven Geometrie unseren Kugel im R_{n-1} oder bei der Geometrie der reciproken Radien im R_n zugrunde liegen, beträgt daher für $n = 2, 3, 4$ entsprechend $\infty^6, \infty^{10}, \infty^{15}$, allgemein $\infty^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$.

Ein besonderes Interesse richtet sich in der Geometrie der reciproken Radien auf die geradlinigen Erzeugenden unserer mehrdimensionalen Kugeln, die sich im R_n als Minimalgerade projicieren. Bei allen unseren Umformungen müssen sicher die geradlinigen Erzeugenden der Kugel ihre Eigenschaft behalten, d.h. geradlinige Erzeugende der Kugel bleiben und also die Minimalgeraden des R_n wieder in die Minimalgeraden übergehen. Demzufolge sind alle unsere Umformungen im Raume von n Dimensionenconform, d.h. sie lassen die Grösse der Winkel ungeändert.

Nun zeigt sich ein höchst wichtiger Theorem, welcher für $n = 2$ noch nicht gilt, wohl aber für $n \geq 3$. Wenn wir nämlich von der conformen Abbildung

in der Ebene sprechen, so wissen wir, dass es neben der linearen Substitution der complexen Variabeln z oder $\bar{z}$, welche diese Eigenschaft haben, noch beliebige andere Transformationen giebt, welche gleichfalls conform sind. Wir haben dieselben noch neulich aufgezählt. Wollen wir ganz allgemein sein, so müssen wir die beiden Formelpaare neben einander stellen:

$$z' = f_1(z), \quad \bar{z}' = f_2(\bar{z})$$

und

$$z' = f_1(\bar{z}), \quad \bar{z}' = f_2(z).$$

Wollen wir aber, wie das in der gewöhnlichen Funktionentheorie geschieht, uns auf reelle Transformationen beschränken, so werden wir f_1 und f_2 als conjugierte Functionen nehmen müssen und brauchen dann nur die einzelnen Formeln

$$z' = f_1(z) \text{ resp. } z' = f_2(\bar{z})$$ zu schreiben.

Demgegen gilt für $n \geq 3$ der Satz, dass neben den uns jetzt bekannten $\infty^{\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}}$ Transformationen keine andere Transformation dieser Eigenschaft mehr existiert. (Dieser Satz ist von Liouville aufgestellt worden; vgl. die Ergänzungssysteme in der Ausgabe von Monge's Applications d'analyse vom Jahre 1850). Wir wollen nun versuchen, uns diesen Satz geometrisch klar zu machen. Wir beschränken uns jedoch auf den Raum von drei Dimensionen ($n = 3$), indem unserem Satze gemäss dann nur jene

beide zu der Schnittebene des Grundkreises conjugiert sein müssen, darstellt, ergiebt sich der neue Satz:
Zwei reciproke Pole in bezug auf einen Kreis der Ebene liefern auf der Kugel zwei Punkte, deren Verbindungsgerade durch den Pol M desjenigen Ebenenschnittes der Kugel läuft, der dem gegebenen Kreise der Ebene entspricht. Die Umformung der Ebene durch reciproke Radien liefert daher auf der Kugel die einfache Umformung durch Perspektive vom Punkte M aus. Das letztere aber eine lineare Transformation der Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 darstellt, liegt auf der Hand.
Wir wollen nun unseren Standpunkt noch allgemeiner wählen, indem wir geradezu von einer projektiven Geometrie auf der Kugel sprechen. Die projektive Geometrie der Ebene behandelt, wie wir wissen, alle diejenigen Eigenschaften der Figuren, welche bei den linearen Transformationen der Ebene in sich unverändert bleiben, die letzteren bilden als Gesammtheit der ternären Substitutionen eine achtfach unendliche Mannigfaltigkeit. Demgegenüber steht der Satz, dass die Kugel bei sechsfach unendlich vielen Collineationen des Raumes in sich übergeht, wie wir früher bereits einmal abgezählt haben. Wir stellen daher der projektiven Geometrie der Ebene eine projektive Geometrie auf der Kugel entgegen, welche von allen denjenigen

Eigenschaften der sphärischen Figuren handelt, die bei den genannten sechsfach unendlich vielen Collineationen ungeändert bleiben. In dieser Geometrie bilden die ebenen Schnitte der Kugel und insbesondere die Minimalgeraden derselben die wichtigsten Elemente. Vor allen Dingen ist auch der Winkel zweier Richtungen etwas Bleibendes, da er mit Hülfe der Minimalgeraden projektivisch definiert wird. Indem wir jetzt die Kugel stereographisch auf die Ebene projiciren erhalten wir in letzterer eine sechsfach unendliche Gruppe von Umformungen, welche wir die Gruppe der reciproken Radien nennen, weil sie neben den gewöhnlichen Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen der Ebene insbesondere sämmtliche Transformationen derselben durch reciproke Radien umfasst. Als Gegenstück der projektiven Geometrie auf der Kugel bekommen wir so eine Geometrie der Ebene, welche wir die Geometrie der reciproken Radien nennen; bei derselben sind die Kreise der Ebene, die Minimalgeraden derselben und die Winkel zweier Richtungen die elementaren bleibenden Elemente. Diese Geometrie der reciproken Radien wird nun in vielen Teilen der mathematischen Physik, insbesondere aber allgemein in der Funktionentheorie zu Grunde gelegt, indem die reellen Transformationen der

Gruppe der reciproken Radien durch die allgemeinen Formeln gegeben werden

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \text{ u. } z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}$$, unter z eine complexe Variable, unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ complexe Coefficienten verstanden.

Diese Geometrie der reciproken Radien mit den Punkten, Kreisen und Winkeln als bleibenden Elementen stellt sich hier neben die projektive Geometrie der Ebene, welche die Punkte und geraden Linien als Elemente betrachtet. Man hat die Letztere, besonders in elementaren Lehrbüchern, wohl als die absolute Geometrie hingestellt, d. h. als die einzige sich aus dem Wesen der Sache aufbauende Geometrie. Dem gegenüber ist ausdrücklich zu betonen, dass die beiden genannten ebenen Geometrien gleiche Berechtigung haben und einander vollständig coordiniert sind. Auch wollen wir andrerseits bedenken, dass die Geometrie der reciproken Radien sich analytisch als quaternäre Invariantentheorie linearer Substitutionen bei ein für allemal zugrundegelegter Gleichung 2ten Grades darstellt, während die projektive Geometrie ihr Gegenbild in der ternären linearen Invariantentheorie findet. Beide Geometrien sind also unterbegriffen unter die allgemeine lineare Invariantentheorie, oder, wenn wir wollen, unter die projektive Geometrie hinreichend ausge-

dehnter Räume; insofern hat hier die projektive Geometrie, wenn wir sie nicht auf die Betrachtung der Ebene einschränken, doch eine beherrschende Stellung. Nun wollen wir dazu übergehen, die analogen Entwickelungen im Raume höherer Dimensionen durchzuführen, und zwar werden wir uns der Analogieschlüsse bedienen, die aber ihre volle Berechtigung haben, da ihnen die analytischen Entwickelungen jederzeit zur Seite stehen. Wir denken uns etwa eine Kugel im Raume von vier Dimensionen gegeben; dieselbe werden wir stereographisch auf den dreidimensionalen Punktraum bezogen denken. Indem wir die Kugel mit irgendwelchen fünf homogenen Linearcoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 behandeln, sehen wir in letzteren dann gerade jene pentasphärischen Coordinaten des R_3, die wir vor Weihnachten in anderer Weise eingeführt hatten. Allgemein gilt der Satz: Die Behandlung des Raumes von n Dimensionen mit $n+2$ polysphärischen Coordinaten mit einer quadratischen Identitätsgleichung kommt darauf hinaus, den Raum von n Dimensionen als stereographische Projektion einer Kugel im Raum von $n+1$ Dimensionen anzusehen, die man ihrerseits mit gewöhnlichen homogenen Coordinaten behandelt. Bei $n+2$ homogenen Variabeln enthält aber die allgemeine lineare Substitution $(n+2)^2$ Coefficienten; an-

dreseits besitzt eine Form zweiten Grades der genannten Variabeln $\frac{(n+2)(n+3)}{2}$ Coefficienten. Die Differenz der beiden Zahlen $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ giebt daher die Mannigfaltigkeit der linearen Transformationen an, welche eine einzelne Form zweiten Grades die in unserem Falle die Kugel der R_{n+1} darstellt, in sich selbst überführen. Die Angahl der Umformungen, welche bei der projektiven Geometrie unseren Kugel im R_{n+1} oder bei der Geometrie der reciproken Radien im R_n zugrunde liegen, beträgt daher für $n = 2, 3, 4$ entsprechend $\infty^6, \infty^{10}, \infty^{15}$, allgemein $\infty^{\frac{(n+2)\cdot(n+3)}{2}}$.

Ein besonderes Interesse richtet sich in der Geometrie der reciproken Radien auf die geradlinigen Erzeugenden unserer mehrdimensionalen Kugeln, die sich im R_n als Minimalgerade projicieren. Bei allen unseren Umformungen müssen sicher die geradlinigen Erzeugenden der Kugel ihre Eigenschaft behalten, d.h. geradlinige Erzeugende der Kugel bleiben und also die Minimalgeraden des R_n wieder in die Minimalgeraden übergehen. Demgefolge sind alle unsere Umformungen im Raume von n Dimensionenconform, d.h. sie lassen die Grösse der Winkel ungeändert.

Nun zeigt sich ein höchst wichtiges Theorem, welcher für $n = 2$ noch nicht gilt, wohl aber für $n \geq 3$. Wenn wir nämlich von der conformen Abbildung

in der Ebene sprechen, so wissen wir, dass es neben der linearen Substitution der complexen Variabeln z oder $\bar{z}$, welche diese Eigenschaft haben, noch beliebige andere Transformationen giebt, welche gleichfalls conform sind. Wir haben dieselben noch neulich aufgezählt. Wollen wir ganz allgemein sein, so müssen wir die beiden Formelpaare neben einander stellen:

$$z' = f_1(z), \quad \bar{z}' = f_2(\bar{z})$$

und

$$z' = f_1(\bar{z}), \quad \bar{z}' = f_2(z).$$

Wollen wir aber, wie das in der gewöhnlichen Funktionentheorie geschieht, uns auf reelle Transformationen beschränken, so werden wir f_1 und f_2 als conjugierte Functionen nehmen müssen und brauchen dann nur die einzelnen Formeln

$$z' = f_1(z) \text{ resp. } z' = f_2(\bar{z})$$ zu schreiben.

Demgegen gilt für $n \geq 3$ der Satz, dass neben den uns jetzt bekannten $\infty^{\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}}$ Transformationen keine andere Transformation dieser Eigenschaft mehr existiert. (Dieser Satz ist von Liouville aufgestellt worden; vgl. die Ergänzungssysteme in der Ausgabe von Monge's Applications d'analyse vom Jahre 1850). Wir wollen nun versuchen, uns diesen Satz geometrisch klar zu machen. Wir beschränken uns jedoch auf den Raum von drei Dimensionen ($n = 3$), indem unserem Satze gemäss dann nur jene

∞^{10} conformen Abbildungen möglich sind. Wir wollen unsere Betrachtung in einzelne Sätze gliedern, die wir aneinander reihen 1. Wenn eine Punkttransformation conform sein soll, so muss, wie man gern zugeben wird, jede Minimalrichtung wieder eine Minimalrichtung werden.

2. Jede Minimalcurve wird dann in eine Minimalcurve übergehen.

3. Jetzt müssen wir unsere Aufmerksamkeit auf die developpabeln Flächen richten, welche von den Tangenten der Minimalcurven gebildet werden. Jede Minimaldevelopp able muss gleichfalls wieder in eine Minimaldevelopp able übergehen. denn diese Flächen haben die sie vor anderen Flächen auszeichnende charakteristische Eigenschaft, nur eine Schaar von Minimalcurven zu tragen.

4. Betrachten wir nun einmal zwei Minimalcurven, die sich berühren und die zu ihnen gehörenden developpabeln Flächen. Die letzten werden sich dann längs der ganzen Erstreckung der gemeinsamen Tangente, d.h. längs einer Minimalgeraden, berühren. Bei der Transformation müssen dieselben wieder in zwei solche developpabeln Flächen übergehen, die sich längs einer Minimalgeraden berühren. Hieraus folgt: Jede Minimalgerade muss eine Minimalgerade

liefern (dies ist wesentlich mehr als die Aussage unter 2.)

5. Nun betrachten wir die Kugeln unseres R_3. Dieselben sind unter allen übrigen Flächen dadurch charakterisiert, dass sie zwei Scharen von Minimalgeraden tragen. Demnach müssen in Rücksicht auf den Satz 4 die Kugeln wieder in Kugeln übergehen, wobei die Ebene natürlich als specieller Fall der Kugel angesehen wird.

6. Da nun die Abbildung conform sein soll, so liefern Orthogonalkugeln wieder Orthogonalkugeln.

Soweit bewegt sich unsere Betrachtung im R_3.

7. Jetzt gehen wir zu der Kugel im R_4 über. Indem die Kugeln des R_3 sich als ebene Schnitte der Kugel des R_4 projicieren, haben wir also eine Punkttransformation dieser Kugel in sich zu suchen, bei der jeder ebene Schnitt wieder einen ebenen Schnitt liefert und speciell conjugierte Ebenen infolge des Satzes 6 wieder in conjugierte Ebenen übergehen.

8. Betrachten wir der Einfachheit halber für einen Augenblick die analoge Transformation der Kugel im R_3 in sich selbst. Alle Ebenen, welche bezüglich dieser Kugel zu einer festen Ebene conjugiert sind, laufen durch einen bestimmten Raumpunkt (den Pol der festen Ebene). Es wird sich also um eine Ebenentransformation des Raumes handeln, bei der alle

Punkte in Punkte übergehen.

9. Genau so werden wir auch jetzt auf eine Transformation des ganzen R_4 schliessen, bei der jede Ebene in eine Ebene, jeder Punkt in einen Punkt übergeht.

10. Eine Transformation mit solchen Eigenschaften ist aber notwendig eine Collineation; wir brauchen, um dies zu beweisen, die gerade Linie nur als Schnitt zweier Ebenen anzusehen. Eine Collineation aber ist gemäss der Moebius'schen Netzkonstruktion immer eine lineare Transformation.

Wir haben daher das Resultat:

<u>Jede Punkttransformation des R_3, welche conform ist, wird durch eine solche lineare Transformation des R_4 geliefert, bei welcher die Kugel des R_4 auf die wir den R_3 stereographisch bezogen haben, in sich selbst übergeht;</u>

<u>und dies sind die ∞^{10} conformen Transformationen, die wir von Anfang an kannten.</u>

Nun ist es besonders interessant, sich klar zu machen, warum man den obigen Beweisgang für $n = 2$ nicht festhalten kann. Man erkennt sofort, dass der Uebertragung der 4 ersten Punkte nichts im Wege steht, wohl aber ist der Punkt fünf bei zwei Dimensionen hinfällig, weil die Kugel kein analoges Gebilde von gleicher charakteristischer Eigenschaft in der Ebene

hat. Dies also ist der springende Punkt. Andererseits gilt der Beweis a fortiori für eine erhöhte Dimensionenzahl. Nun hatten wir ja in der Ebene die fragliche Geometrie als die Geometrie der reciproken Radien bezeichnet; bei 3 und mehr Dimensionen können wir auf Grund des geführten Beweises unsere Geometrie der polysphärischen Coordinaten geradezu als conforme Geometrie bezeichnen, ein Ausdruck, dessen Uebertragung auf zwei Dimensionen natürlich nicht zulässig ist.

[Fr. 3. II. 93]

Wir wollen heute den Gedanken, der den Betrachtungen der letzten Stunden implicite zu Grunde liegt, in allgemeiner Weise betrachten, indem wir uns fragen, inwiefern das Heranziehen höherer Räume auch abgesehen von dem besonderen Falle der stereographischen Projektion ein besseres Verständnis für die geometrischen Verhältnisse in niedereren Räumen gewähren kann. Und zwar wollen wir diese Frage nach drei Richtungen hin durch Beispiele zu beantworten suchen. Zunächst kommen die Betrachtungen zur Besprechung, die sich auf Punktepaare, Punkttripel, kurz auf Aggregate von n Punkten der geraden Linie beziehen, zu denen die binäre Invariantentheorie Anlass giebt. Wir werden sehen, dass es sich dabei als möglich erweisen wird, die gerade Linie als

Projektion einer Curve n^{ter} Ordnung im R_n aufzufassen. Der zweite Beispiel wird sich auf die Theorie der „Configurationen" in der Ebene beziehen; unter denselben haben wir geometrische Gebilde von Punkten und Geraden zu verstehen, die bestimmte ausgezeichnete Eigenschaften in ihrer Lage darbieten. Endlich werden wir einen Blick auf die graphische Statik werfen, in der sich gewisse reciproke Figuren als Projektionen räumlicher Polyeder beim Nullsystem darstellen lassen. Gehen wir nun sogleich zu dem ersten Punkt über:

1. Als Litteratur ist besonders zu nennen ein Aufsatz von Hesse in Crelle 66 (1866), „Über ein Übertragungsprinzip" betitelt, in dem der Gedanke für $n=2$ entwickelt wird, sowie die allgemeine und umfassende Darstellung (für beliebiges n) von Franz Meyer (1883) in seinem Buche, Apolarität und rationale Curven". Der fragliche Ansatz ist nun der folgende: Es seien $\lambda_1 : \lambda_2$ als Abscissen auf der geraden Linie gedeutet. Die Gleichung $0 = f_n(\lambda_1, \lambda_2)$ stellt dann n Punkte auf derselben dar, die reell oder auch imaginär sein können. Man wird sich mit solchen Punktgruppen besonders beschäftigen, wenn man allgemein binäre Formen

$$f_n(\lambda_1, \lambda_2) = a\lambda_1^n + b\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \ldots + g\lambda_2^n \quad \text{studiert.}$$

Nun besteht der wesentliche Gedanke der weiteren Untersuchung darin, dass man in einen Raum von n Dimensionen geht, und in ihm die Raumpunkte betrachtet, deren Coordinaten x_i den einzelnen Potenzen von $\lambda_1 \lambda_2$ proportional gesetzt werden, wie folgt:

$$\begin{aligned} \varrho x_0 &= \lambda_1^n, \\ \varrho x_1 &= \lambda_1^{n-1}\lambda_2, \\ &\vdots \\ \varrho x_n &= \lambda_2^n. \end{aligned}$$

Man sieht, wenn der Punkt λ die ganze gerade Linie durchläuft, so beschreibt der Punkt x_i im R_n eine bestimmte Curve, die von der n^{ten} Ordnung ist. Insofern dieselbe sich rational durch einen Parameter $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ausdrückt, nennt man sie eine rationale Curve oder mit specielleren Bezeichnung die, Normcurve der R_n. Diese rationale Curve n^{ter} Ordnung erscheint daher als Bild der geraden Linie. In dieser Weise bezieht Hesse die gerade Linie auf den Kegelschnitt. Wenn wir nun $f = 0$ setzen, so kommt dieses darauf hinaus, die Gleichung $a x_0 + b x_1 + \cdots q x_n = 0$ anzunehmen, und letztere stellt eine Ebene im R_n dar. Jedes Aggregat von n Punkten der geraden Linie erscheint daher als Schnitt unserer Normcurve mit einer Ebene der R_n. Wenn man sich nun mit der Theorie der binären Formen in der Invariantentheorie beschäftigt, so wird man doch alle Substitutionen der folgenden Art betrachten:

$$\begin{aligned} \sigma \lambda_1' &= \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2, \\ \sigma \lambda_2' &= \gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2. \end{aligned}$$

Diese stellen eine dreifach unendliche Gruppe dar, und zwar die Gesammtheit der linearen Transformationen der geraden Linie in sich. Beim Studium der Formen f_n wird man dann

gerade alle diejenigen Eigenschaften des Punktaggregats $f_n = 0$ aufsuchen, welche gegenüber beliebigen linearen Transformationen dieser dreifach unendlichen Gruppe invariant sind. Nun ergiebt sich eine einfache Uebertragung dieser linearen Transformationen auf die Normcurve der R_n. Es sei der neue Raumpunkt derselben gegeben durch:

$$\begin{aligned} \varrho x_0' &= \lambda_1'^{\,n} \\ \varrho x_1' &= \lambda_1'^{\,n-1}\lambda_2' , \\ &\vdots \\ \varrho x_2' &= \lambda_2'^{\,n} . \end{aligned}$$

Für die Grössen λ_1' u. λ_2' können wir dann ihre Ausdrücke aus den Substitutionsformeln einsetzen und darauf die Klammerausdrücke entwickeln. z. B. ergiebt sich $\varrho x_0' = \lambda_1'^{\,n} = \left(\frac{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2}{\sigma}\right)^n = \frac{\varrho}{\sigma^n}\left(\alpha^n x_0 + n\alpha^{n-1}\beta x_1 + \ldots\ldots \beta^n x_n\right)$, indem wir zugleich die alten Variabeln x_i wieder einführen. Wir sehen x_0' ist eine lineare Funktion der x_i geworden, dasselbe gilt natürlich für alle x_i'. Der dreifach unendlichen Gruppe der linearen Transformationen der geraden Linie entspricht daher eine dreifach unendliche Gruppe von Collineationen der R_n, bei denen unsere Normcurve unter Vertauschung ihrer Punkte in sich übergeht.

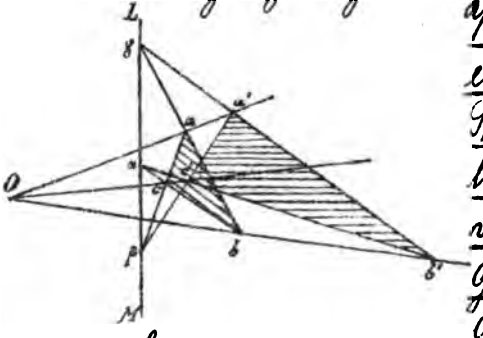
Dies ist nun an sich ein sehr bemerkenswerthes Resultat, indem diese dreifach unendlichen Gruppen von Collineationen in der Gruppentheorie ausserordentlich wichtig sind.

Es giebt also nicht nur in der Ebene eine dreifach unendliche Gruppe linearer Transformationen, die den Kegelschnitt in sich überführen, was wir von früherher wissen, sondern ebenso im Raum eine dreifach unendliche Gruppe in bezug auf die C_3 und s.f. Lie bezeichnet im Hinblick auf den Fall $n=2$ diese Gruppen allgemein als Kegelschnittgruppen. Nun kann man bereits überschauen, wie der näheren die weitere Ausführung sich gestaltet. Das invariantentheoretische oder projektive Studium der Punktaggregate $f_n=0$ auf der geraden Linie kommt jetzt darauf hinaus, die projektiven Beziehungen zu untersuchen, welche zwischen der Normcurve und der schneidenden Ebene bestehen mögen.

2. Wir gehen nun zu unserem zweiten in Aussicht genommenen Punkte über. Es handelt sich hier um einen Gedanken, der bereits 1846 von Cayley in Crelle 31 („Sur quelques théorèmes de la géométrie de position") ausgesprochen und seitdem bis in die letzte Zeit vielfach aufgenommen ist z. B. von Veronese in Ann 19 (1881) „Princip des Projicirens und Schneidens." Wir wollen sogleich an einer speciellen Figur, die in der synthetischen Geometrie vielfach behandelt ist, uns die Sache klar machen. Dieselbe wird kurz gesagt durch zwei perspektivisch gelegene Dreiecke in der Ebene gegeben. Sei O das Centrum der Perspektive und $L\,M$ die Axe derselben;*) wir ziehen

*) vergleiche die Figur auf der folgenden Seite

dann durch O 3 Projektionsstrahlen, und ordnen, indem wir ja noch einen Parameter zur Verfügung haben, auf einem derselben dem Punkt a einen beliebigen andern Punkt a' zu. Nun zeichnen wir uns ein reales Dreieck mit den Ecken a, b, c, auf den drei Projektionsstrahlen. Indem die Schnittpunkte α, β, γ der Seiten des Dreiecks (ev. ihrer Verlängerung) mit der Axe der Perspektive bei letzterer unverändert bleiben, lässt sich leicht, wie die Figur es angiebt, das entsprechende Dreieck a', b', c' construieren, das aus unserem ersten Dreieck a b c bei der Perspektive hervorgeht. Wenn wir nun die ganze Figur betrachten, so sehen wir:

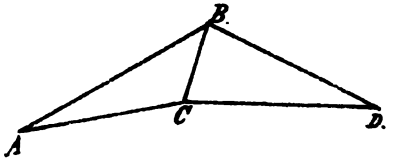


Von zwei perspektiven Dreiecken beginnend, die wir durch Schraffierung kenntlich gemacht haben, sind wir zu einer Figur von zehn Punkten und zehn geraden Linien gekommen, in der immer 3 Punkte auf einer geraden Linie liegen und drei gerade Linien durch einen Punkt gehen. Nun zeigt eine aufmerksame Betrachtung der Figur, dass dieselbe nicht bloss auf eine Weise, sondern auf zehn Weisen aus zwei perspektivischen Dreiecken zusammensetzbar ist. Um dies nun in übersichtlicher Weise zu erkennen, ziehen wir mit Cayley die räumliche Betrachtung heran. Cayley bemerkt nämlich diese

und alle sonstigen Behauptungen über die Figur in einfachster Weise, indem er bemerkt, dass unsere Figur der ebene Schnitt einer ganz einfachen Raumfigur ist, nämlich derjenigen Raumfigur, die aus fünf beliebigen Punkten, ihren zehn Verbindungsgeraden und ihren zehn Verbindungsebenen besteht. Diese Raumfigur ist in der That aus unserer ebenen Figur sehr leicht zu construieren. Man nehme im Raume zwei beliebige Punkte D u. E an, die mit O auf einer geraden Linie liegen, und ziehe die Strahlen von D nach den Punkten a, b, c und von E nach den Punkten a', b', c'. Dann werden die Strahlenpaare Da u. Ea', Db u. Eb', Dc u. Ec' sich entsprechend in drei weiteren Raumpunkten A, B, C schneiden. So haben wir fünf Raumpunkte A, B, C, D, E gewonnen. Und wie man bei ruhiger Betrachtung der Raumfigur erkennt, sind nun die zehn Punkte und die zehn Geraden unserer ebenen Configuration in der That die Schnitte unserer Ebene mit den zehn Verbindungsgeraden und den zehn Verbindungsebenen der genannten Punkte A, B, C, D, E. Der Punkt O unserer Figur zeigt sich dann als Schnitt mit der Kante DE und ist daher in keiner Weise von den anderen Schnittpunkten ausgezeichnet. Wenn es daher möglich ist, vom Punkte O aus die Figur als Aggregat zweier perspektivischer Dreiecke zu construieren, so können wir ganz ohne weiteres jetzt behaupten, dass die

gleiche Möglichkeit für jeden der anderen neun Punkte ebenfalls vorliegen muss.

3. Wie verhält sich nun die Sache in unserem dritten Beispiel, die graphische Statik betreffend? Man betrachtet in der graphischen Statik sogenannte „Fachwerke", d. h. starre aus einzelnen Stücken zusammengesetzte Systeme, wie die nebenstehende Figur in einem einfachen Falle zeigen soll. Wenn wir in dem Fachwerk n Knotenpunkte haben, so werden dieselben durch 2n Coordinaten festgelegt sein. Soll nun das System nur als Ganzes in seiner Ebene beweglich sein, aber nur drei Grade der Freiheit besitzen, so werden offenbar 2n − 3 Bedingungen für die Coordinaten vorgeschrieben sein müssen. Dies besagt, dass 2n − 3 Kanten oder Stäbe vorhanden sein müssen, wenn das Fachwerk gerade bestimmt sein soll. Werden ausserdem noch andere Kanten angewandt, so ist das Fachwerk allgemein zu reden, „überbestimmt". (Es ist wohl kaum nötig, darauf hinzuweisen, dass ein Fachwerk auch mit mehr als 2n − 3 Kanten noch unbestimmt sein kann, falls auf einen Teil desselben vielleicht mehr Kanten als nötig aufgewendet worden sind, auf einen anderen Teil dagegen weniger; wir können hier auf solche Einzelheiten, die man leicht mathematisch streng formuliert, nicht eingehen).



Nun nehmen wir an, dass auf die einzelnen Knotenpunkte in unserer Ebene Kräfte wirken. Dieselben sollen insgesamt am starren System sich im Gleichgewicht halten, d.h. sie haben drei wohlbekannte Bedingungsgleichungen zu erfüllen. Nun ist die Frage, welche Spannungen werden in den einzelnen Stangen des Systems herrschen? Indem wir die Spannungen als Unbekannte einführen, (wobei wir durch das Vorzeichen unterscheiden, ob die zugehörige Stange auf Zug oder Druck in Anspruch genommen ist) erhalten wir, wie leicht zu sehen, gerade $2n-3$ lineare Gleichungen für die $2n-3$ unbekannten Spannungen. Nun ist es interessant, den Unterschied der reinen und der angewandten Mathematik diesem Gleichungssystem gegenüber zu erkennen. Während erstere sich mit der Angabe begnügt, wie unmittelbar die Unbekannten mit Hilfe von Determinanten sich ausdrücken lassen, hat letztere die weit schwierigere Aufgabe vor sich, die Unbekannte im gegebenen Falle zahlenmässig zu berechnen. Und dass hier, sobald $2n-3$ hinreichend gross ist, die allgemeine Ausrechnung nicht durchgeführt werden kann, liegt auf der Hand. Für die Praxis ist es daher erforderlich, ein Verfahren zu haben, das diese $2n-3$ Gleichungen in bequemer Weise numerisch aufzulösen gestattet. Dieses wird ja natürlich von der Bauart des Fachwerkes abhängen. In vielen praktischen

Fällen ist es beispielsweise, wie historisch anzuführen ist, möglich, die Berechnung der Unbekannten so zu leiten, dass man immer nur drei Unbekannte hinter einander aus drei linearen Gleichungen zu berechnen braucht. (Ritter'sche Methode). Daneben hat sich nun aber in der Praxis die Gewöhnung entwickelt, diese Spannungen statt durch Rechnung vielmehr durch graphische Construktion zu ermitteln. So ist denn der besondere Zweig der graphischen Statik entstanden. Man kann dieselbe nach dem Vorstehenden geradezu als die Lehre von der graphischen Auflösung von $2n-3$ linearen Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten auffassen, insbesondere als die Lehre von den Vereinfachungen, welche die graphische Auflösung je nach der Bauart der linearen Gleichungen darbietet. Diese Methode ist vor allem von Maxwell 1864 in dem Phil. Magazine sowie 1870 in den Edinburgh Transactions entwickelt worden. Insbesondere haben sich später viele Techniker damit befasst, wie denn ja auch an den technischen Hochschulen für graphische Statik eigene Lehrstühle bestehen. Es sei insbesondere aus der zahlreichen Litteratur noch das Werk von Culmann in Zürich: „Lehrbuch der graphischen Statik" (1866) genannt, sowie ein geometrischer Aufsatz von Cremona, La figure reciproche della statica grafica", der zuerst 1872 in einer Festschrift gelegentlich der Hochzeit der Tochter von Bri-

vschi erschienen ist. Diese Cremona'sche Arbeit ist sehr bekannt geworden wegen der besonderen Eleganz der Darstellung; wir besitzen im Lesezimmer eine französische Uebersetzung mit Ergänzungen von Saviotti, die auch recht lesenswert sind. Die Cremona'sche Arbeit stützt sich nun auf eine Anwendung des Nullsystems, (ohne dass freilich die allgemeine Aufgabe der graphischen Statik sich mit letzterem lösen liesse). In der That ist man mit Hilfe des Nullsystems in der Lage, für gewisse einfache Fälle von Fachwerken in bequemster Weise die Spannungen zu construiren. Folgendermassen: Wir wählen die Ebene unseres Fachwerkes als xy-Ebene und schreiben die Gleichung des Nullsystemes dann so, dass z die Axe desselben ist: $(xy' - yx') + k(z - z') = 0$. Nun sei ein gewöhnlicher Polyeder im Raume gegeben mit einer bestimmten Anzahl Ecken xyz, Kanten und Seitenflächen. Dasselbe denken wir dann auf die xy-Ebene orthographisch projicirt. Diese Projektionsfigur des räumlichen Polyeders bezeichnen wir als ebenes Diagramm; es wird keine Schwierigkeiten haben, auch bei ihm noch von Seitenflächen zu sprechen. Nun wollen wir zu dem Polyeder das reciproke Polyeder im Nullsystem bilden. Wir wissen, aus jeder Ecke wird eine Seitenfläche, aus jeder Seitenfläche eine Ecke, aus jeder Kante wieder eine Kante.

Aus einem Tetraeder wird auf diese Weise wieder ein Tetraeder entstehen, aus einem Würfel dagegen ein Oktaeder. Das reziproke Polyeder projicieren wir nun ebenfalls orthographisch auf die xy-Ebene und nennen die Projektionsfigur das reziproke Diagramm des früheren. Jeder Kante des ersten Diagramms wird dann eine Kante des zweiten Diagramms entsprechen. Kanten, die bei dem einen Diagramm in einer Ecke zusammenlaufen, umschließen in dem andern Diagramm eine Seitenfläche und umgekehrt. Wir behaupten nun, daß die einander entsprechenden Kanten in den beiden Diagrammen einander parallel sind. Es sei eine Kante mit den Endpunkten xy u. x_1y_1 in der ersten Figur gegeben; letztere mögen die Projektionen der Raumpunkte xyz u. $x_1y_1z_1$ sein. Der Ecke xyz entspricht nun die Ebene $(xy' - x'y) + k(z - z') = 0$, der Ecke $x_1y_1z_1$ ebenso $(x_1y' - x'y_1) + k(z_1 - z') = 0$, (wo wir $x'_1y'_1z'_1$ als laufende Coordinaten ansehen). Diese beiden Ebenen schneiden sich in der entsprechenden Kante des reziproken Polyeders, und deren Projektion auf die xy-Ebene ergiebt sich also leicht durch Elimination von z' aus den beiden letzten Gleichungen in der neuen Gleichung:

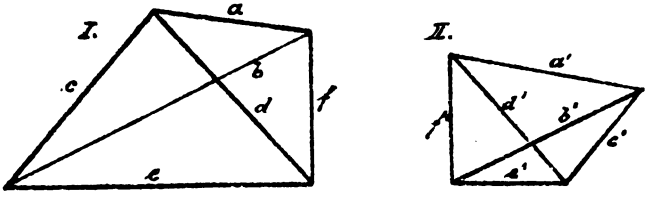
$$(x - x_1)y' - (y - y_1)x' + k(z - z_1) = 0.$$

Die ursprüngliche Verbindungslinie der Punkte xy u. x_1y_1 ist dagegen durch die Gleichung:

$$(x - x_1)y' - (y - y_1)x' + (x'y - xy') = 0$$

gegeben. Aus den beiden letzten Gleichungsformen ergiebt sich nun sofort die Richtigkeit des Satzes, dass zwei reciproke Kanten der xy-Ebene einander parallel sind. So oft daher bei einer Figur drei Kanten in einer Ecke zusammenlaufen, laufen die drei Parallelkanten der anderen Figur um eine Seitenfläche herum und umgekehrt.

Dieser Satz möge durch die Diagramme eines Tetraeders und seines reciproken Tetraeders in ihrer Lage zu einander illustriert werden:



Nun ist bekannt, dass n (z. B. 3) in einem Punkte angreifende Kräfte sich im Gleichgewicht befinden, wenn sich aus den sie darstellenden Strecken ein geschlossenes Polygon (ein Dreieck) zeichnen lässt, dessen Seiten den genannten Strecken mit Rücksicht auf ihre Richtung parallel und gleich sind; es ist dies der sogenannte Satz vom Kräftepolygon.

Wenn wir daher jetzt Längen der Kanten des einen Diagramms (I) Spannungen wirken lassen, welche ihrer Intensität nach durch die Längen der entsprechenden

Kanten des anderen Diagramms (II) gegeben sind, dann wird unser erstes Diagramm unter dem Einfluss dieser Spannungen im Gleichgewicht sein. Denn die Kräfte, welche an der einzelnen Ecke des ersten Diagramms angreifen, halten sich immer das Gleichgewicht, weil die entsprechenden Stücke im zweiten Diagramm ein geschlossenes Polygon bilden. Nun muss man stets auf das Vorzeichen der Spannung, d. h. auf die Richtung der Strecken in Fig. II Rücksicht nehmen, was jedoch weiter keine Schwierigkeit bereitet. Das Diagramm I in unserem Beispiel ist nun ein überbestimmtes Fachwerk; wir können uns jedoch die Kante d z. B. fortdenken und dann die Spannung in ihr durch äussere Kräfte, die in den Endpunkten angreifen, ersetzen. Haben wir daher für ein überbestimmtes Fachwerk einen Zustand der Selbstspannung gefunden, bei welchem dasselbe mit sich im Gleichgewicht ist, so wird man hieraus, indem man einige Stäbe des überbestimmten Fachwerks wegdenkt, den Schluss machen auf Gleichgewichtsspannungen in einem bestimmten Fachwerk, auf welches bestimmte äussere Kräfte wirken.

Dies ist die Methode der aus dem Nullsystem entstehenden reciproken Diagramme in der graphischen Statik. Wie diese Methode sich nun im Einzelnen an bestimmte Beispiele anschmiegt, können wir hier na-

türlich nicht näher betrachten. Diese ganze Theorie soll uns hier ein Beispiel dafür sein, dass man Figuren in der Ebene unter Umständen besser überblickt, wenn man sie als Projektion räumlicher Figuren betrachtet.

Wir haben bisher von linearen Punkttransformationen gesprochen und gesehen, wie verschiedene Gebilde durch dieselben in einander übergeführt werden können; wir haben ferner von der „linearen Invariantentheorie" gesprochen, deren Aufgabe es ist, solche Eigenschaften aufzusuchen, die bei den linearen Substitutionen unverändert bleiben. In dem gleichen Sinne wenden wir uns jetzt zu den

[Di. 7. II. 93].

höheren Punkttransformationen,

wie sie allgemein durch die Formeln:

$$x' = \varphi(x, y, z),$$
$$y' = \psi(x, y, z),$$
$$z' = \chi(x, y, z)$$

gegeben seien. Die Funktionen φ, ψ, χ wollen wir zunächst als beliebige analytische Funktionen voraussetzen, die in dem Raumstück, welches wir gerade betrachten, regulär verlaufen. Später werden wir speciell algebraische und rationale Substitutionen betrachten und uns dann natürlich nicht mehr auf einen Teil des Raumes beschränken, sondern die Transformation des Gesammtraumes heranziehen. Durch Differentiation der obigen Formeln erhalten wir nun die folgenden Gleichungen:

$$dx' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,dz,$$

$$dy' = \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \psi}{\partial z}\,dz,$$

$$dz' = \frac{\partial \chi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \chi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \chi}{\partial z}\,dz.$$

Wenn wir den Punkt x, y, z als fest ansehen und unser Augenmerk auf die Richtungsconstanten dx, dy, dz, richten, so erkennen wir, dass diese sich linear substituiren. Diesen letzten Satz hatten wir bereits früher in der Form ausgesprochen: Im unendlich Kleinen ist jede analytische Substitution eine lineare. Dieser Satz ist natürlich cum grano salis zu verstehen: man wird darauf achten müssen, ob die Substitutionsdeterminante von 0 verschieden ist, oder doch eine oder mehrere ihrer ersten Unterdeterminanten, oder ihre zweiten Unterdeterminanten u. s. w. oder endlich, ob wenigstens die Elemente selbst nicht verschwinden. Im letzteren Falle, der sehr wohl eintreten kann, hat es dann überhaupt keinen Sinn, Taylorsche Entwickelung mit den ersten Gliedern abzubrechen, sondern man wird zu höheren Gliedern gehen müssen; da wird dann der Satz von der linearen Transformation im unendlich Kleinen völlig bedeutungslos. Die Substitutionsdeterminante der letzten Formeln (deren Elemente die partiellen Differentialquotienten der Funktionen φ, ψ, χ sind) pflegt man als Funktionaldeterminante oder auch als Jacobi'sche Determinante der Funktionen

φ, ψ, χ zu bezeichnen. Durch die Substitutionsformeln der obigen Form für x', y', z' kann man offenbar jede Fläche in jede andere, sowie jede Curve in jede andere verwandeln; man hat nur die Funktionen φ, ψ, χ dementsprechend auszuwählen. Doch giebt es Gebilde, die irgend welche invariable Eigenschaften gegenüber solchen allgemeinen Substitutionen darbieten? Wir brauchen nur einen Blick auf die Differentialgleichungen und Differentialausdrücke zu werfen, um diese Frage bejahend zu beantworten.

Als die einfachsten Differentialausdrücke bieten sich die linearen dar, wie sie durch die Formel $\sum_i X_i\, dx_i$ für n Variable x_i gegeben werden, in der die X_i Funktionen der Variabeln x_i sein mögen.

Einen solchen linearen Differentialausdruck nennen wir schlechtweg einen Pfaff'schen Ausdruck, weil er gleich 0 gesetzt ein sogenanntes Pfaff'sches Problem ergiebt. (Die Gleichung $\sum_i X_i\, dx_i = 0$ dagegen bezeichnen wir dementsprechend als Pfaff'sche Gleichung.)

Wir werden heute unsere Aufmerksamkeit speciell darauf richten, welche Eigenschaften der Pfaff'schen Ausdrücke gegenüber der Gesamtheit der höheren Punkttransformationen invariant bleiben. Wie wir sogleich hier einfügen wollen, werden ein zweites, sehr wichtiges Beispiel uns die quadratischen Differentialausdrücke

$$\sum\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

geben, in denen die a_{ik} wieder

[illegible] x_i sind dieselben spielen eine hervorragende Rolle in sehr vielen Gebieten der Mathematik, wie in der Theorie der Flächenkrümmung, in der nicht-Euklidischen Geometrie, endlich in der Mechanik. Wir werden uns wieder zu fragen haben, was für invariable Eigenschaften solche Ausdrücke bei beliebiger Punkttransformation darbieten. — Um ganz allgemein zu sprechen, werden wir in solcher Weise eine höhere Invariantentheorie bekommen, in dieser können wir dann gerade so, wie in der gewöhnlichen Invariantentheorie der linearen Substitutionen, Covarianten, Invarianten schlechtweg, Contravarianten unterscheiden. Die Variablen, die jetzt linear substituirt werden, sind ja die Differentiale dx_i. Als Covarianten bezeichnen wir demnach hier solche Differentialausdrücke mit einer oder mehreren Reihen von Differentialen, etwa $dx_1, dx_2, \ldots dx_n; \delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_n$ u.s.w., welche zu dem gegebenen Ausdruck in einer durch beliebige Punkttransformation unzerstörbaren Beziehung stehen. Invarianten dagegen sind Ausdrücke, die nur noch von den Variablen x_i selbst abhängen und die letztere Eigenschaft darbieten. Contravarianten schliesslich sind Ausdrücke dieser Eigenschaft, in denen die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ u.s.f. vorkommen, indem die letzteren bei Vergleich mit den Contravarianten der gewöhnlichen Invariantentheorie an die Stelle der Ebe-

neuen Coordinaten u_i treten.

Wir beginnen jetzt mit dem Pfaffschen Ausdruck $\sum X_i dx_i$, wir können uns da sehr leicht eine Covariante bilden. Wir gehen aus von der Variation

$$\delta\left(\sum X_i dx_i\right) = \sum\sum \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_i \delta x_k \quad \sum X_i \delta dx_i$$

der wir die andere Gleichung hinzufügen, die sich durch Vertauschung der d- und δ-Operation ergiebt:

$$d\left(\sum X_k \delta x_k\right) = \sum\sum \frac{\partial X_k}{\partial x_i} dx_i \delta x_k + \sum X_i d\delta x_i .$$

Durch Subtraction beider Gleichungen erhalten wir, indem wir bedenken, dass die Operationen d und δ mit einander vertauschbar sind:

$$\delta\left(\sum X_i dx_i\right) - d\left(\sum X_k \delta x_k\right) = \sum\sum [i\,k]\, dx_i \delta x_k ,$$ wo mit $[i,k]$ die Differenz $\frac{\partial x_i}{\partial x_k} - \frac{\partial x_k}{\partial x_i}$ bezeichnet sei. Dieser Ausdruck $\sum\sum [i,k]\, dx_i \delta x_k$ ist dann eine Covariante der Pfaff'schen Ausdrucks und zwar werden wir dieselbe als eine „bilineare", „schiefe" Covariante bezeichnen, indem einmal die Differentiale dx_i und δx_k als unabhängige Variable zu gelten haben und andererseits für die Coefficienten die Bedingung $[i,k] = -[k,i]$ besteht. Die Covariantennatur desselben folgt unmittelbar daraus, dass unser neuer Ausdruck aus dem Pfaff'schen Ausdruck durch Variation genommen wird, und weil Variation etwas ist, was unab-

linear vom Coordinatensystem seine Bedeutung hat.
Für diese Covariante wollen wir uns nun gleich klar machen, dass keineswegs alle Pfaff'schen Ausdrücke durch Punktransformationen in einander übergeführt werden können, es vielmehr invariante Unterschiede für dieselben giebt. Wenn $\varphi \equiv \sum X_i dx_i$ ein exacter Differential d.h. der Differential einer Function F sein soll, so weiss man, muss $\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = 0$ sein für alle Combinationen i, k; andererseits ist diese Bedingung zugleich auch hinreichend, um auf ein exactes Differential zu schliessen. Dies besagt aber für unsere Covariante das identische Verschwinden derselben. Dies braucht nun offenbar keineswegs stets einzutreten. Die Pfaff'schen Ausdrücke gliedern sich demnach je nach dem Verschwinden unserer Covariante in solche, welche exacte Differentiale sind, und solche, welche dieses nicht sind.

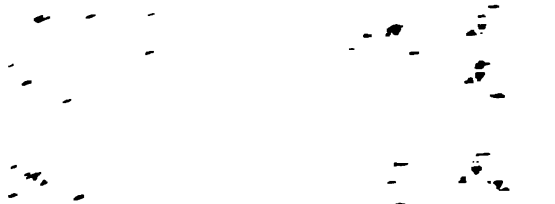
Wie steht es aber mit der weiteren Einteilung der Pfaff'schen Ausdrücke? Was die allgemeine Theorie betrifft, so sind die fast gleichzeitigen Arbeiten von Lie und Frobenius zu nennen. Die Arbeit von Lie befindet sich in Bd II des norwegischen Archivs für Math. und Naturw. (1876), die Arbeit von Frobenius dagegen in Crelle's Journal Bd 82. Wir wollen die Resultate, welche dort abgeleitet werden, nun kurz historisch anführen, ohne auf ihren Beweis einzugehen.

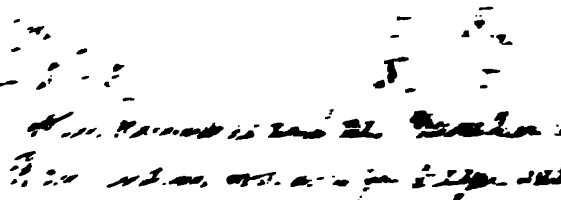
Es kommen dieselben darauf hinaus, den Pfaff'schen Ausdruck und seine Covariante Kurzweg so zu untersuchen, als ob die Differentiale derselben die Variablen und Coefficienten in ihnen constant wären. Dann hat man genau zu verfahren, als ob man algebraische Formen vor sich hätte. Und die Frage, wann 2 Pfaff'sche Ausdrücke durch höhere Punkttransformation in einander übergeführt werden können, kommt so darauf hinaus, dass man untersucht, wann eine schiefe bilineare Form und eine lineare Form mit constanten Coefficienten durch lineare Transformation der Variablen in einander übergeführt werden können. Auch hier ist also die lineare Invariantentheorie das schliesslich Ausschlag gebende.

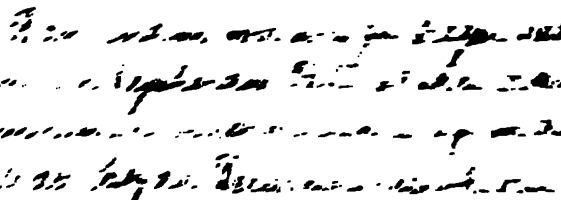
Die algebraische Frage führt nun zu folgendem Kriterium: Man bildet sich zuerst die Determinante der bilinearen Form:

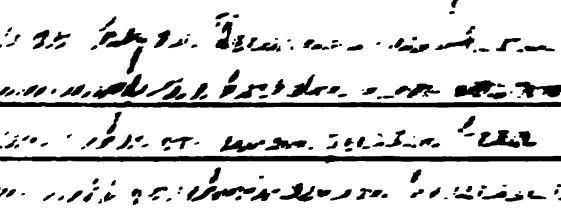
$$\begin{vmatrix} 0, & [1,2] & [1,3] & \cdots & [1,n] \\ [2,1], & 0, & [2,3] & \cdots & \\ [3,1], & [3,2], & 0, & & \\ & & & 0 & \\ [n,1], & \cdots & \cdots & & 0, \end{vmatrix},$$

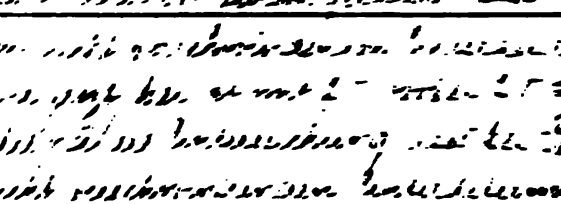
die wir mit A bezeichnen. Dieselbe ist eine schiefe Determinante, indem die zur Diagonale symmetrischen Glieder

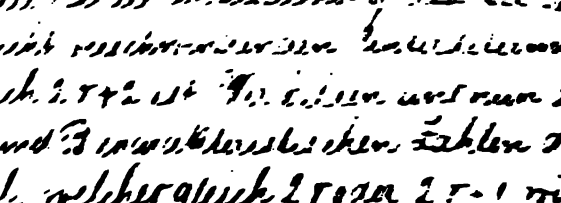


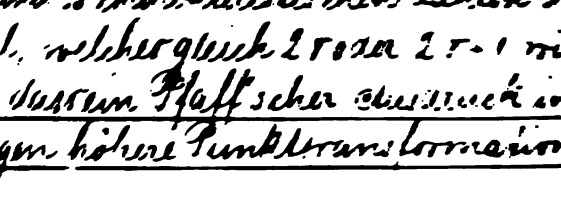












Charakter $2r$ oder $2r+1$ vollkommen festgelegt ist, so dass 2 Ausdrücke von demselben Charakter in einander transformierbar sind, 2 Ausdrücke von verschiedenem Charakter aber niemals.

Man hat nun für die Pfaffschen Ausdrücke von bestimmtem Charakter Normalformen aufgestellt, und zwar hat man für den Charakter $2r$ als Normalform:

$$z_{r+1}\,dz_1 \ldots\ldots + z_{2r}\,dz_r$$ und für den Charakter $2r+1$ als Normalform:

$$dz_0 + z_{r+1}\,dz_1 + \ldots\ldots z_{2r}\,dz_r$$ gerählt, wo also $2r$ resp. $2r+1$ Variable auftreten.

Um dies etwas auszuführen:

Der niedrigste Charakter, den es überhaupt giebt, ist der Charakter 1, derselbe liefert die Normalform dz_0, entspricht also dem Falle, in dem der Pfaff'sche Ausdruck ein exacter Differential ist. Nun kommt der Charakter 2; für denselben findet sich als Normalform $z_2\,dz_1$, die mit $\frac{1}{z_2}$ multipliciert in die Form des vorhergehenden Falles übergeht. Der Charakter 2 bezieht sich also darauf, dass der Pfaff'sche Ausdruck durch einen geeigneten Multiplicator in ein exactes Differential umgewandelt werden kann. Dies lässt sich nun sofort verallgemeinern: Der Charakter $2r$ besagt immer, dass der Pfaff'sche Ausdruck durch einen geeigneten Multiplicator in einen andern Pfaffschen Ausdruck verwandelt werden kann, der zum

Charakter $2r-1$ gehört.

Gehen wir von dem Pfaff'schen Ausdrucke zu der Pfaff'schen Gleichung über, so ändert ein hinzugefügter Faktor nichts; es fallen daher, was die Pfaff'schen Gleichungen angeht, die Charactere $2r$ und $2r-1$ zusammen.

Nehmen wir ferner das folgende Beispiel. Man erinnere sich, dass der gewöhnliche lineare Complex des Nullsystems durch die Gleichung gegeben wird:

$$xy' - x'y + k(z - z') = 0.$$

Durch dieselbe wird jedem Punkte eine Ebene zugeordnet, die den Punkt selbst enthält. Nun setzen wir $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' - z = dz$, indem wir uns auf die unmittelbare Umgebung des Punktes x, y, z beschränken. Dann erhalten wir die Gleichung $x\,dy - y\,dx - k\,dz = 0$ oder, indem wir statt x, y, z jetzt $x_1 x_2 x_3$ schreiben, $(-x_2)\,dx_1 + x_1\,dx_2 - k\,dx_3 = 0$. Dieses ist eine Pfaff'sche Gleichung, wie wir bereits vor Weihnachten bemerkten. In derselben entsprechen die Coefficienten $-x_2$, x_1, $-k$ unserer früheren Bezeichnung X_1, X_2, X_3. [illegible] die Determinanten [illegible] wird

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

[illegible] 0 [illegible] haben wir die [illegible] $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -$ [illegible]

der höchste Grad einer nicht verschwindenden Unterdeterminante gleich 2 ist. Die Determinante B dagegen wird gleich

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -x_2 \\ +2 & 0 & 0 & +x_1 \\ 0 & 0 & 0 & +k \\ +x_2 & -x_1 & -k & 0 \end{vmatrix} = +4k^2, \text{ d. h. } B \text{ ist}$$

selbst von 0 verschieden und demnach der Grad $2r+2=4$, in Uebereinstimmung mit unseren früheren Angaben. Bilden wir aus beiden Werten das arithmetische Mittel, so finden wir, die linke Seite unserer Pfaff'schen Gleichung hat den Charakter 3. Hieraus folgt aber, dass dieselbe sich in die Normalform setzen lassen muss $dz_0 + z_2\,dz_1$, und in der That gelingt dies leicht, wenn wir schreiben:

$$d(-x_1 x_2 - k x_3) + 2x_1\,dx_2 \text{ und dann für}$$
$$d(-x_1 x_2 - k x_3),\ 2x_1,\ dx_2 \text{ entsprechend setzen:}$$
$$dz_0,\ z_2,\ dz_1. -$$

Was wir hier für den Pfaff'schen Ausdruck vom Charakter 3 in dem Nullsystem anschaulich vor Augen sehen, ist leider nicht in gleicher Weise für Pfaff'sche Gleichungen von höherem Charakter mit der gewöhnlichen Punktgeometrie unseres Raumes zu erreichen, vielmehr werden wir zu dem Zweck in höhere Räume gehen oder an Stelle der Punkte als Elemente höhere Gebilde wählen müssen. Hierzu wird sich später Anlass bieten. –

abhängig vom Coordinatensystem seine Bedeutung hat.
An dieser Covariante wollen wir uns nun gleich klar machen, dass keineswegs alle Pfaff'schen Ausdrücke durch Punkttransformationen in einander übergeführt werden können, es vielmehr invariante Unterschiede für dieselben giebt. Wenn z.B. $\sum X_i\, dx_i$ ein exacter Differential d.h. der Differential d Einer Funktion F sein soll, so weiss man, muss $\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = 0$ sein für alle Combinationen i, k; andererseits ist diese Bedingung zugleich auch hinreichend, um auf ein exactes Differential zu schliessen. Dies besagt aber für unsere Covariante das identische Verschwinden derselben. Dies braucht nun offenbar keineswegs stets einzutreten. Die Pfaff'schen Ausdrücke gliedern sich dementsprechend je nach dem Verschwinden unserer Covariante in solche, welche exacte Differentiale sind, und solche, welche dieses nicht sind.
Wie steht es aber mit der weiteren Einteilung der Pfaff'schen Ausdrücke? Was die allgemeine Theorie betrifft, so sind die fast gleichzeitigen Arbeiten von Lie und Frobenius zu nennen. Die Arbeit von Lie befindet sich in Bd II des norwegischen Archivs für Math. und Naturw. (1876), die Arbeit von Frobenius dagegen in Crelle's Journal Bd 82. Wir wollen die Resultate, welche dort abgeleitet werden, nun kurz historisch anführen, ohne auf ihren Beweis einzugehen.

Es kommen dieselben darauf hinaus, den Pfaff'schen Ausdruck und seine Covariante Kurzweg so zu untersuchen, als ob die Differentiale derselben die Variablen und Coefficienten in ihnen constant wären. Dann hat man genau zu verfahren, als ob man algebraische Formen vor sich hätte. Und die Frage, wann 2 Pfaff'sche Ausdrücke durch höhere Punkttransformation in einander übergeführt werden können, kommt so darauf hinaus, dass man untersucht, wann eine schiefe bilineare Form und eine lineare Form mit constanten Coefficienten durch lineare Transformation der Variablen in einander übergeführt werden können. Auch hier ist also die lineare Invariantentheorie das schliesslich Ausschlaggebende.

Die algebraische Frage führt nun zu folgendem Kriterium: Man bildet sich zuerst die Determinante der bilinearen Form:

$$\begin{vmatrix} 0, & [1,2] & [1,3] & \dots & [1,n] \\ [2,1], & 0, & [2,3] & \dots & \\ [3,1], & [3,2], & 0, & & \vdots \\ & & & 0 & \vdots \\ [n,1], & \dots & \dots & \dots & 0, \end{vmatrix},$$

die wir mit A bezeichnen. Dieselbe ist eine schiefe Determinante, indem die zur Diagonale symmetrischen Glieder

entgegengesetzt gleich sind. Dann ändere man diese Determinante mit den Coefficienten x_i ohne den schiefen Charakter aufzugeben, man erhält so die zweite Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & [1,2] & \dots & [1,n] & x_1 \\ [2,1] & 0 & \dots & & x_2 \\ \vdots & & & & \\ [n,1] & \dots & & 0 & x_n \\ -x_1 & -x_2 & \dots & x_n & 0 \end{vmatrix}$$

die wir B nennen wollen. Nun kommt es auf das Verhalten dieser Determinanten A und B an, indem wir uns zu fragen haben, ob dieselben verschwinden, im bejahenden Falle, ob ihre ersten sämmtlichen Unterdeterminanten verschwinden u. s. f. in der bekannten Weise. Dabei gilt der Satz der Determinantentheorie, dass bei einer schiefen Determinante die höchsten nicht verschwindenden Unterdeterminanten sicher von einem geraden Grade sind. Den Grad der höchsten nicht verschwindenden Unterdeterminanten bezeichnen wir jetzt bei A mit $2r$, wobei $2r \leqq n$ ist. Dann zeigt nun die nähere Untersuchung, dass bei B der Grad der höchsten nicht verschwindenden Unterdeterminante gleich $2r$ oder gleich $2r+2$ ist. Wir bilden uns nun aus diesen beiden für A und B charakteristischen Zahlen das arithmetische Mittel, welches gleich $2r$ oder $2r+1$ wird. Es zeigt sich nun, dass ein Pfaff'scher Ausdruck in seinem Verhalten gegen höhere Punkttransformationen durch [illegible]

Charakter $2r$ oder $2r+1$ vollkommen festgelegt ist, so dass 2 Ausdrücke von demselben Charakter in einander transformierbar sind, 2 Ausdrücke von verschiedenem Charakter aber niemals.

Man hat nun für die Pfaffschen Ausdrücke von bestimmtem Charakter Normalformen aufgestellt, und zwar hat man für den Charakter $2r$ als Normalform:

$$z_{r+1}\,dz_1 \ldots\ldots + z_{2r}\,dz_r$$ und für den

Charakter $2r+1$ als Normalform:

$$dz_0 + z_{r+1}\,dz_1 + \ldots\ldots z_{2r}\,dz_r$$ gerählt,

wo also $2r$ resp. $2r+1$ Variable auftreten.

Um dies etwas auszuführen:

Der niedrigste Charakter, den es überhaupt giebt, ist der Charakter 1, derselbe liefert die Normalform dz_0, entspricht also dem Falle, in dem der Pfaff'sche Ausdruck ein exacter Differential ist. Nun kommt der Charakter 2; für denselben findet sich als Normalform $z_2\,dz_1$, die mit $\frac{1}{z_2}$ multipliciert in die Form des vorhergehenden Falles übergeht. Der Charakter 2 bezieht sich also darauf, dass der Pfaff'sche Ausdruck durch einen geeigneten Multiplicator in ein exactes Differential umgewandelt werden kann. Dies lässt sich nun sofort verallgemeinern: Der Charakter $2r$ besagt immer, dass der Pfaff'sche Ausdruck durch einen geeigneten Multiplicator in einen andern Pfaffschen Ausdruck verwandelt werden kann, der zum

Charakter $2r-1$ gehört.

Gehen wir von dem Pfaff'schen Ausdrucke zu der Pfaff'schen Gleichung über, so ändert ein hinzugefügter Faktor nichts; es fallen daher, was die Pfaff'schen Gleichungen angeht, die Charactere $2r$ und $2r-1$ zusammen.

Nehmen wir ferner das folgende Beispiel. Man überzeuge sich, dass der gewöhnliche lineare Complex der Nullsystems durch die Gleichung gegeben wird:

$$xy' - x'y + k(z - z') = 0.$$

Durch dieselbe wird jedem Punkte eine Ebene zugeordnet, die den Punkt selbst enthält. Nun setzen wir $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' - z = dz$, indem wir uns auf die unmittelbare Umgebung des Punktes x, y, z beschränken. Dann erhalten wir die Gleichung $x\,dy - y\,dx - k\,dz = 0$ oder, indem wir statt x, y, z jetzt x_1, x_2, x_3 schreiben, $(-x_2)\,dx_1 + x_1\,dx_2 - k\,dx_3 = 0$. Dies ist eine Pfaff'sche Gleichung, wie wir bereits vor Weihnachten bemerkten; in derselben entsprechen die Coefficienten $-x_2, x_1, -k$ unserer früheren Bezeichnung x_1, x_2, x_3. Wir bilden uns nun für diesen speciellen Fall die Determinanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Zunächst wird

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ +2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante wird selbst gleich 0; doch haben wir die zweigliedrige Unterdeterminante $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ +2 & 0 \end{vmatrix} = 4$, sodass

der höchste Grad einer nicht verschwindenden Unterdeterminante gleich 2 ist. Die Determinante B dagegen wird gleich

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -x_2 \\ +2 & 0 & 0 & +x_1 \\ 0 & 0 & 0 & +k \\ +x_2 & -x_1 & -k & 0 \end{vmatrix} = 4k^2, \text{ d. h. } B \text{ ist}$$

selbst von 0 verschieden und demnach der Grad $2r+2=4$, in Uebereinstimmung mit unseren früheren Angaben. Bilden wir aus beiden Werten das arithmetische Mittel, so finden wir, die linke Seite unserer Pfaff'schen Gleichung hat den Charakter 3. Hieraus folgt aber, dass dieselbe sich in die Normalform setzen lassen muss $dz_0 + z_2\,dz_1$, und in der That gelingt dies leicht, wenn wir schreiben:

$$d(-x_1 x_2 - k x_3) + 2x_1\,dx_2 \text{ und dann für}$$
$$d(-x_1 x_2 - k x_3),\ 2x_1,\ dx_2 \text{ entsprechend setzen:}$$
$$dz_0,\ z_2,\ dz_1. -$$

Was wir hier für den Pfaff'schen Ausdruck vom Charakter 3 in dem Nullsystem anschaulich vor Augen sehen, ist leider nicht in gleicher Weise für Pfaff'sche Gleichungen von höherem Charakter mit der gewöhnlichen Punktgeometrie unseres Raumes zu erreichen, vielmehr werden wir zu dem Zweck in höhere Räume gehen oder an Stelle der Punkte als Elemente höhere Gebilde wählen müssen. Hierzu wird sich später Anlass bieten. –

Was ist nun das Pfaffsche Problem? Wir haben in demselben eine Aufgabe der Integralrechnung zu sehen, die sich an die Pfaff'sche Gleichung $\sum x_i dx_i = 0$ anschliesst. Der geometrische Sinn dieser Gleichung ist doch, dass jedem Punkte des Raumes eine durch ihn gehende Ebene zugeordnet wird. Es kommt nun darauf an, die Punkte des Raumes so zu bestimmten Mannigfaltigkeiten zusammenzufassen, zu Curven, Flächen etc., dass dieselben in jedem ihrer Punkte von der zugehörigen Ebene berührt werden.

Das Pfaffsche Problem insbesondere verlangt, wenn wir es in einer alle Fälle umfassenden Weise definiren wollen, die meist ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zu bestimmen, die sich mit dieser Eigenschaft durch den n-dimensionalen Raum hindurchziehen.

Nun will ich wieder historisch anführen, wie gross denn die Maximaldimension dieser zu suchenden Mannigfaltigkeiten, die wir als „Integralmannigfaltigkeiten" bezeichnen können, sein wird:

Dieselbe beträgt für einen geraden Charakter $2r$ wie für den ungeraden $2r-1$ $n-r$. (Beispielsweise können wir daher beim linearen Complex des dreidimensionalen Raumes nur eindimensionale Mannigfaltigkeiten verlangen d. h. Integralcurven.)

Nun will ich ihnen an den Normalformen der Pfaffschen Ausdrücke zeigen, dass in der That solche Integralmannig-

faltigkeiten vorhanden sind, mich jedoch hierbei der Kürze halber auf den geraden Charakter beschränken. Der Fall des ungeraden Charakters $2r-1$ ist ja implicite gleich mit erledigt, indem sich sein Pfaff'scher Ausdruck von dem für $2r$ auftretenden nur um einen Multiplicator unterscheidet. Wir haben die Gleichung $z_{r+1}\,dz_1 + \ldots + z_{2r}\,dz_r = 0$ vorliegen. Es giebt nun verschiedene Serien von Integralmannigfaltigkeiten, die wir der Reihe nach anführen wollen.

1, Wir gehen aus von der Gleichung $f_1(z_1, z_2 \ldots z_r) = 0$, wo f_1 eine wirkliche Funktion bezeichnet. Die höheren Variablen sollen sich nun verhalten wie die partiellen Differentiale von f_1 d. h.

$$z_{r+1} : z_{r+2} : \ldots : z_{2r} = \frac{\partial f_1}{\partial z_1} : \frac{\partial f_1}{\partial z_2} : \ldots : \frac{\partial f_1}{\partial z_r}.$$

Diese r Gleichungen befriedigen offenbar die Pfaff'sche Gleichung; dieselben definieren uns im R_n eine Mannigfaltigkeit von $n-r$ Dimensionen.

2, Wir können aber auch von 2 Gleichungen ausgehen:

$$f_1(z_1, z_2 \ldots z_r) = 0$$
$$f_2(z_1, z_2 \ldots z_r) = 0$$

und dann

$$\rho\, z_{r+\nu} = \frac{\partial f_1}{\partial z_\nu} - \lambda \frac{\partial f_2}{\partial z_\nu} \text{ setzen, wo } \lambda \text{ ein}$$

neuer willkürlicher Parameter sein soll. Auch diese Glei-

chungen definieren ein Gebilde von $n-r$ Dimensionen, welches der Pfaffschen Gleichung genügt, d.h. eine Integralmannigfaltigkeit ist.

3, So können wir nun fortfahren und schliesslich r Gleichungen voranstellen:

$$f_1(z_1 \cdots z_r)=0;\ f_2(z_1 \cdots z_r)=0;\ \cdots f_r(z_1 \cdots z_r)=0$$

und dann $\rho z_{r+r} = \frac{\partial f_1}{\partial z_r} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial z_r} + \mu \frac{\partial f_3}{\partial z_r} + \cdots$ setzen

woselbst die $\lambda, \mu, \cdots$ wieder Parameter bezeichnen. Die sämmtlichen Integralmannigfaltigkeiten, von der Dimension $n-r$, welche es beim Charakter $2r$ gibt erscheinen so, wenn man die Normalform der Pfaffschen Ausdruckes zu Grunde legt, auf r verschiedene Formelgruppen vertheilt, nämlich auf diejenigen, die wir soeben genannt haben. Man muss sich vorstellen, dass alle diese Integralmannigfaltigkeiten an sich gleichberechtigt sind und nur gegen die Variablen der zu Grunde gelegten Normalform verschieden orientiert sind.

Im übrigen werden wir in der Vorlesung des nächsten Semesters hierauf noch eingehend zurückkommen, wo es für uns dann vortheilhaft sein wird, die Verhältnisse schon jetzt in einem ersten Ueberblicke kennen gelernt zu haben.

Wir wenden uns jetzt zu den quadratischen Differential-

ausdrücken $\sum\sum a_{i\varkappa}\, dx_i\, dx_\varkappa$, und zwar [No. 9. II. 1893.]
wollen wir die Theorie derselben in ihrer allmählichen historischen Entwicklung schildern.

1. Ihren Ursprung nimmt dieselbe für den Fall zweier Variablen in den „Disquisitiones generales circa superficies curvas" 1827 von Gauss. Die Art der Einführung der quadratischen Differentialausdrücke in denselben ist leicht zu verstehen. Gauss setzt die Coordinaten einer Fläche gleich beliebigen Funktionen zweier Parameter u, v, also

$$x = \varphi(u,v),$$
$$y = \psi(u,v),$$
$$z = \chi(u,v).$$

Wenn wir nun die Differentiale dx, dy, dz bilden und dann aus ihnen das Quadrat des Bogenelementes auf der Fläche zusammensetzen, so erhalten wir:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

wo E, F, G die bekannten Abkürzungen darstellen:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Das Quadrat des Bogenelementes wird also eine quadra-

tische Form der Differentiale du, dv. – Die Differentialgleichung $ds^2 = 0$ definiert die auf der Fläche verlaufenden Minimalcurven.

Hieran knüpft nun die weitere Untersuchung in doppelter Richtung an.

a, Man kann einmal dieselbe Fläche doch auch noch auf unendlich viele andere Weisen durch zwei Parameter darstellen; man braucht nur zu setzen $u_1 = f_1(u, v)$, $v_1 = f_2(u, v)$ und dann die Coordinaten x, y, z durch die neuen Parameter u_1, v_1 auszudrücken. Hierbei geht der Ausdruck für ds^2 über in $E_1 du_1^2 + 2F_1 du_1 dv_1 + G dv_1^2$. Nun wird die Frage sein, was haben die beiden Formen für ds^2 gemein, mit anderen Worten welches sind die bleibenden Eigenschaften der einzelnen ds^2, die bei einer solchen Transformation invariant bleiben? Wie kann man insbesondere umgekehrt an zwei solchen quadratischen Formen sehen, dass sie durch eine geeignete „Punkttransformation" $u_1 = f_1$, $v_1 = f_2$ in einander übergeführt werden können?

b, Die zweite Untersuchungsrichtung behandelt die Frage, wie viele Flächen es für dasselbe Bogenelement ds^2 giebt. Solche Flächen nennt man dann auf einander abwickelbar; die eine entsteht aus der anderen durch einfache Biegung.

Während daher unter a) die Fläche unverändert bleibt und die Parameter u, v transformiert werden, hält man

hier unter b) den Ausdruck für das Bogenelement fest und die Fläche wird durch Biegung in ihrer Gestalt geändert. Wir hier interessiren uns natürlich insbesondere für die Fragestellung a).

Die Invarianten und Covarianten, welche die quadratische Differentialform $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ gegenüber beliebiger Transformation der u, v besitzen mag, nennt man übrigens geradezu Biegungsinvarianten und Biegungscovarianten, weil sie ja für alle Biegungsflächen dieselbe Bedeutung haben wie für die ursprüngliche Fläche.

Das Resultat der Gauss'schen Arbeit besteht nun, was die Fragestellung a) angeht, darin, dass er eine erste überaus wichtige Biegungsinvariante gefunden hat, indem er zeigt, dass das Krümmungsmass $K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ aus den Grössen E, F, G und ihren Differentialquotienten nach den u, v zusammengesetzt werden kann. Dass dieser Ausdruck in der That eine Invariante darstellt, folgt bei dieser Ableitung unmittelbar daraus, dass er unabhängig von den Parametern u, v seine geometrische Bedeutung besitzt. Wenn man eine Fläche biegt, ohne sie zu dehnen, dann wird also das Krümmungsmaass K für alle Punkte numerisch ungeändert bleiben. Man kann an einfachen Flächenmodellen aus Papier oder dünnem Blech sich leicht diese Verhältnisse anschaulich vorführen.

chungen definieren ein Gebilde von $n-r$ Dimensionen, welches der Pfaffschen Gleichung genügt, d.h. eine Integralmannigfaltigkeit ist.

3, So können wir nun fortfahren und schliesslich r Gleichungen voranstellen:

$$f_1(z_1 \cdots z_r)=0;\ f_2(z_1 \cdots z_r)=0;\ \cdots f_r(z_1 \cdots z_r)=0$$

und dann $\rho z_{r+v} = \frac{\partial f_1}{\partial z_v} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial z_v} + \mu \frac{\partial f_3}{\partial z_v} + \cdots$ setzen

woselbst die $\lambda, \mu, \cdots$ wieder Parameter bezeichnen.

Die sämmtlichen Integralmannigfaltigkeiten, von der Dimension $n-r$, welche es beim Charakter $2r$ gibt erscheinen so, wenn man die Normalform des Pfaff'schen Ausdruckes zu Grunde legt, auf r verschiedene Formelgruppen vertheilt, nämlich auf diejenigen, die wir soeben genannt haben. Man muss sich vorstellen, dass alle diese Integralmannigfaltigkeiten an sich gleichberechtigt sind und nur gegen die Variablen der zu Grunde gelegten Normalform verschieden orientiert sind.

Im übrigen, werden wir in der Vorlesung des nächsten Semesters hierauf noch eingehend zurückkommen, wo es für uns dann vorteilhaft sein wird, die Verhältnisse schon jetzt in einem ersten Ueberblicke kennen gelernt zu haben.

Wir wenden uns jetzt zu den quadratischen Differential-

ausdrücken $\sum\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$, und zwar [Vo. 9. II. 1893.]
wollen wir die Theorie derselben in ihrer allmählichen historischen Entwicklung schildern.
1. Ihren Ursprung nimmt dieselbe für den Fall zweier Variablen in den "Disquisitiones generales circa superficies curvas" 1827 von Gauss. Die Art der Einführung der quadratischen Differentialausdrücke in denselben ist leicht zu verstehen. Gauss setzt die Coordinaten einer Fläche gleich beliebigen Funktionen zweier Parameter u, v, also

$$x = \varphi(u,v),$$
$$y = \psi(u,v),$$
$$z = \chi(u,v).$$

Wenn wir nun die Differentiale dx, dy, dz bilden und dann aus ihnen das Quadrat des Bogenelementes auf der Fläche zusammensetzen, so erhalten wir:
$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$,
wo E, F, G die bekannten Abkürzungen darstellen:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Das Quadrat des Bogenelementes wird also eine quadra-

tische Form der Differentiale du, dv. – Die Differentialgleichung $ds^2 = 0$ definiert die auf der Fläche verlaufenden Minimalcurven.

Hieran knüpft nun die weitere Untersuchung in doppelter Richtung an.

a, Man kann einmal dieselbe Fläche doch auch noch auf unendlich viele andere Weisen durch zwei Parameter darstellen; man braucht nur zu setzen $u_1 = f_1(u, v)$, $v_1 = f_2(u, v)$ und dann die Coordinaten x, y, z durch die neuen Parameter u_1, v_1 auszudrücken. Hierbei geht der Ausdruck für ds^2 über in $E_1 du_1^2 + 2F_1 du_1 dv_1 + G dv_1^2$. Nun wird die Frage sein, was haben die beiden Formen für ds^2 gemein, mit anderen Worten welches sind die bleibenden Eigenschaften der einzelnen ds^2, die bei einer solchen Transformation invariant bleiben? Wie kann man insbesondere umgekehrt an zwei solchen quadratischen Formen sehen, dass sie durch eine geeignete „Punkttransformation" $u_1 = f_1$, $v_1 = f_2$ in einander übergeführt werden können?

b, Die zweite Untersuchungsrichtung behandelt die Frage, wieviele Flächen es für dasselbe Bogenelement ds^2 gibt. Solche Flächen nennt man dann aufeinander abwickelbar; die eine entsteht aus der anderen durch einfache Biegung.

Während daher unter a) die Fläche unverändert bleibt und die Parameter u, v transformiert werden, hält man

hier unter b) den Ausdruck für das Bogenelement fest und die Fläche wird durch Biegung in ihrer Gestalt geändert. Wir hier interessiren uns natürlich insbesondere für die Fragestellung a).

Die Invarianten und Covarianten, welche die quadratische Differentialform $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ gegenüber beliebiger Transformation der u, v besitzen mag, nennt man übrigens geradezu Biegungsinvarianten und Biegungscovarianten, weil sie ja für alle Biegungsflächen dieselbe Bedeutung haben wie für die ursprüngliche Fläche.

Das Resultat der Gauss'schen Arbeit besteht nun, was die Fragestellung a) angeht, darin, dass er eine erste überaus wichtige Biegungsinvariante gefunden hat, indem er zeigt, dass das Krümmungsmass $k = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ aus den Grössen E, F, G und ihren Differentialquotienten nach den u, v zusammengesetzt werden kann. Dass dieser Ausdruck in der That eine Invariante darstellt, folgt bei dieser Ableitung unmittelbar daraus, dass er unabhängig von den Parametern u, v seine geometrische Bedeutung besitzt. Wenn man eine Fläche biegt, ohne sie zu dehnen, dann wird also das Krümmungsmaass k für alle Punkte numerisch ungeändert bleiben. Man kann an einfachen Flächenmodellen aus Papier oder dünnem Blech sich leicht diese Verhältnisse anschaulich vorführen.

Wie das Krümmungsmass k sich aus den E, F, G und ihren Ableitungen aufbaut, wollen wir weiter unten anführen. Doch sei kurz auf die Flächen constanter Krümmung Bezug genommen, d.h. solche Flächen, welche in allen ihren Punkten dasselbe Krümmungsmass darbieten. Es zeigt sich, dass alle Flächen desselben constanten Krümmungsmasses aufeinander abwickelbar sind, und dass insbesondere jede Fläche constanten Krümmungsmasses auf dreifach ∞ viele Weise in sich verschoben werden kann, sowie wir dies von der Ebene und der Kugel, die uns einfache Beispiele für solche Flächen bieten, von Haus aus wissen. Selbstverständlich ist die Constanz des Krümmungsmasses auch eine notwendige Bedingung für diese Verschiebbarkeit.

Wir haben nun von einfachen Biegungsgrössen zu sprechen, die Beltrami in die Wissenschaft eingeführt hat, zuerst in der vielgenannten Arbeit:

Ricerche di analisi applicata alla geometrica in dem Giornale di Matematiche 1, 2 (1863). Ueber diese Untersuchungen hat Beltrami selbst bei Gelegenheit in den Math. Annalen I (1869) einen zusammenfassenden Bericht gemacht, „Ueber die Theorie des Krümmungsmasses" überschrieben.

Beltrami stellt vor allem 2 Biegungscontravarianten auf, die er Differentialparameter nennt d.h. Ausdrücke, in

denen die partiellen Differentialquotienten einer Function $\varphi(u,v)$ vorkommen. Er schliesst sich dabei an Lamé an, der diese Grössen vorher im Falle des dreidimensionalen Bogenelementes $dx^2+dy^2+dz^2$ schon besessen hatte, wie wir sogleich noch anführen. Diese beiden Differentialparameter Beltrami's, die wir mit $\Delta_1\phi$ und $\Delta_2\phi$ bezeichnet, wo ϕ irgend eine Function der Parameter u, v ist, werden wie folgt definiert:

$$\Delta_1\phi(u,v)=\frac{\begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial\phi}{\partial u} \\ F & G & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial v} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}$$

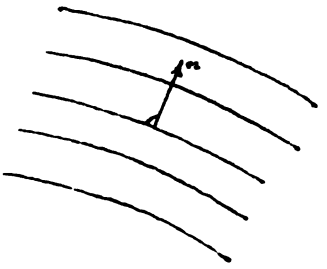
und

$$\Delta_2\phi(u,v)=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\phi}{\partial u}-F\frac{\partial\phi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\phi}{\partial v}-F\frac{\partial\phi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right\}.$$

Die erste Gleichung unterliegt ja einem einfach zu erkennenden Bildungsgesetze, während die zweite Gleichung weniger leicht zu übersehen ist. Die Behauptung ist, dass diese beiden Ausdrücke Δ_1 und Δ_2 Contravarianten sind, d.h. eine von der Auswahl der Parameter u, v unabhängige Bedeutung darbieten. Wir fragen uns nach der Bedeutung dieser Differen-

tialparameter.

Was $\Delta_1 \Phi$ betrifft, so wollen wir das Curvensystem auf der Fläche betrachten, welche durch die Bedingung $\Phi = \text{const.}$ geliefert wird. Indem wir dann diese Constante als einen Parameter und die Bogenlänge auf den Curven als zweiten Parameter an Stelle von u, v eingeführt denken, geht die Definitionsgleichung für $\Delta_1 \Phi(u,v)$, wie sich durch eine einfache Rechnung ergiebt, über in $\Delta_1 \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2$, wo unter $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ die Ableitung in der Richtung der normalen der Curven $\Phi = \text{const.}$ auf die Fläche verstanden ist.



Der erste Differentialparameter giebt daher das Quadrat derjenigen Grössen an, welche man als das Gefälle der Funktion Φ an der einzelnen Stelle bezeichnen kann.

Setzen wir $\Delta_1 \Phi = 1$, so erhalten wir insbesondere solche Curven, die überall das Gefälle 1 darbieten; solche Curven nennt man aequidistante Curven, indem eben je zwei benachbarte Curven $\Phi = C$ und $\Phi' = C + dC$ längs ihrer ganzen Erstreckung um die constante Grösse dC von einander abstehen.

Nicht so einfach ist die Bedeutung des Differentialparameters $\Delta_2 \Phi$; wir wollen daher auch nicht im einzelnen darauf eingehen, uns vielmehr mit dem bestimm-

den Satze 6 genügen: $\Delta_2 \Phi = \sigma$ ist die partielle Differentialgleichung der Potentialfunktionen auf der Fläche, indem in Betreff einer weiteren Ausführung z. B. auf meine Vorlesung über die Potentialtheorie, oder über Riemannsche Flächen Bd. I (pag. 13) verwiesen sei.

Mit den Ausdrücken $\Delta_1 \Phi$ und $\Delta_2 \Phi$ beherrscht nun Beltrami die ganze Geometrie auf den krummen Flächen, soweit sie allein von ds^2 abhängt, d. h. allen Biegungsflächen gemeinsam ist. Wir wollen hierfür einige Beispiele anführen.

a) Es sei angenommen, dass wir eine Lösung der Gleichung $\Delta_1 \Phi = \lambda$ mit einem willkürlichen Parameter λ, $\Phi(u, v, \lambda)$, gefunden hätten. Wir geben dann dem Parameter die beiden benachbarten Werte λ und $\lambda + d\lambda$ und betrachten die beiden Curvenschaaren $\Phi_\lambda = C$ und $\Phi_{\lambda + d\lambda} = C + dC$, deren einzelne Curven natürlich nur unendlich wenig von einander verschieden verlaufen. Wenn wir $\Phi_{\lambda + d\lambda} = C + dC$ nach Potenzen von $d\lambda$ entwickelt denken, so können wir mit dem Gliede $d\lambda$ abbrechen und an Stelle der eben genannten die folgenden beiden Gleichungen setzen: $\Phi_\lambda = C$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \frac{\partial C}{\partial \lambda} = C'$,

wo C' eine neue Constante bedeuten wird. Der geometrische Ort für die Schnittpunkte entsprechender Curven auf den

beiden Scharen $\Phi_\lambda = C$ und $\Phi_{\lambda+d\lambda} = C + dC$ ist hier durch die letztere Gleichung $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = C'$ gegeben. Die Behauptung ist, dass dieser geometrischen Ort eine geodätische Linie sei, und dass man durch Variirung der beiden Parameter λ und C die sämmtlichen geodätischen Linien der Fläche erhält. Dieser Satz findet in der Mechanik seine allgemeine Anwendung, es sei, was die nähere Darlegung dieser Verhältnisse angeht, auf mein Vorlesungsheft über Mechanik II verwiesen.

b) Eine weitere Anwendung der Differentialparameter ist die folgende: Wenn eine beliebige Curve auf der Fläche gegeben ist, so spricht man von der geodätischen Krümmung in einem beliebigen Punkte derselben. Man versteht unter derselben den reciproken Wert des Radius desjenigen geodätischen Kreises der sich der Curve in diesem Punkte möglichst innig anschmiegt. (Ein geodätischer Kreis ist eine solche Curve, deren Punkte von einem bestimmten Flächenpunkte M, dem Mittelpunkte des Kreises um dieselbe Bogenlänge der von M auslaufenden geodätischen Linie entfernt sind). Als Formel für die Geodätische Krümmung stellt Beltrami auf:

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta_2 \Phi}{\sqrt{\Delta_1 \Phi}} - \left(\frac{\partial \sqrt{\Delta_1 \Phi}}{\partial \varphi}\right)$$

(Der Differentialquotient genommen in der Richtung der

Normalen zu $\Phi = \text{const.}$).

c) Ferner findet sich als Formel für das Gaussische Krümmungsmass in einem Punkte der Fläche:

$$k = 3\,(\Delta_2 \log \rho)_{\rho=0},$$ wo unter ρ die geodätische Entfernung, die von dem Punkte der Fläche aus gemessen wird, zu verstehen ist. —

Auf solche Weise beherrscht man mit Hilfe der Differentialparameter die verschiedenen Biegungsgrössen der Fläche. In der That sind ja die von uns betrachteten Ausdrücke bei beliebiger Biegung invariant, weil sie sich auf geodätische Linien und das Krümmungmass beziehen.

2) <u>Wir werden nun die Differentialparameter Δ_1 und Δ_2 auf mehr als zwei Dimensionen übertragen.</u> An Stelle der Parameter u, v mögen die n Variablen x_i treten. Wenn dann $ds^2 = \sum\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k$ ist, dann wird $\Delta_1 \Phi$ sich wie folgt definieren lassen:

$$\frac{\begin{vmatrix} |a_{ik}| & \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} & 0 \end{vmatrix}}{|a_{ik}|}$$

d.h. im Nenner des Ausdrucks steht die Determinante der Coefficienten unserer quadratischen Form, während im Zähler dieselbe mit den partiellen Ableitungen der Function Φ gerändert zu denken ist. Wie sich der Differentialparameter Δ_2 verallgemeinert, wollen wir hier bei Seite lassen,

da die Formeln sehr complicirt ausfallen. Dafür geben wir einige historische Bemerkungen:

Wir haben da zunächst von Lamé's Coordonnées curvilignes zu sprechen, woselbst der gewöhnliche Raum mit seinen Geraden als geodätischen Linien untersucht wird. Lamé führt da für x, y, z beliebige krummlinige Coordinaten ein, er setzt also: $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$, wobei übrigens Lamé durchweg Orthogonalcoordinaten bevorzugt. Das Quadrat des Bogenelementes $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ verwandelt sich dann in eine quadratische Form der du, dv, dw. In Bezug auf diese stellt er dann die Differentialparameter Δ_1 und Δ_2 auf.

Die Untersuchungen Lamé's gehen zwar denen von Beltrami voraus, doch sind sie minder allgemein, weil seine quadratischen Formen nach ihrem Ursprunge eben ganz speciell sind, nämlich durch Wiedereinführung der x, y, z in die Gestalt $dx^2 + dy^2 + dz^2$ gebracht werden können.

Die völlig allgemeinen Betrachtungen mit n Veränderlichen hat Beltrami 1869 ausgeführt in den Memorie di Bologna 2. ser. VIII in der Arbeit Teorica generale dei parametri differenziali. Beltrami bemerkt dabei, dass die so erweiterte Theorie in der Mechanik ganz unmittelbar bei der sogenannten Hamiltonschen Theorie zur Geltung kommt. Wir wollen, was diesen Zusammenhang angeht, die Hauptpunkte doch durch bestimmte Sätze festlegen

(vergl. wieder meine Vorlesung über Mechanik II):
Es zeigt sich, dass bei den gewöhnlichen Aufgaben der Mechanik eine quadratische Form von n Veränderlichen im Mittelpunkte des Interesses steht; n bedeutet dabei die Anzahl der Grade der Freiheit, welche das mechanische System besitzt. Denken wir diese quadratische Form als das Quadrat ds^2 der Bogenelementes eines n fach ausgedehnten Raumes, so zeigt sich, dass die geodätischen Linien dieses Raumes gerade das Abbild der Bewegung unseres mechanischen Systems sind, d. h. der verschiedenen Zustände, die unser System im Laufe der Zeit durchläuft. Die partielle Differentialgleichung $\Delta_1 \Phi = 1$, durch welche man die in Rede stehenden geodätischen Linien in der früher angedeuteten Weise bestimmen kann, ist gerade diejenige partielle Differentialgleichung, welche in die Mechanik von Hamilton eingeführt ist.
Nun wollen wir doch noch einige hierauf bezügliche Formeln anführen: Es seien $q_1, q_2 \cdots q_n$ die Coordinaten des Systems. Die lebendige Kraft T wird dann gleich $\sum\sum c_{ik} q_i' q_k'$ d. h. eine quadratische Form der Ableitungen der q_i nach der Zeit. Nun sei die Gültigkeit des Satzes der lebendigen Kraft für das System vorausgesetzt, den wir in der Form nehmen $T + U = h$. Dann wird die quadratische Form, die wir als ds^2 interpretieren, folgendermassen lauten:

$$ds^2 = \sqrt{h-U}\left(\sum\sum c_{ik}\, dq_i\, dq_k\right) = \sum\sum\left(\sqrt{h-U}\, c_{ik}\, dq_i\, dq_k\right).-$$

Wir fassen unsere letzten Betrachtungen nochmals in den Satz zusammen:
Die Theorie der quadratischen Differentialformen durchzieht nach dem Vorstehenden drei Gebiete der anwendenden
a) Die Lehre von den Biegungsinvarianten der Flächen.
b) Die Lehre von den krummlinigen Coordinaten in Ebene und Raum, wie sie in der mathematischen Physik gebraucht wird.
c) Die Mechanik, welche dabei als Geometrie in einem n-fach ausgedehnten Raume aufgefasst werden kann.-
3) Wir wenden uns nun zu einem dritten Absatz, der von der Uebertragung der Theorie des Krümmungsmasses auf Mannigfaltigkeiten von n Variablen handeln soll.
In dieser Richtung liegen die beiden interessanten Arbeiten von Riemann vor, die erst nach seinem Tode veröffentlicht wurden:
a) Die Habilitationsschrift: Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Ges. Werke Nr. XIII:
Dieselbe stammt aus dem Jahre 1854 und ist zuerst publiciert in den Göttinger Abhandlungen Bd. 13 (1867).
Hier giebt Riemann nur erst allgemeine Betrachtungen, aber noch keine expliciten Formeln.
b). Ausgeführt ist diese Untersuchung dann in der soge-

nten Pariser Preisaufgabe, die aus dem Jahre 1861
mmt und in die Ges. Werke unter Nr. XXII, mit einer
genen Erläuterung von Prof. Weber begleitet, aufgenom-
n ist. Die Pariser Academie hatte 1858 eine Frage der
imleitung zur Bearbeitung gestellt; Riemann hatte
n gezeigt, dass er sich bei der Lösung dieser Aufgabe
: gewisse Fälle der quadratischen Differentialformen
i 3 Variablen handele und darauf eine allgemei-
Theorie dieser Differentialformen entworfen. Da er
ch die Resultate ohne genaue Angabe ihrer Ablei-
g zusammengestellt hatte, so war ihm von der Pari-
Facultät der Preis nicht zuerkannt worden.
nun darzulegen, wie Riemann das Gauss- [Fr. 10. II. 93].
he Krümmungsmass auf beliebige quadratische
ferentialformen $\sum\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k$ überträgt, ha-
wir zunächst von gewissen Differentialcovarianten
berichten, die Riemann bildet. Dieselben sind Func-
ren 2ten Grades der kleinen Determinanten
$x_i\,\delta x_k - \delta x_i\,dx_k$), (woselbst dx und δx zwei beliebige
Fortschreitungsrichtungen von einem Punkte der R_n aus
zeichnen). Wir wollen uns erinnern, dass wir Formen
n Grades solcher Determinanten bereits bei den line-
n Differentialausdrücken $\sum X_i\,dx_i$ d. h. in der The-
: des Pfaffschen Problems gehabt haben. Dort bilde-
wir die Covariante $\sum\sum\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) dx_i\,\delta x_k$, in

der wir den Klammerausdruck mit $[i,k]$ bezeichneten. Nun können wir hier doch die beiden Glieder $[i,k]$ und $[k,i]$ zusammenfassen, dann erhalten wir die Form:

$$\sum [i,k](dx_i\,\delta x_k - \delta x_i\,dx_k).$$

Was bedeuten nun geometrisch die kleinen Determinanten $dx_i\,\delta x_k - \delta x_i\,dx_k$? Wir haben früher im gewöhnlichen Raume aus den Coordinaten zweier Punkte $x_1\,x_2\,x_3\,x_4$ und $y_1\,y_2\,y_3\,y_4$ eine Matrix gebildet und die zweigliedrigen Unterdeterminanten als Coordinaten der Verbindungslinie eingeführt; auch haben wir im Anschlusse an Grassmann diese Methode auf beliebige Räume ausgedehnt. Hier haben wir das Entsprechende. Es sind uns die beiden Fortschreitungsrichtungen $dx_1\,dx_2 \cdots dx_n$ und $\delta x_1\,\delta x_2 \cdots \delta x_n$ gegeben. Das lineare Gebilde, welches beide verbindet, ist hier ein ebener „Büschel" von Fortschreitungsrichtungen, dessen homogene Coordinaten dann gerade die Determinanten $dx_i\,\delta x_k - \delta x_i\,dx_k$ sind. Wir wollen daher weiterhin die $(d\,\delta)_{ik}$ als „<u>Büschelcoordinaten</u>" und die sich aus solchen Determinanten aufbauenden Covarianten als „<u>Büschelcovarianten</u>" bezeichnen.

Riemann construiert nun zunächst 2 solche Büschelcovarianten zu der gegebenen quadratischen Form. Die erste wird gegeben durch:

$$B = \sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k \cdot \sum a_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k - \left(\sum a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k\right)^2$$

oder anders geordnet, um die kleinen Determinanten hervortreten zu lassen:

$$B = \sum (a_{ik}a_{i'k'} - a_{ik'}\cdot a_{i'k})\cdot(dx_i\,\delta x_{i'} - \delta x_i\,dx_{i'})\cdot(dx_k\,\delta x_{k'} - \delta x_k\,dx_{k'}).$$

Um die zweite Covariante aufzustellen, wollen wir vorerst die folgenden Abkürzungen einführen:

$$p_{ikl} = \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \quad \text{und:}$$

$$[ik, lm] = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\left(p_{\mu km}\,p_{\nu il} - p_{\mu il}\cdot p_{\nu km}\right)\cdot\frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta} + \frac{\partial^2 a_{il}}{\partial x_i\,\partial x_l} + \frac{\partial^2 a_{km}}{\partial x_k\,\partial x_m} - \frac{\partial^2 a_{im}}{\partial x_i\,\partial x_m} - \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_k\,\partial x_l},$$

wo Δ die Determinante $|a_{ik}|$ der Coefficienten unserer quadratischen Form, $\Delta_{\mu\nu}$ die zu $a_{\mu\nu}$ gehörende Unterdeterminante bezeichnet. Nun ist die zweite Büschelcovariante Riemann's:

$$A = -\frac{1}{2}\sum [ik, lm](d\delta)_{ik}\cdot(d\delta)_{lm},$$

wo $(d\delta)$ die kleinen Determinanten der dx und δx bezeichnen.

<u>Riemann betrachtet schliesslich als Analogon des bei Gauss auftretenden Krümmungsmasses den Quotienten der beiden Büschelcovarianten A und B:</u>

$$k = \frac{A}{B}.$$

Wollen wir uns doch zunächst überlegen, was wird aus diesem Ausdrucke $\frac{A}{B}$ für $n = 2$. Dann haben wir nur eine einzige Determinante $(d\delta)_{12}$, A und B reducieren sich

je auf ein Glied, welches das Quadrat dieser $(dS)_{12}$ als Factor enthält. In ihrem Quotienten hebt sich daher dieses Quadrat fort und es reducirt sich in der That der Ausdruck $\frac{A}{B}$ auf eine reine Invariante. Diese Invariante coincidirt nun, wenn man die explicite Formel vergleicht, gerade mit der Gaussischen Formel des Krümmungsmasses. Es wird nun interessant sein, näher zu verfolgen, auf welche Weise Riemann sich die allgemeine Formel des Krümmungsmasses gebildet hat. Von dem Punkte x des R_n haben wir 2 Fortschreitungsrichtungen dx und δx gezogen, die uns ein ebenes Büschel von Fortschreitungsrichtungen bestimmten. Nun denkt sich Riemann zu jedem solchen Büschel eine 2-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit construirt, die aus den geodätischen Linien besteht, welche durch die Fortschreitungsrichtungen des Büschels in ihrem ersten Element bestimmt sind. (Die geodätischen Linien selbst sind dabei allgemein durch die Bedingung zu definiren, dass $\int ds$ für hinreichend nahe Punkte ein Minimum sein soll.)

Das Riemannsche Krümmungsmass-k, welches von den Büschelcoordinaten im 0ten Grade abhängt (im Zähler und Nenner im zweiten Grade), ist nun gar nichts anderes als das Gaussische Krümmungsmass k, berechnet im Punkte x für die 2-fach ausgedehnte geodätische Mannigfaltigkeit, die wir hiermit definirt haben.

Man überblickt sogleich, dass dieses k von dem Coordinatensystem völlig unabhängig sein muss. Die wirkliche Berechnung, die schliesslich zu dem vorhin angegebenen Resultate führt, ist dann freilich eine sehr umständliche Sache; man vergleiche die bereits genannten Bemerkungen, die Prof. Weber dem Abdrucke der Riemannschen Preisaufgabe hinzugefügt hat.

Wollen wir lieber noch lernen, welche specielle Discussion Riemann an diese Formel angeknüpft hat. Unter einer Mannigfaltigkeit constanten Krümmungsmasses versteht man mit Riemann eine solche, für welche die von einem beliebigen Punkte x des R_n in beliebiger Richtung auslaufende geodätische Mannigfaltigkeit stets dasselbe Gausssche Krümmungsmass besitzt, wo also die Covarianten A und B einfach proportional ausfallen. Unter diesen Begriff der Mannigfaltigkeit constanten Krümmungsmasses subsummieren sich nun insbesondere die Mannigfaltigkeiten verschwindenden Krümmungsmasses. Ein Beispiel für letztere ist der gewöhnliche Euklidische Raum von 3 und mehr Dimensionen, wo dem ds^2 die Gestalt erteilt werden kann:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots dx_n^2 .$$

Umgekehrt wird, sobald $k = 0$ d. h. A identisch 0 ist, dem ds^2 immer die bemerkte Form erteilt werden können, so dass also im Falle verschwindenden Krümmungsmasses,

was die differentiellen Verhältnisse angeht, immer ein Euklidischer Raum vorliegt.

Weiter zeigt sich, dass eine Mannigfaltigkeit constanten Krümmungsmasses überhaupt durch den Wert von k immer vollständig bestimmt ist, d.h. man kann in dem Falle durch geeignete Coordinatenwahl dem Bogenelement eine Gestalt erteilen, in welcher ausser numerischen Coefficienten nur noch der Wert von k vorkommt. Will man nun eine Fläche constanter Krümmung in sich selbst verschieben kann, so wird überhaupt eine Mannigfaltigkeit constanter Krümmung sowohl, wie insbesondere ein Euklidischer Raum von n Dimensionen, d.h. eine Mannigfaltigkeit verschwindenden Krümmungsmasses, auf $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ Weise in sich bewegt werden können, ohne dass sich die Massverhältnisse ändern. Der Unterschied beider ist analog ganz derselbe wie zwischen der Kugel und der Ebene, die auch beide dieselbe Beweglichkeit darbieten. Mit diesen Bemerkungen haben wir den Anschluss an meine Vorlesung über nicht-Euklidische Geometrie (insbes. Heft II); es ist nicht möglich, dass wir noch auf ferner Einzelheiten eingehen.

4) Wir haben jetzt noch von den Arbeiten der Herren Christoffel und Lipschitz zu berichten, die sich auf quadratische Differentialformen beziehen. Ersterer hat seine Untersuchung in Crelle Bd. 70 (1869), letzterer in

nselben Journal Bd. 70, 71, 72, 74, 78 veröffentlicht.
ristoffel und Lipschitz haben hier die damals nun erst
ngelhaft bekannten Riemannschen Untersuchungen
ihrer Seite aufgenommen und einmal die Riemann-
ren Resultate bestätigt, andererseits neue Differential-
rameter u. s. w. von sich aus hinzugefügt. Insbeson-
e hat Christoffel die Frage untersucht, wann 2 qua-
tische Differentialformen aequivalent sind, und er
t gefunden, dass dieselbe darauf zurückkommt, die Äe-
ivalenz gewisser algebraischer Formen im Sinne der
earen Invariantentheorie zu prüfen. Wir haben
n analoges Resultat ja schon bei den Pfaffschen Aus-
rücken in entsprechender Form erwähnt. Im beiden
ispielen (den Pfaffschen Ausdrücken und den quadra-
chen Differentialformen) zeigt sich also, dass schliess-
h die Invariantentheorie der ∞ Gruppe aller Punkt-
nsformationen doch wieder zurückkommt auf Pro-
me der linearen Invariantentheorie.
Wir wollen nun noch einige Bemerkungen zur ge-
öhnlichen Flächentheorie hinzufügen:
halten gesetzt $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $z = \chi(u,v)$
nd $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ berechnet, wo E,
G die angegebenen Abkürzungen darstellen. Man
nnt die Letzteren auch wohl, da sie sich aus den er-
n Differentialquotienten zusammensetzen, die funda-

mittles in dem Flächenpunkte u, v ist, der durch die
ferentiale du, dv gegeben wird. Wann wird nun $d\sigma = 0$?
Gleichung $d\sigma = 0$ giebt speciell die Asymptotencurven, in-
n für die zuletzteren gehörigen Fortschreitungsrichtun-
v bekanntlich $\rho = \infty$ wird. Man könnte nun glauben,
ss $d\sigma = \frac{ds}{\rho}$ auch für $ds = 0$ d.h. für die Minimalcurven
der Fläche, gleich 0 würde, doch wäre dies irrthümlich,
für diese auch $\rho = 0$ wird, wie man leicht constatiert.
hat sich nun gezeigt, dass man durch die beiden Diffe-
tialformeln ds^2 und $d\sigma^2$ neben einander die volle
falt der Fläche beherrscht, wobei indess ds^2 und $d\sigma^2$
cht unabhängig von einander angenommen werden
nen, sondern durch die Differentialrelationen von
Mainardi und Codazzi verbunden sind.
den vorstehenden Bemerkungen haben Sie die Grund-
ge, auf welchen sich die neueren Lehrbücher der Flächen-
orie aufbauen, wie die von Hoppe und Knoblauch
d das ganz neuerdings erschienene, besonders über-
chtlich geschriebene von Stahl-Kommerell. Die-
ben fragen mehr oder minder explicit nach denjeni-
Eigenschaften der simultanen Differentialformen
^{2} und $d\sigma^2$, die bei irgend welchen Punkttransforma-
nen der u, v ungeändert bleiben. Mit diesem Aus-
ngspunkte hängt es vielleicht zusammen, dass in al-
diesen Büchern bislang die Lie'schen Ideen fehlen,

die wir in dieser Vorlesung in erster Linie entwickeln, ich meine solche Dinge, wie die Verwandtschaft zwischen Liniengeometrie und Kugelgeometrie und die allgemeine Theorie der Berührungstransformationen, gar nicht zu sprechen von der Theorie der Transformationsgruppen.

6) Zum Schlusse darf noch angeführt werden, dass die Lehre von den quadratischen Differentialausdrücken eine eigenartige geometrische Deutung in den liniengeometrischen Untersuchungen von Königs gefunden hat (Thèse 1882: Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé; ferner Annales de Toulouse I (1887): Sur certaines formes quadratiques en géométrie, ebenda IV, I (1890, 91): La géométrie réglée et ses applications). Königs geht davon aus, dass das infinitesimale Moment zweier benachbarter Geraden r, s, ϱ, σ und $r+dr, s+ds, \varrho+d\varrho, \sigma+d\sigma$ (um die gewöhnlichen Rückeschen Coordinaten zu gebrauchen) durch $\frac{dr\,d\sigma - ds\,d\varrho}{1+r^2+s^2}$ gegeben ist, und wendet dann auf diesen Ausdruck die allgemeine Theorie der quadratischen Differentialformen an. Uebrigens sind die Resultate, welche er entwickelt (insbesondere diejenigen von 1887) zum Teil bereits vorweggenommen durch Voss in den Göttinger Nachrichten von 1875. –

Hiermit schliessen wir unsere Erläuterungen über höhere Punkttransformationen von beliebigem analy-

lischen Charakter und müssen nun noch insbesondere algebraische Punkttransformationen betrachten. — Wie wir schon früher sagten, werden wir jetzt [Mo. 13. II. 93] bei den <u>algebraischen</u> Punkttransformationen die Transformation des <u>Gesammtraumes</u> in Betracht ziehen. Die besonders behandelte Frage ist in Uebereinstimmung hiermit die, ob es solche Transformationen giebt, denen zufolge jedem Punkt des einen Raumes (von n Dimensionen) <u>ein und nur ein</u> Punkt des anderen Raumes zugeordnet wird und umgekehrt. Natürlich bieten uns die linearen Transformationen sofort ein Beispiel dieser Forderung. Es sei allgemein

$$x' = \varphi(x, y, z)$$
$$y' = \psi(x, y, z)$$
$$z' = \chi(x, y, z) \quad \text{in unserem } R_3.$$

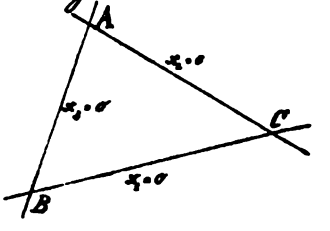
Sollen nun φ, ψ, χ eindeutige und algebraische Functionen sein und ebenso die durch Auflös. nach x, y, z entstehenden Functionen, welche die Abhängigkeit der letzteren Variablen von $x' y' z'$ ergeben, so werden wir es überhaupt mit „rationalen" Functionen zu thun haben, und dementsprechend wollen wir solche Transformationen <u>birationale</u> nennen. <u>Giebt es nun noch andere birationale Transformationen im R_n ausser den linearen Transformationen?</u>

Nehmen wir zunächst $n = 1$, dann sehen wir sofort:

Im Raum von einer Dimension giebt es nach funktionentheoretischen Grundsätzen noch keine anderen birationalen Transformationen als die linearen.

Anders ist es für $n=2$. Wir haben da vor allem 2 Arbeiten von Cremona zu nennen, die sich allgemein mit den birationalen Transformationen in der Ebene beschäftigt haben, in Bd 2 und 5 der ser. 2 der Memorie di Bologna (1863 und 65). Nach diesen Untersuchungen nennt man die in Betracht kommenden Transformationen häufig Cremonatransformationen. In Betreff einer näheren Ausführung der Dinge, von denen ich heute zu berichten habe, sei auf die Darstellung in Clebsch-Lindemann Bd I pag. 474 ff verwiesen. Natürlich hat man auch schon vor Cremona Beispiele solcher Transformationen betrachtet; das erste Beispiel ist wohl die quadratische Transformation in der Ebene, wie sie Plücker in Crelle Bd. V (1830) behandelt. Diesen Fall wird durch die folgenden Formeln gegeben, denen ein beliebiges Coordinatendreieck zu Grunde liegt

$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}$. Man übersieht sofort, dass umgekehrt gilt: $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{x_1'} : \frac{1}{x_2'} : \frac{1}{x_3'}$, dass die Transformation also wirklich birational ist und dabei involutorischen Charakter trägt, in dem je 2 Punkte der Ebe-



ne sich wechselseitig entsprechen. Wir können nun die Transformation auch in die folgende Form setzen:

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= x_2 x_3 & \sigma x_1 &= x_2' x_3' \\ \rho x_2' &= x_3 x_1 \text{ und} & \sigma x_2 &= x_3' x_1' \\ \rho x_3' &= x_1 x_2 & \sigma x_3 &= x_1' x_2', \end{aligned}$$

in denen ρ und σ Proportionalitätsfactoren sind. Wegen dieser Darstellung gerade spricht man von quadratischen Transformationen, indem die Grössen x' quadratischen Verbindungen der x proportional gesetzt werden und umgekehrt.

Nun müssen wir sehen, was aus den 3 Ecken des Coordinatendreiecks wird. Ist z. B. $x_1 = 0$, so wird auch $x_2' = 0$ und $x_3' = 0$, d. h. jedem Punkte der Seite $x_1 = 0$ wird die gegenüberliegende Coordinatenecke entsprechen und umgekehrt. Bei dieser Transformation, die im allgemeinen eine eindeutige ist, giebt es also 3 Fundamentalpunkte und 3 Fundamentalgerade, nämlich die Ecken und Seiten des Coordinatendreiecks. Jeder Ecke entsprechen sämmtliche Punkte der gegenüberliegenden Seite und umgekehrt. Ein gleiches Vorkommniss, dass einem einzelnen Punkte viele Punkte entsprechen können, ist uns ja bereits bei der stereographischen Projektion des Hyperboloids auf die Ebene entgegengetreten, so dass der Gedanke uns keineswegs neu ist. Wenn es neben den linearen Transformationen jetzt noch andere birativ-

male Transformationen giebt, so wird dies nun durch das in Rede stehende Vorkommnis ermöglicht.
Wir betrachten jetzt irgend eine gerade Linie $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$. – Indem dieselbe jede Seite des Coordinatendreiecks schneidet, muss die transformierte Curve durch die 3 Ecken desselben hindurchgehen. In der That folgt dies aus der Gleichung der transformierten Curve $u_1 x_2' x_3' + u_2 x_3' x_1' + u_3 x_1' x_2' = 0$, die einen durch jene Ecken gehenden Kegelschnitt darstellt.
Das Analoge gilt für die Curve n^{ter} Ordnung. Dieselbe wird allgemein in eine C_{2n} mit $3n$-fachen Punkten in den Ecken des Coordinatendreiecks übergehen. Wenn wir nun dieses C_{2n} erneut der Transformation unterwerfen, so muss doch die ursprüngliche Curve sich wieder ergeben. Wie kommt es nun, dass nicht eine Curve $4n^{\text{ter}}$ Ordnung entsteht? Es sei eine Curve n^{ter} Ordnung gegeben, die bezw. $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ mal durch die 3 Coordinatenecken hindurchgeht. Dieselbe wird dann in der That zunächst eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung bei der Transformation liefern. Doch die Ecke A des Dreiecks liefert uns die Gegenseite $x_1 = 0$ und zwar α_1 mal, das Analoge gilt für die Ecken B und C. Diese Geraden werden wir natürlich bei der transformierten Curve nicht mitzählen wollen. Indem wir daher von letzterer die 3 Dreiecksseiten selbst mit den Multiplicitäten $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ absondern, hat die bleibende transformierte Curve die Ordnung $n' = 2n - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$. Wie oft

wird umgekehrt die transformierte Curve durch die Ecken A, B, C gehen? Indem wir wieder bedenken, dass z.B. diejenigen von den n Schnittpunkten der Geraden $x_1 = 0$ mit der gegebenen C_n, welche in die Ecken B und C fallen, in dem gegebenen Sinne bei der transformierten Curve nicht mitzuzählen sind, so finden wir für die Zahlen, wie oft die Curve durch die Ecken A, B, C geht, die folgenden Formeln:

$$\alpha_1' = n - \alpha_2 - \alpha_3 ,$$
$$\alpha_2' = n - \alpha_3 - \alpha_1 ,$$
$$\alpha_3' = n - \alpha_1 - \alpha_2 .$$

Der involutorische Charakter der Verwandtschaft der beiden Curven C_n und $C_{n'}$ drückt sich, wie es sein muss, in dem Bau der gewonnenen Formeln aus, indem dieselben in den accentuirten und nichtaccentuirten Buchstaben symmetrisch sind.

Es ist eine gute Uebung, die quadratische Transformation an speciellen Beispielen zu studieren, z.B. giebt ein Kegelschnitt eine C_4 u.s.f.. Doch verbietet uns die Zeit, hierbei zu verweilen.

Noch sei auf die enge Beziehung hingewiesen, die zwischen der quadratischen Transformation und der Transformation durch reciproke Radien besteht. Letztere wird in rechtwinkligen Coordinaten gegeben durch die Formeln

$$x' = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Wir wollen an denselben noch die kleine Aenderung vornehmen, dass wir y mit $-y$ vertauschen; dies bedeutet eine einfache Spiegelung der Ebene an der x-Axe. Aus diesen Formeln lassen sich dann die folgenden bilden:

$$x' + iy' = \frac{1}{x+iy} \text{ und } x' - iy' = \frac{1}{x-iy}.$$

Nun setzen wir $x = \frac{\xi}{\tau}$, $y = \frac{\eta}{\tau}$ ebenso $x' = \frac{\xi'}{\tau'}$ und $y' = \frac{\eta'}{\tau'}$,

dann erhalten wir $\frac{\xi' + i\eta'}{\tau'} = \frac{\tau}{\xi+i\eta}$ und $\frac{\xi' - i\eta'}{\tau'} = \frac{\tau}{\xi - i\eta}$

oder in Proportion geschrieben:

$$\xi' + i\eta' : \xi' - i\eta' : \tau' = \frac{1}{\xi+i\eta} : \frac{1}{\xi-i\eta} : \frac{1}{\tau}.$$

Dies aber sind genau die Formeln der quadratischen Transformation; wir brauchen nur für $\xi' \pm i\eta', \tau'$ und $\xi \pm i\eta, \tau$ die Bezeichnung x_i' und x_i einzuführen. Da nun $\xi \pm i\eta = 0$ die Geraden sind, die von dem Nullpunkte nach den beiden Kreispunkten laufen, und $\tau = 0$ die unendlich ferne Gerade bedeutet, so haben wir das Schlussresultat:

<u>Verbindet man die Transformation durch reciproke Radien mit einem Zeichenwechsel des y, d. h. einer Spiegelung an der x-Axe, so haben wir einen Specialfall unserer allgemeinen quadratischen Transformation, der</u>

dadurch ausgezeichnet ist, dass 2 Ecken des Fundamentaldreiecks in die Kreispunkte fallen.

Wir wollen durch diese specielle Transformation auf die z. B. von uns erwähnten cyclischen Curven 4ter Ordnung anwenden, d. h. auf diejenigen Curven 4ter Ordnung, für die die beiden Kreispunkte Doppelpunkte sind. Für dieselben ist $n = 4$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 2$ zu setzen, α_1 jedoch $= 1$ oder $= 0$, je nachdem man den Coordinatenanfangspunkt auf der Curve wählt oder nicht. Durch die Transformation entsteht dann eine $C_{n'}$, für die

$n' = 4 - 0$ resp. -1, $\alpha_1' = 0$, $\alpha_2' = \alpha_3' = 2 - 0$ resp. -1 ist.

1. Wenn das Inversionscentrum nicht auf der cyclischen Curve liegt, dann bekommen wir bei der Inversion wieder eine cyclische Curve 4ter Ordnung. Wenn dagegen die gegebene cyclische Curve durch das Inversionscentrum hindurchgeht, so bekommen wir eine C_3, die einfach durch jeden der beiden Kreispunkte läuft.

Schliesslich können wir noch den besonderen Fall betrachten, dass die cyclische Curve 4ter Ordnung im Inversionscentrum sogar einen Doppelpunkt hat, dann ist $\alpha_1 = 2$, und es wird $n' = 2$ und $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' = 0$, d. h. die transformierte Curve ist ein Kegelschnitt, der nicht durch die Kreispunkte geht.

Was die Cremonatransformationen betrifft, so haben wir noch einen wichtigen Satz zu erwähnen, der gleichzeitig

von Clifford (nach persönlicher Mitteilung), Noether (Anm. 3) und Rosanes (Crelle 73) gefunden ist (1870/71). Es handelt sich um folgendes: Wenn wir eine feste quadratische Transformation mit einer beliebigen zweiten zusammensetzen, so bekommen wir offenbar eine Transformation 4ten Grades, die wiederum birational ist. Die genannten Mathematiker haben nun gefunden, dass man durch Aneinanderreihung verschiedener quadratischer Transformationen nicht nur Beispiele höherer Cremonatransformationen erhält, sondern überhaupt alle Cremonatransformationen, die es gibt. Indessen sind hierbei Grenzfälle der quadratischen Transformation mitgenommen, bei denen 2 oder alle Fundamentalpunkte zusammenfallen.

Was nun weiter die birationalen Transformationen der R_3 (allgemein der R_n) betrifft, so hat man bisher nur einzelne Beispiele behandelt. Wir wollen die folgenden anführen:

a) Es sei wieder $\varrho x_i = \frac{1}{x_i}$. Dies gibt uns für den R_n eine Transformation n^{ten} Grades, für den gewöhnlichen Raum also eine Transformation 3ten Grades, entsprechend der quadratischen Transformation der Ebene.

b) Ein zweites Beispiel, welches ebenfalls eine Verallgemeinerung der quadratischen Transformation der Ebene ist, gibt die Transformation durch reciproke Radien oder die Inversion:

$$\begin{aligned} \varrho x' &= xt, \\ \varrho y' &= yt, \\ \varrho z' &= zt, \\ \varrho t &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Setzen wir speciell $t = 0$, so bekommen wir $x' = y' = z' = 0$. Dies besagt: Der ganzen unendlich fernen Ebene entspricht der Coordinatenanfangspunkt, das Inversionscentrum. Dementsprechend nennen wir die ∞ ferne Ebene eine Fundamentalebene, das Inversionscentrum einen Fundamentalpunkt 2ter Stufe. Ausserdem sind alle Punkte des Kugelkreises Fundamentalpunkte erster Stufe, und zwar entspricht dem einzelnen Punkte des Kugelkreises die Minimalgerade, die ihm mit dem Anfangspunkte verbindet. Wir sehen dies am einfachsten, wenn wir die letzten Gleichungen so schreiben:

$$\varrho x' = x,$$
$$\varrho y' = y,$$
$$\varrho z' = z,$$
$$\varrho t' = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t}.$$

Für einen Punkt des Kugelkreises ist dann $t = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Es wird daher für denselben $\varrho t' = \frac{0}{0}$, d. h. gleich einer beliebigen Grösse, worin unser Theorem liegt.

Nun können wir für diese Inversion im Raume dieselben Betrachtungen anstellen, wie soeben bei der quadratischen Transformation in der Ebene. Es sei eine Fläche n^{ter} Ordnung gegeben, die α mal durch den Anfangspunkt geht und β mal den Kugelkreis trifft. Dieselbe wird durch Transformation zu einer Fläche n'^{ter} Ordnung werden, für die $n' = 2n - \alpha - 2\beta$ ist, und die den Anfangspunkt $\alpha' = n - 2\beta$

mal und den Kugelkreis $\beta' = n - \alpha - \beta$ mal enthält. U. s. w. fort. Wir wenden uns sogleich zu der neuen Frage, welche die Invariantentheorie der birationalen Transformationen betrifft, und zwar wollen wir uns zunächst auf die Ebene beschränken, indem wir fragen: Giebt es eine Invariantentheorie der Cremonatransformationen?

Es sei die Curve gegeben $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Was hat dieselbe für Eigenschaften, die unzerstörbar sind bei Anwendung der sämmtlichen letztgenannten Transformationen? Man hat in der Riemannschen Functionentheorie und den an dieselbe anknüpfenden geometrischen Untersuchungen der algebraischen Curven allgemein die Eigenschaften der Curven untersucht bei solchen Transformationen, die für die einzelne Curve eindeutig sind, und erkannt, dass die einzelne Curve diesen Transformationen gegenüber ein bestimmtes Geschlecht p besitzt und ausserdem eine Anzahl Constanten, absolute Invarianten, die man die Moduln der Curve nennt. Es sei an die Theorie der Abelschen Integrale erinnert, in der diese Zahlen von grundlegender Bedeutung sind. Die hier gemeinten eindeutigen Transformationen einer Curve $f = 0$ sind nun aber keineswegs nothwendig Cremonatransformationen, d. h. eindeutige Transformationen der ganzen Ebene.

Es folgt hieraus einmal, dass die Zahl p und die Moduln der Riemann'schen Theorie selbstverständlich auch bei

allen Cremonatransformationen invariant sind; es wird aber darüber hinaus noch Eigenschaften der Curve geben, die bei dem Riemann'schen Standpunkte nicht in Betracht kommen, aber Invarianten der Cremonatransformationen sind. Systematische Untersuchungen hierüber sind indess meines Wissens noch nicht angestellt worden.

Ganz analog werden die Verhältnisse auch im Raume liegen. Es sei die Fläche $f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$ gegeben; dieselbe hat 2 Geschlechtszahlen p_1 und p_2 und eine Reihe von Moduln. Nähere Angaben findet man z. B. in meinen Vorlesungen über Riemannsche Flächen II pag. 74, woselbst auch weitere Citate auf die Arbeiten von Noether etc. angegeben sind. Diese Geschlechtszahlen und Moduln bleiben natürlich bei birationalen Transformationen des Gesammtraumes ebenfalls ungeändert, erschöpfen aber nicht die Gesammtheit der birationalen Invarianten überhaupt.

Nun kommen wir schliesslich noch zu der Invariantentheorie der Differentialformen gegenüber birationalen Transformationen, doch wollen wir uns darauf beschränken, allein von den Pfaffschen Ausdrücken $\sum X_i\, dx_i$ zu sprechen. Wir haben einen solchen Ausdruck bislang beliebigen Punkttransformationen unterworfen, und dementsprechend haben wir von den X_i nur verlangt, dass sie in dem betrachteten Raumstück analytisch seien. Wenn wir jetzt jedoch ein-eindeutige Transformation des Gesammt-

$$x' = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Wir wollen an denselben noch die kleine Aenderung vornehmen, dass wir y mit $-y$ vertauschen; dies bedeutet eine einfache Spiegelung der Ebene an der y-Axe. Aus diesen Formeln lassen sich dann die folgenden bilden:

$$x' + iy' = \frac{1}{x+iy} \text{ und } x' - iy' = \frac{1}{x-iy}.$$

Nun setzen wir $x = \frac{\xi}{\tau}$, $y = \frac{\eta}{\tau}$ ebenso $x' = \frac{\xi'}{\tau'}$ und $y' = \frac{\eta'}{\tau'}$,

dann erhalten wir $\frac{\xi' + i\eta'}{\tau'} = \frac{\tau}{\xi + i\eta}$ und $\frac{\xi' - i\eta'}{\tau'} = \frac{\tau}{\xi - i\eta}$

oder in Proportion geschrieben:

$$\xi' + i\eta' : \xi' - i\eta' : \tau' = \frac{1}{\xi + i\eta} : \frac{1}{\xi - i\eta} : \frac{1}{\tau}.$$

Dies aber sind genau die Formeln der quadratischen Transformation; wir brauchen nur für $\xi' \pm i\eta', \tau'$ und $\xi \pm i\eta, \tau$ die Bezeichnung x_i' und x_i einzuführen. Da nun $\xi \pm i\eta = 0$ die Graden sind, die von dem Nullpunkte nach den beiden Kreispunkten laufen, und $\tau = 0$ die unendlich ferne Gerade bedeutet, so haben wir das Schlussresultat: Verbindet man die Transformation durch reciproke Radien mit einem Zeichenwechsel des y, d.h. einer Spiegelung an der x-Axe, so haben wir einen Specialfall unserer allgemeinen quadratischen Transformation, den

dadurch ausgezeichnet ist, dass 2 Ecken des Fundamentaldreiecks in die Kreispunkte fallen.

Wir wollen doch diese specielle Transformation auf die s. Z. von uns erwähnten cyclischen Curven 4ter Ordnung anwenden, d. h. auf diejenigen Curven 4ter Ordnung, für die die beiden Kreispunkte Doppelpunkte sind. Für dieselben ist $n = 4$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 2$ zu setzen, α_1 jedoch $= 1$ oder $= 0$, je nachdem man den Coordinatenanfangspunkt auf der Curve wählt oder nicht. Durch die Transformation entsteht dann eine $C_{n'}$, für die

$n' = 4 - 0$ resp. -1, $\alpha_1' = 0$, $\alpha_2' = \alpha_3' = 2 - 0$ resp. -1 ist.

d. h. Wenn das Inversionscentrum nicht auf der cyclischen Curve liegt, dann bekommen wir bei der Inversion wieder eine cyclische Curve 4ter Ordnung. Wenn dagegen die gegebene cyclische Curve durch das Inversionscentrum hindurchgeht, so bekommen wir eine C_3, die einfach durch jeden der beiden Kreispunkte läuft.

Schliesslich können wir noch den besondern Fall betrachten, dass die cyclische Curve 4ter Ordnung im Inversionscentrum sogar einen Doppelpunkt hat, dann ist $\alpha_1 = 2$, und es wird $n' = 2$ und $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' = 0$, d. h. die transformierte Curve ist ein Kegelschnitt, der nicht durch die Kreispunkte geht.

Was die Cremonatransformationen betrifft, so haben wir noch einen wichtigen Satz zu erwähnen, der gleichzeitig

von Clifford (nach persönlicher Mitteilung), Noether (Anm. 3) und Rosanes (Crelle 73) gefunden ist (1870/71). Es handelt sich um folgendes: Wenn wir eine erste quadratische Transformation mit einer beliebigen zweiten zusammensetzen, so bekommen wir offenbar eine Transformation 4ten Grades, die wiederum birational ist. Die genannten Mathematiker haben nun gefunden, dass man durch Aneinanderreihung verschiedener quadratischer Transformationen nicht nur Beispiele höherer Cremonatransformationen erhält, sondern überhaupt alle Cremonatransformationen, die es giebt. Indessen sind hierbei Grenzfälle der quadratischen Transformation mitgenommen, bei denen 2 oder alle Fundamentalpunkte zusammenfallen.

Was nun weiter die birationalen Transformationen der R_3 (allgemein der R_n) betrifft, so hat man bisher nur einzelne Beispiele behandelt. Wir wollen die folgenden anführen:

a) Es sei wieder $\varrho x_i = \frac{1}{x_i}$. Dies giebt uns für den R_n eine Transformation n^{ten} Grades, für den gewöhnlichen Raum also eine Transformation 3ten Grades, entsprechend der quadratischen Transformation der Ebene.

b) Ein zweites Beispiel, welches ebenfalls eine Verallgemeinerung der quadratischen Transformation der Ebene ist, giebt die Transformation durch reciproke Radien oder die Inversion:

$$\begin{aligned} \varrho x' &= xt, \\ \varrho y' &= yt, \\ \varrho z' &= zt, \\ \varrho t &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Setzen wir speciell $t = 0$, so bekommen wir $x' = y' = z' = \infty$.
Dies besagt: Der ganzen unendlich fernen Ebene entspricht der Coordinatenanfangspunkt, das Inversionscentrum. Dementsprechend nennen wir die ∞ ferne Ebene eine Fundamentalebene, das Inversionscentrum einen Fundamentalpunkt 2ter Stufe. Ausserdem sind alle Punkte des Kugelkreises Fundamentalpunkte erster Stufe, und zwar entspricht dem einzelnen Punkte des Kugelkreises die Minimalgerade, die ihm mit dem Anfangspunkte verbindet. Wir sehen dies am einfachsten, wenn wir die letzten Gleichungen so schreiben:

$$\begin{aligned} \varrho x' &= x, \\ \varrho y' &= y, \\ \varrho z' &= z, \\ \varrho t' &= \frac{x^2+y^2+z^2}{t}. \end{aligned}$$

Für einen Punkt des Kugelkreises ist dann $t = 0$ und $x^2+y^2+z^2 = 0$. Es wird daher für denselben $\varrho t' = \frac{0}{0}$, d. h. gleich einer beliebigen Grösse, worin unser Theorem liegt.
Nun können wir für diese Inversion im Raume dieselben Betrachtungen anstellen, wie soeben bei der quadratischen Transformation in der Ebene. Es sei eine Fläche n^{ter} Ordnung gegeben, die α mal durch den Anfangspunkt geht und β mal den Kugelkreis trifft. Dieselbe wird durch Transformation zu einer Fläche n'^{ter} Ordnung werden, für die $n' = 2n - \alpha - 2\beta$ ist, und die den Anfangspunkt $\alpha' = n - 2\beta$

mal und den Kugelkreis $\beta' = n - \alpha - \beta$ mal enthält. U. s. w. fort. Wir wenden uns sogleich zu der neuen Frage, welche die Invariantentheorie der birationalen Transformationen betrifft, und zwar wollen wir uns zunächst auf die Ebene beschränken, indem wir fragen: Giebt es eine Invariantentheorie der Cremonatransformationen?

Es sei die Curve gegeben $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Was hat dieselbe für Eigenschaften, die unzerstörbar sind bei Anwendung der sämmtlichen letztgenannten Transformationen? Man hat in der Riemannschen Functionentheorie und den an dieselbe anknüpfenden geometrischen Untersuchungen der algebraischen Curven allgemein die Eigenschaften der Curven untersucht bei solchen Transformationen, die für die einzelne Curve eindeutig sind, und erkannt, dass die einzelne Curve diesen Transformationen gegenüber ein bestimmtes Geschlecht p besitzt und ausserdem eine Anzahl Constanten, absolute Invarianten, die man die Moduln der Curve nennt. Es sei an die Theorie der Abelschen Integrale erinnert, in der diese Zahlen von grundlegender Bedeutung sind. Die hier gemeinten eindeutigen Transformationen einer Curve $f = 0$ sind nun aber keineswegs nothwendig Cremonatransformationen, d. h. eindeutige Transformationen der ganzen Ebene.

Es folgt hieraus einmal, dass die Zahl p und die Moduln der Riemann'schen Theorie selbstverständlich auch bei

allen Cremonatransformationen invariant sind; es wird aber darüber hinaus noch Eigenschaften der Curve geben, die bei dem Riemann'schen Standpunkte nicht in Betracht kommen, aber Invarianten der Cremonatransformationen sind. Systematische Untersuchungen hierüber sind indess meines Wissens noch nicht angestellt worden.

Ganz analog werden die Verhältnisse auch im Raume liegen. Es sei die Fläche $f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$ gegeben; dieselbe hat 2 Geschlechtszahlen p_1 und p_2 und eine Reihe von Moduln. Nähere Angaben findet man z. B. in meinen Vorlesungen über Riemannsche Flächen II pag. 74, woselbst auch weitere Citate auf die Arbeiten von Noether etc. angegeben sind. Diese Geschlechtszahlen und Moduln bleiben natürlich bei birationalen Transformationen des Gesammtraumes ebenfalls ungeändert, erschöpfen aber nicht die Gesammtheit der birationalen Invarianten überhaupt.

Nun kommen wir schliesslich noch zu der Invariantentheorie der Differentialformen gegenüber birationalen Transformationen, doch wollen wir uns darauf beschränken, allein von den Pfaffschen Ausdrücken $\sum X_i\, dx_i$ zu sprechen. Wir haben einen solchen Ausdruck bislang beliebigen Punkttransformationen unterworfen, und dementsprechend haben wir von den X_i nur verlangt, dass sie in dem betrachteten Raumstück analytisch seien. Wenn wir jetzt jedoch ein-eindeutige Transformation des Gesammt-

raumes anwenden, werden wir zweckmässiger Weise die Coefficienten X_i als algebraisch begr. rational und demnach im ganzen Raume zugänglich voraussetzen. Hinsichtlich dieser speciellen Pfaffschen Ausdrücke verlangen wir dann eine Invariantentheorie einmal bei beliebiger projektiver Umformung, dann aber bei beliebigen birationalen Umformungen. Wir sagen in dieser Richtung: Ganz gewiss besitzt eine solche Pfaffsche Gleichung $\sum X_i dx_i = 0$ gegenüber beliebigen eindeutigen Transformationen der x_i eine Reihe unzerstörbarer Geschlechtszahlen $p_1 p_2 \ldots$.

Denn sehen wir einmal die dx_i neben den x_i selbst als unabhängige Veränderliche an und betrachten die Gleichung $\sum X_i dx_i = 0$ als eine algebraische Gleichung zwischen $2n$ Veränderlichen, so hat diese doch gegenüber eindeutigen Transformationen im Raume der $2n$ Veränderlichen nach Noether ihre Geschlechtszahlen, die bei den Umformungen im Raume von n Dimensionen a fortiori unveränderlich sind. —

Fragen wir nun nach dem Werte dieser letzten Betrachtungen, die ja beide gar nicht durchgeführt sind, so ist darauf zu antworten, dass dieselben von besonders hoher Bedeutung sein müssen. Ist die grosse Aufgabe des nächsten Jahrhunderts in der Mathematik, diejenigen transcendenten Functionen, die bei der Integration der algebraischen Differentialgleichungen entstehen, in ganz entsprechender

ist zu classificiren, wie man dies bei den Abel'schen Integralen, die zu den algebraischen Curven gehören, seit langem macht. Bei letzteren ist nun gerade diese die Grundlage, dass man sich über die Eigenschaften der algebraischen Curven klar wird, die bei beliebigen eindeutigen Transformationen bestehen bleiben. Genau so würde bei den Transcendenten, die etwa aus den algebraischen Pfaff'schen Problemen erwachsen, die Eigenschaften des Pfaff'schen Ausdrucke fundamental sein, welche bei beliebiger eindeutiger Transformation der Variablen x erhalten bleiben. Und wenn wir gerade von einer Anzahl Invariantzahlen $p_1, p_2 \ldots$ sprechen, die ein solches Pfaff'sches Problem gegenüber beliebigen eindeutigen Transformationen der x als bleibende Charaktere besitzt, so werden wir damit ebenso viele wesentliche Charaktere haben, die für jene Transcendenten in Betracht kommen.

Es wird für diese Betrachtung der Pfaff'schen Probleme gut sein, homogene Schreibweise anzuwenden. Wir setzen $\frac{x_i}{x_{n+1}} = y_i$ und erhalten aus der Gleichung $\sum X_i \, dx_i = 0$ die neue aus $n+1$ Gliedern bestehende Gleichung $Y_i \, dy_i = 0$, worin Y_i homogene Functionen gleichen oder in den y_i sind, die der Identität $\sum Y_i y_i = 0$ genü-

ist mir nur eine einzige hierzu nennende Arbeit bekannt, von Voss in den Ann. 23. veröffentlicht ist.

Diese Untersuchungen von Voss betreffen die projektiven Eigenschaften der rationalen Pfaff'schen Probleme, — der „Punktebenensysteme", wie sie Voss nennt, indem durch die Pfaff'sche Gleichung jedem Punkte eine bestimmte Ebene von Fortschreitungsrichtungen zugeordnet wird — und sind also eine Vorarbeit in der von uns bezeichneten Richtung.

Das allgemeine Programm für das Studium der Transcendenten, wie wir es eben postulirten, ist wesentlich dasselbe, welches Clebsch im Jahre 1872, seinem letzten Lebensjahre, für die gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung entwickelt hat in seiner Theorie der Curven.

Dass Niemand in den letzten 20 Jahren an der Verwirklichung dieses Programms gearbeitet hat, hat seinen natürlichen Grund darin, dass dasselbe eine grosse Kenntnis von verschiedenen Gebieten der Mathematik voraussetzt; nur wer in projektiver Geometrie bezw. Invariantentheorie und Functionentheorie gut zu Hause ist, wird es unternehmen können, in dieser Richtung einen Schritt vorwärts zu thun. Es ist überhaupt ein Fehler in der heutigen Entwickelung der Mathematik, dass sie zu sehr in verschiedene Gebiete zerfällt, die ohne wechselseitige Bezugnahme neben einander von verschiedenen Fachmännern behandelt werden. Algebra, Geometrie und Functionentheorie spielt z. B. insbesondere die Zahlentheorie eine Rolle für sich. Das Streben muss natürlich sein, die einzelnen Gebiete möglichst mit einan-

der in Beziehung zu setzen, da nur so ein wirklich grosser Fortschritt zu erreichen sein wird.

Wir wenden uns jetzt zu einem neuen Hauptteil [Di. 14. II. 93]. unserer Vorlesung, der sich mit Transformation unter

Wechsel des Raumelementes

zu befassen hat. Wir werden 3 Dinge besonders zu behandeln haben:

a) Die dualistische Transformation, welche in der Ebene Punkt und Gerade, im Raume Punkt und Ebene einander gegenüberstellt.

b) Sodann werden wir auf die Kugel- und Liniengeometrie zurückzukommen haben, deren verschiedene Beziehungen wir erst jetzt völlig zu verstehen in der Lage sein werden.

c) Schliesslich werden wir überhaupt von den Lie'schen Berührungstransformationen sprechen, die alles Bisherige umfassen.

Was die dualistische Transformation betrifft, so wollen wir uns auf den gewöhnlichen Raum beschränken. Wir bezeichnen die Punktcoordinaten wie bisher mit $x_1 x_2 x_3 x_4$, die Ebenencoordinaten mit $u_1 u_2 u_3 u_4$. Dann gehen wir ausetwa von den allgemeinen Substitutionen:

$\varrho u_i = \varphi_i(x_1 x_2 x_3 x_4)$. Unter diesen allgemeinen Transformationen werden wieder insbesondere die linearen

$\varrho u_i = \sum a_{ik} x_k$ unsere Aufmerksamkeit fesseln. Einer

linearen Verbindung der x_i entspricht im letzten Falle wieder eine lineare Verbindung der u_i und umgekehrt. Dies entspricht den folgenden Sätzen: Wird dem Punkte x_i eine Ebene u_i zugeordnet wird, so dreht sich die letztere insbesondere um eine Gerade, wenn der Punkt x_i sich auf einer anderen Geraden bewegt. Demgemäss entspricht einer Geraden stets wieder eine Gerade. Ferner dreht sich die Ebene u_i um einen Punkt, wenn der Punkt x_i sich beliebig auf einer Ebene bewegt. Indem solcherweise ein wechselseitiger Entsprechen zwischen beiden Räumen eintritt, so hat man diese Transformation auch als Reciprocität der beiden Räume schlechtweg bezeichnet. Unter den Reciprocitäten besonders bemerkenswert ist der Fall $a_{ik} = a_{ki}$. Diese specielle lineare Beziehung coincidiert mit der Polarenverwandtschaft hinsichtlich der Fläche 2. Grades $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$. Der einfachste Fall ist natürlich gegeben durch $\rho u_i = x_i$; dann sind alle a_{ik} für $i \gtrless k$ gleich 0 und alle $a_{ii} = 1$. Diese Formeln liefern die Polarenverwandtschaft in Bezug auf die nullteilige Fläche 2ten Grades $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$.

Es ergibt nun eine Reihe einfacher Folgerungen, die ich hier nur in Kürze anschliessen will, indem dieselben in allen bezüglichen Lehrbüchern ohnehin ausgeführt sind:

a) Der erste Punkt betrifft die dualistische Umformung gegebener Figuren. Besonders bemerkenswert ist z. B., dass ein

Flegel bei beliebiger dualistischer Umformung eine ebene Curve, allgemein jede developpable Fläche eine Raumcurve liefert. Derartige Umsetzungen sind eine vortreffliche Uebung der Raumanschauung.

b) Was die Stellung der Coordinaten u_i in der Invariantentheorie betrifft, so sind dieselben dadurch mit den x_i verknüpft, dass wir die Bedingung der vereinigten Lage $\sum_1^r x_i u_i = 0$ festhalten. Durch die Substitution $x_i = \sum a_{ik} y_k$ geht die linke Seite dieser Bedingung über in $\sum_i \sum_k a_{ik} u_i y_k$, und wenn wir dieses wieder gleich $\sum v_k y_k$ setzen, so sehen wir, dass $v_k = \sum_i a_{ik} u_i$ sein muss. Während wir bei der Substitution der x_i über den Index k zu summieren hatten, haben wir jetzt über den Index i zu summieren. Mit anderen Worten: In der Coefficientenanordnung der beiden Substitutionen sind die Horizontal- und Verticalreihen miteinander vertauscht. Wegen dieser Eigenschaft nennt man die neue Substitution die zu der ersten transponirte. Uebrigens aber nennt man die Coordinaten u_i zu den Coordinaten x_i contragredient, und findet die Erklärung dieser Bemerkung in dem Satze: Während sich die alten x durch die neuen y vermöge einer ersten linearen Substitution ausdrücken, drücken sich die neuen v durch die alten u vermöge der transponirten Substitution aus.

c) Endlich sei noch darauf hingewiesen, welche Rolle die

dualistischen Umformungen in der synthetischen Geometrie spielen, wo sie neben den projectiven Beziehungen zur Erzeugung höherer algebraischen Gebilde aus niederen dienen. –

Wir wollen nun ausführlich davon sprechen, welche Bedeutung die Transformation $u_i = \sum_k a_{ik} x_k$ für die Differentialgleichungen hat. Wir haben ja schon vor Weihnachten diese Gedanken eingeleitet mit unhomogener Schreibweise der Formeln. Wir haben damals statt der Punktcoordinaten $x\,y\,z$ Ebenencoordinaten X, Y, Z eingeführt, die durch die folgende Bedingung der vereinigten Lage definiert waren: $Z - Xx - Yy - Z = 0$. Dann sollte uns irgend eine Fläche gegeben sein in Punktcoordinaten $x\,y\,z$, zu denen wir die partiellen Ableit. 1. und 2. Ordn. $p, q; r, s, t$ hinzunahmen. Wir bezeichneten dann die Coordinaten der zugehörigen Tangentialebene mit X, Y, Z und die entsprechenden partiellen Ableit. mit P, Q, R, S, T und berechneten, wie sich diese neuen Grössen durch durch die $x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t$ ausdrücken. Diese Formeln können wir jetzt auf eine zweite Weise auffassen. Wir denken uns die dualistische Transformation ausgeführt, dass wir jedem Punkte $x\,y\,z$ die Ebene mit den Coordinaten $x\,y\,z$, jeder Ebene $X\,Y\,Z$ den Punkt mit den Coordinaten $X\,Y\,Z$ zuordnen. So entsteht aus der gegebenen Fläche mit den Stücken $x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t$ eine transformierte Fläche, eine Reciprocalfläche, deren Punktcoordinaten und zugehörige Ableitungen die $X\,Y\,Z\,P\,Q\,R\,S\,T$ sind.

Wir haben bereits vor Weihnachten die folgende Tabelle berechnet, in

der die unter einander stehenden Ausdrücke allemal gleich zu setzen sind:

x	y	z	p	q	$z-px-qy$	r	s	t	s^2-rt
$-P$	$-Q$	$-Z-Px-Qy$	X	Y	Z	$\frac{T}{Y^2-XT}$	$\frac{S}{Y^2-RS}$	$\frac{R}{Y^2-RT}$	$\frac{1}{Y^2-RT}$

Insbesondere folgt hier aus der ersten Formelgruppe, dass

$$dZ-PdX-QdY=dz-pdx-qdy$$ ist. Wir bemerken vorallem, dass durch $x\,y\,z\,p\,q$ zusammen ein Punkt der Fläche mitsammt seiner Tangentialebene bestimmt ist, und dass nun die $X\,Y\,Z\,P\,Q$ nur von den $x\,y\,z\,p\,q$ abhängen. Welche geometrische Folgerungen lassen sich an diesen Umstand anknüpfen? Es ergiebt sich der Satz, dass zwei Flächen, welche sich in einem Punkte berühren, welche also das nämliche Werthsystem $x\,y\,z\,p\,q$ aufweisen, in zwei Flächen übergehen, die sich wieder berühren d. h. in solche, die dasselbe Werthsystem $X\,Y\,Z\,P\,Q$ aufweisen. Es ist dies so zu verstehen, dass, wenn aus einem Punkte einer Fläche die Tangentialebene der Reciprocalfläche wird, dann gleichzeitig aus der Tangentialebene der Fläche der zugehörige Berührungspunkt der Reciprokalfläche wird. — Wir können jetzt einen entsprechenden Satz aufstellen für Flächen, die sich osculieren, doch wollen wir bei dem Satz von der Berührung stehen bleiben.

An ihn knüpft sich nämlich die allgemeine Idee der

Berührungstransformation an. Fragen wir doch gleich nach der allgemeinen Bedeutung derselben, wenn wir auch die nähere Ausführung erst später geben. Wir beginnen mit den Grössen $x\,y\,z\,p\,q$, die ob sie beliebige Veränderliche wären. Dass p und q die partiellen Differentialquotienten sind, drückt sich darin aus, dass $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ ist; wir werden darum diese Differentialrelation immer zur Seite halten müssen. Nun wollen wir neue Grössen einführen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} X &= \varphi_1(x\,y\,z\,p\,q),\\ Y &= \varphi_2(x\,y\,z\,p\,q),\\ Z &= \varphi_3(x\,y\,z\,p\,q),\\ P &= \varphi_4(x\,y\,z\,p\,q),\\ Q &= \varphi_4(x\,y\,z\,p\,q), \end{aligned}$$

woselbst die φ_i bis auf weiteres irgend welche analytische Functionen bezeichnen mögen, die innerhalb der für uns in Betracht kommenden Raumstücke regulär sind. Diese Substitutionen sollen dabei so beschaffen sein, dass:

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \varrho\,(dz - p\,dx - q\,dy)$$ wird, woselbst ϱ irgend ein Faktor sei.

Eine solche Transformation heisst nach Lie eine Berührungstransformation. Die Bezeichnung ist natürlich der Eigenschaft entnommen, dass aus zwei sich berührenden Flächen stets wieder zwei sich berührende Flächen werden.

Offenbar ist jede Punkttransformation eine Berührungstransformation. Dieselbe wird allgemein durch die Formeln gegeben: $X = \varphi(xyz)$, $Y = \psi(xyz)$, $Z = \chi(xyz)$, aus denen sich die beiden weiteren Formeln für P und Q ableiten lassen.

Ein zweites Beispiel giebt uns die dualistische Transformation, mit der wir gerade begonnen haben. Um den allgemeinen Umfang der Berührungstransformationen zu verstehen, wird es nötig sein, mit Lie eine allgemeinere geometrische Auffassung einzuführen. Den Inbegriff der Grössen $xyzpq$, den Punkt und seine Tangentialebene oder überhaupt den Punkt und eine durch ihn hindurchgehende Ebene, wollen wir als Flächenelement benennen, und zwar ist es bequem, von der Tangentialebene sich nur ein kleines Stück, eine Schuppe, um den Berührungspunkt herum vorzustellen. Solcher Flächenelemente giebt es natürlich ∞^5; diese wollen wir fortan als Raumelemente betrachten, sodass unser Raum dann eine Mannigfaltigkeit von 5 Dimensionen darstellt. Wir werden lernen müssen, wie wir uns in dieser M_5 zu bewegen haben; da ist es nun eine bequeme Hilfsvorstellung, dass wir andrerseits unsere Grössen $xyzpq$ als gewöhnliche Punktcoordinaten im Raume von 5 Dimensionen betrachten. Die Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ stellt dann für diesen R_5 eine Pfaffsche Gleichung dar und zwar vom Charakter

Σ in der Normalform, wie wir diese in der vorigen Woche kennen gelernt haben. In diesem R_5 erscheinen daher die Berührungstransformationen des R_3 als solche Punkttransformationen, welche die Pfaffsche Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ in sich selbst überführen.

Wir werden uns heute mit der Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy$ [No. 16. I 93] näher zu beschäftigen haben. Betrachten wir zwei benachbarte Elemente einer Fläche x, y, z; p, q und $x+dx, y+dy$, $z+dz$, $p+dp$, $q+dq$, so wird zwischen denselben gerade diese Relation bestehen. Demgemäss bezeichnen wir die Differentialgleichung als die Bedingung der vereinigten Lage der beiden Elemente. In der That kann man sagen, dass der Pkt des ersten Elementes in der Ebene des zweiten Elementes liegt und umgekehrt. In laufenden Coordinaten ist die Ebene des ersten Elementes $z' - z = p(x'-x) + q(y'-y)$, und setzen wir in deren Gleichung $z' = z+dz$, $x' = x+dx$, $y' = y+dy$ d.h. den Punkt des zweiten Elementes ein, so erhalten wir $dz = p\,dx + q\,dy$ d.h. unsere obige Gleichung. Umgekehrt lautet die Gleichung der Ebene des zweiten Elementes:

$(z'-z-dz) = (p+dp)(x'-x-dx) + (q+dq)(y'-y-dy)$,

und setzen wir jetzt $z' = z$, $x' = x$, $y' = y$, so bekommen wir wieder bei Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung die Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$. Doch müssen wir, um einem Missverständnisse vorzubeugen, ausdrücklich hinzufügen: Diese Aussage, dass der zweite Pkt in der Ebene des ersten Ele-

menter und der erste Punkt in der Ebene des zweiten Elementes liegt, ist nur zu verstehen bis auf Grössen zweiter Ordnung, d.h. der zweite Punkt liegt von der Ebene des ersten Elementes um eine Grösse 2ter Ordnung entfernt und umgekehrt. Dieser Umstand kommt bei folgender Ueberlegung zur Geltung. Man möchte meinen, dass die Durchschnittsgerade der beiden Ebenen zugleich die Verbindungslinie der beiden Punkte sein müsste, wie es gewiss für 2 Punkte der Fall ist, deren Ebenen genau durch den jedesmaligen andern Punkt gehen. Dies ist jedoch keineswegs hier der Fall; vielmehr kann die Schnittgerade einen beliebigen endlichen Winkel mit der Verbindungslinie einschliessen. Es ist in relativen Coordinaten in Bezug auf den Punkt x, y, z die Gleichung der ersten Ebene $\xi = p\xi + q\eta$ und die Gleichung einer zur zweiten Ebene parallelen Ebene durch denselben Punkt x, y, z

$$\xi = (p + dp)\xi + (q + dq)\eta .$$

Aus beiden Gleichungen findet sich:

$$\xi : \eta : \xi = dq : -dp : p\,dq - q\,dp$$

als die Richtung der Schnittgerade. Letzterer Richtung fällt nun in keiner Weise, notwendig mit $dx : dy : dz$ zusammen. Vielmehr zeigen unsere Formeln, dass die beiden Richtungen nur dann identisch sind, d.h. die Durchschnittsgerade der beiden Ebenen mit der Verbindungslinie der beiden Punkte nur dann zusammenfällt, wenn $dq . dy + dp . dx = 0$ ist.

In letzterem Falle sagen, wir, die beiden Elemente befinden sich in Schmiegungslage. Dies ist dann freilich nicht bei beliebiger Berührungstransformation invariant, wohl aber bei projektiver und dualistischer Umformung.

Wir wollen nun genauer $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ als ein Pfaffsches Problem bezeichnen, und uns die Aufgabe stellen, solche Integralmannigfaltigkeiten zu suchen, welche diese Relation erfüllen. Wir können Integralmannigfaltigkeiten ersten und solche zweiter Dimensionen suchen, letzteres werden dann (nach der allgemeinen Theorie der Pfaff'schen Probleme) die meist ausgedehnten Mannigfaltigkeiten sein, die unsere Pfaffsche Gl. erfüllen.

Um zunächst von der Integral-M_1 zu sprechen, so erfüllen wir sicher die Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, indem wir $dx = dy = dz = 0$ setzen. Dieser Ansatz liefert uns als ersten Beispiel einer Integral-M_1 die Elemente die sich an irgendwelche Kegelspitze anschmiegen, oder, wie ein Ebenenbüschel, bei festgehaltenem Punkte $x\,y\,z$ eine gemeinsame Schmitgerade haben. Ein zweites Beispiel einer Integral-M_1 gewinnen wir, wenn wir von einer beliebigen Raumcurve ausgehen und nach irgend einem stetigen Gesetz eine Aufeinanderfolge von Tangentialebenen längs derselben betrachten, die dann eine developpable Fläche umhüllen. Die zu diesem Tangentialebenen gehörigen Elemente bilden gleichfalls eine Integral-M_1; wir nennen dieselbe einen Streifen. Letzterem

en dehnen wir übrigens gelegentlich auf die zuerst ange-
ten Beispiele von Integral-M_1 mit aus.
wird nun die Integral M_1 im besonderen eine Schmie-
s M_1 sein? Offenbar muss dann für je 2 consecutive Ele-
e die Bedingung $dq \cdot dy + dp \cdot dx = 0$ erfüllt werden:
hen, dass einmal jede Kegelspitze (wie jedes Elementen-
hel) eine Schmiegungs M_1 ist; andererseits bekommen
ine solche, wenn wir den Punkten einer Raumcurve ihre
lationsebenen zuordnen. Insbesondere ist jedes gerad-
e Streifen ein Schmiegungsstreifen, insofern doch bei
raden Linie jede Tangentialebene auch Osculationsebe-
t.
gehen wir zu den Integral-M_2 über, indem wir fra-

t es Mannigfaltigkeiten zweiter Dimension, gebildet aus
henelementen, sodass jedes Element sich in vereinigter
mit jedem Nachbarelement findet? Das nächstliegen-
ispiel einer Integral M_2 bilden alle solchen Elemente,
uch einen festen Punkt gehen; wir sagen der Punkt
z selbst. Das zweite Beispiel liefern alle Elemente, wel-
ine feste Raumcurve berühren. Schliesslich haben wir
Inbegriff aller Elemente, die eine feste Fläche berühren,
ntegral-M_2 anzusehen. In solcher Weise erscheinen
kt, Curve und Fläche, d.h. die Grundgebilde der alten
etrie, hier in der neuen Geometrie der Flächenelemente

coordinirt.

In der That kommen wir auf diese drei Gebilde, wenn wir unser Pfaffscher Problem $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ in der vor wenigen Stunden gegebenen Weise behandeln, um die meist ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zu finden.

a) Wir gehen zuerst aus von einer beliebigen Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ und setzen

$$p = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \quad \text{und} \quad q = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$$

Diese Gleichungen definiren dann eine erste Schaar von Integralmannigfaltigkeiten.

b) Oder wir stellen 2 Gleichungen an die Spitze $\Phi(x, y, z) = 0$ und $\Psi(x, y, z) = 0$ und setzen:

$$p = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}} \quad \text{und:} \quad q = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}},$$

wo λ einen frei veränderlichen Parameter bedeuten soll.

c) Oder endlich wir stellen 3 Gleichungen zusammen:

$\varphi(xyz) = 0$, $\psi(xyz) = 0$ u. $\chi(xyz) = 0$, und setzen

$$p = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial z}} \text{ u. } q = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial z}},$$

unter λ und μ Parameter verstanden.

Nun giebt uns die Integralmannigfaltigkeit unter a), die sich aus-

einer Gleichung $\varphi(xyz)=0$ aufbaut, die sich an eine gegebene Flä-
che anschliessenden Elemente. Der Fall b) dagegen liefert uns die Flä-
chenelemente einer Raumcurve (indem wir in jedem Punkte der Curve
$\varphi=0$, $\psi=0$ entsprechend der Einführung des willkürlichen Parame-
ters λ ein Elementenbüschel haben). Der Fall c) endlich liefert uns
einen oder mehrere Punkte mit allen ihren Flächenelementen. Die Un-
terscheidung von Punkt, Curve u. Fläche als verschiedenen Formen von
Integralmannigfaltigkeiten 2ter Dimension läuft daher genau pa-
rallel mit der Unterscheidung der verschiedenen Integrale, die wir
überhaupt beim Pfaffschen Problem von der Normalform ausge-
macht haben. Umgekehrt dürfen wir sagen, dass die Lehre von der In-
tegration der Pfaffschen Probleme hier im R_9 durch die Betrachtung der
Punkte, Curven u. Flächen unter Zugrundelegung der Flächenelemente
als Raumelemente ihre ganz gewmetrische Erläuterung findet, weitaus-
gedehnter, als es bei Zugrundelegung allein der Punkte als Raumelemen-
te möglich war.

Wir bemerken andererseits, dass diese Einteilung der Integrale M_2 in
Punkte, Curven und Flächen darin begründet liegt, dass wir die Punk-
te als Grundlage betrachten. Nehmen wir einmal die Ebene als Grund-
lage unserer Raumanschauung, dann würden wir auch wieder 3 Ar-
ten von Integral-M_2 zu untersuchen gehabt haben, die den früheren
Reihen aber nicht gleich sondern nur analog sind, nämlich: a) Alle
Elemente, die sich an eine feste Ebene anschmiegen, b) alle Elemente, die
sich an eine feste Developpable anschmiegen, c) alle Elemente, die sich
an eine Fläche anschmiegen, welche keine Developpable ist. —

Nun können wir sogleich einen Blick darauf werfen, was Berührungstransformationen sein werden. Aus jeder Integral M_1 soll wieder eine Integral M_1, aus einer Integral-M_2 wieder eine Integral M_2 werden. Von dem gewonnenen Standpunkte aus erkennen wir schon jetzt, dass es, sofern man den Punkt als Raumelement wählt, 3 Arten von Berührungstransformationen geben muss:

1) solche, welche Punkte in Punkte überführen. Das sind die alten Punkttransformationen.

2) solche, welche Punkte in Curven überführen. Dies ist etwas für uns ganz Neues.

3) solche, welche Punkte in Flächen überführen, und dafür geben die dualistischen Transformationen ein erstes Beispiel.

Hätten wir wieder die Ebenen ursprünglich als Raumelemente gewählt, so wäre eine analoge Dreiteilung der Berührungstransformationen entstanden, die aber mit der Dreiteilung vom Punktstandpunkte aus keineswegs identisch ist. —

Dass man statt der Punkte Ebenen, Geraden, Kugeln oder dergleichen als Raumelemente einführt und dadurch eventuell dem Raume eine höhere Dimension beilegt, ist ja schon lange bekannt und angewandt. Hiervon ist ja nur ein besonderer Fall, dass wir den Raum als eine M_3 von Flächenelementen ansehen. Aber dieser besondere Fall hat seine ganz besondere Bedeutung, indem wir damit Punkte, Curven und Flächen als gleichwertige Gebilde zusammenordnen. Dies ist eben der von Lie entwickelte Gedanke. Wir werden bald sehen, wie von dieser neuen Seite betrachtet sich

alles gruppenmässig ordnet, z.B. was sich auf die partielle Differentialgleichungen bezieht u.s.w.. Wir fügen jetzt unserer bisherigen Betrachtung noch einige Ergänzungen hinzu.

Zunächst: Wir wollen jede Integral M_1 überhaupt einen Streifen nennen und speciell die Schmiegungsstreifen in dem angegebenen Sinne unter ihnen aussuchen. Offenbar ist jede M_1, die auf einer Integral M_2 verläuft, ein Streifen. Doch verlaufen insbesondere auf der einzelnen Integral M_2 Schmiegungsstreifen. Wenn die Integral M_2 ein Punkt ist, so ist jeder Streifen ein Schmiegungsstreifen. Wenn die Integral M_2 eine Curve ist, so giebt es nur den einen Schmiegungsstreifen, der von den Osculationsebenen geliefert wird. Auf einer beliebigen Fläche liegen endlich 2 Schaaren von Schmiegungsstreifen, nämlich die Streifen, die sich an die Asymptotenlinien anschliessen; dies entspricht eben der Thatsache, dass die Tangentialebenen 2 zu benachbarten Punkte derselben sich in der Fortschreitungsrichtung durchschneiden.

Ferner haben wir noch von der homogenen Formulirung zu sprechen. Dieselbe wird immer dann sich gruppenmässig erweisen, wenn wir algebraische Funktionen oder Operationen vor uns haben, für die wir den ganzen Raum heranziehen. Wir sagen:

a) Das einzelne Element bekommt 8 homogene Coordinaten, 4 Verhältnissgrössen $x_1 x_2 x_3 x_4$ und 4 Verhältnissgrössen $u_1 u_2 u_3 u_4$ mit der Bedingung $u_x = 0$, die eben den Punkt und die Ebene des Elementes festlegen.

b) Wenn wir zu einem Nachbarelement übergehen, so wird für die-

ses die Bedingung $u_x = 0$ übergehen in $u_{dx} + d u_x = 0$ oder in
extenso geschrieben:

$$u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 + u_4 dx_4$$
$$+ du_1 x_1 + du_2 x_2 + du_3 x_3 + du_4 x_4 = 0.$$

c) Die Nachbarelemente befinden sich in vereinigter Lage, wenn sich die vorstehende Gleichung in zwei spaltet, wenn nämlich $u_{dx} = d u_x = 0$ ist. Diese Gleichung, bei der immer $u_x = 0$ festgehalten ist, tritt jetzt an die Stelle der Pfaff'schen Gleichung
$dz - p dx - q dy = 0$.

d) Demgegenüber erhält man als Bedingung der Schmiegungslage zweier benachbarter Elemente: $d u_{dx} = 0$.

Wir sehen, wie alle diese Gleichungen, sich übersichtlich und einfach gestalten.

e) Wie stellt sich jetzt eine Berührungstransformation dar?

Es sei $\varrho\, x_i' = \varphi_i(x_1 \dots x_4 ; u_1 \dots u_4)$
$\sigma\, \mu_i' = \psi_i(x_1 \dots x_4 ; u_1 \dots u_4)$ gesetzt.

Diese Funktionen φ_i und ψ_i müssen natürlich in den x_i und μ_i einzeln genommen homogen sein. Dann müssen dieselben zunächst die Bedingung erfüllen, dass $\varrho \cdot \sigma \cdot u'_{x'_i} = M u_x$ wird, indem wir sonst überhaupt keine Elemententransformationen vor uns haben. Ferner muss sein: $\varrho \sigma u'_{dx'} = m u_{dx}$; <u>alsdann werden wir eine Berührungstransformation haben.</u> Bei näherer Untersuchung wird man dann z. B. sich wieder fragen können, ob es ein-eindeutige Berührungstransformationen (Cremonatransformationen) gibt, etc. etc. –

Wir wenden uns nun zu dem schon oben in Aussicht genommenen

Kapitel, welches eine erneute Betrachtung der Kugelgeometrie und der Linieng eometrie zum Gegenstande haben soll. In der That haben wir ja schon oben, vor Weihnachten über beide Gebiete mancher gesagt. Doch werden wir jetzt zu einer tieferen Auffassung derselben durchdringen können, indem wir über die Begriffe der Transformation, der Gruppe von Transformationen, der Invarianten, und ganz besonders über den Begriff der Berührungstransformation verfügen. Ich werde mich der Besonderen Anschaulichkeit wegen fast ganz auf den gewöhnlichen R_3 beschränken; doch sind unsere Betrachtungen fast ausnahmslos auf den R_n zu übertragen. Wir werden uns zunächst dessen erinnern, was wir neulich über die Einführung der pentasphärischen Coordinaten $x_1, x_2 \dots x_5$ mit der Bedingung $\Lambda(x) = 0$ gesagt haben. Unsere Ueberlegung kam darauf hinaus, den Punktraum von 3 Dimensionen als stereographische Projektion der Kugel des R_4 zu betrachten und letztere dann mit projektiven Mitteln zu behandeln. Von dieser Auffassung ausgehend haben wir ins besondere ∞^{10} conforme Transformationen in R_3 gefunden, mit dem Satze von Liouville, dass es keine andern giebt. Es waren das einfach die linearen Transformationen der x, welche die quadratische Relation $\Lambda = 0$ in sich transformieren. Nun möchte ich im Anschluss hieran Ihre Aufmerksamkeit heute zunächst auf die elementare Kugelgeometrie richten (indem wir uns die höhere Kugelgeometrie für die folgende Vorlesung vorbehalten).

Die Gleichung der Kugel in pentasphärischen Coordinaten war linear in den letzteren: $\sum u_i x_i = 0$. Wir erhielten die elemen-

ses die Bedingung $u_x = 0$ übergehen in $u_{dx} + du_x = 0$ oder in extenso geschrieben:

$$u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 + u_4 dx_4$$
$$+ du_1 x_1 + du_2 x_2 + du_3 x_3 + du_4 x_4 = 0.$$

c) Die Nachbarelemente befinden sich in vereinigter Lage, wenn sich die vorstehende Gleichung in zwei spaltet, wenn nämlich $u_{dx} = du_x = 0$ ist. Diese Gleichung, bei der immer $u_x = 0$ festgehalten ist, tritt jetzt an die Stelle der Pfaff'schen Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$.

d) Demgegenüber erhält man als Bedingung der Schmiegungslage zweier benachbarter Elemente: $du_{dx} = 0$.

Wir sehen, wie alle diese Gleichungen, sich übersichtlich und einfach gestalten.

e) Wie stellt sich jetzt eine Berührungstransformation dar?

Es sei $\rho\, x_i' = \varphi_i(x_1 \ldots x_4;\ u_1 \ldots u_4)$

$\sigma\, u_i' = \psi_i(x_1 \ldots x_4;\ u_1 \ldots u_4)$ gesetzt.

Diese Funktionen φ_i und ψ_i müssen natürlich in den x_i und u_i einzeln genommen homogen sein. Dann müssen dieselben zunächst die Bedingung erfüllen, dass $\underline{\rho \cdot \sigma \cdot u'_{x'} = M u_x}$ wird, inde[illegible] sonst überhaupt keine Elemententransformationen vor uns ha[illegible] ner muss sein: $\underline{\rho\, \sigma\, u'_{dx'} = m\, u_{dx}}$; alsdann werden wi[illegible] rührungstransformation haben. Bei nähere[illegible] tersuch[illegible] man dann z. B. sich wieder fragen könne[illegible] ein- [illegible] Berührungstransformationen (Cremona[illegible] natio[illegible] Wir wenden uns nun zu dem schon [illegible] tussic[illegible]

welches eine erneute Betrachtung der Kugelgeometrie und der
metrie zum Gegenstande haben soll. In der That haben wir ja
n vor Weihnachten über beide Gebiete manches gesagt. Doch
wir jetzt zu einer tiefern Auffassung derselben durchdringen
indem wir über die Begriffe der Transformation, der Gruppe
sformationen, der Invarianten, und ganz besonders über den
er Berührungstransformation verfügen. Ich werde mich der
n Anschaulichkeit wegen fast ganz auf den gewöhnlichen
ränken; doch sind unsere Betrachtungen fast ausmahnes-
den R_n zu übertragen. Wir werden uns zunächst dessen
, was wir neulich über die Einführung der pentasphari-
rdinaten $x_1\, x_2 \cdots x_5$ mit der Bedingung $\Omega(x) = 0$ gesagt
Unsere Ueberlegung kam darauf hinaus, den Punktraum von
sionen als stereographische Projektion der Kugel des R_4 zu
n und letztere dann mit projektiven Mitteln zu behan-
dieser Auffassung ausgehend haben wir insbesondere ∞^{10}
Transformationen in R_3 gefunden, mit dem Satze von
e, dass es keine andern giebt. Es waren das einfach die li-
nationen der x, welche die quadratische Relation
transformieren. Nun möchte ich im Anschluss
fmerksamkeit heute zunächst auf die elementare
richten (indem wir uns die höhere Kugelgeome-
lgende Vor[illegible] vorbehalten).
g der Ku[illegible] tasphärischen Coordinaten war
n letzt[illegible] $x_i = 0$. Wir erhielten die elemen-

ses die Bedingung $u_x = 0$ übergehen in $u_{dx} + du_x = 0$ oder in extenso geschrieben:

$$u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 + u_4 dx_4 + du_1 x_1 + du_2 x_2 + du_3 x_3 + du_4 x_4 = 0.$$

c) Die Nachbarelemente befinden sich in vereinigter Lage, wenn sich die vorstehende Gleichung in zwei spaltet, wenn nämlich $u_{dx} = du_x = 0$ ist. Diese Gleichung, bei der immer $u_x = 0$ festgehalten ist, tritt jetzt an die Stelle der Pfaff'schen Gleichung $dz - p dx - q dy = 0$.

d) Demgegenüber erhält man als Bedingung der Schmiegungslage zweier benachbarter Elemente: $du_{dx} = 0$.

Wir sehen, wie alle diese Gleichungen, sich übersichtlich und einfach gestalten.

e) Wie stellt sich jetzt eine Berührungstransformation dar?

Es sei $\varrho\, x_i' = \varphi_i(x_1 \dots x_4 ; u_1 \dots u_4)$

$\sigma\, u_i' = \psi_i(x_1 \dots x_4 ; u_1 \dots u_4)$ gesetzt.

Diese Funktionen φ_i und ψ_i müssen natürlich in den x_i und u_i einzeln genommen homogen sein. Dann müssen dieselben zunächst die Bedingung erfüllen, dass $\varrho \cdot \sigma \cdot u'_{x'_1} = M u_x$ wird, indem wir sonst überhaupt keine Elemententransformationen vor uns haben. Ferner muss sein: $\varrho \sigma u'_{dx'} = m u_{dx}$; <u>alsdann werden wir eine Berührungstransformation haben.</u> Bei näherer Untersuchung wird man dann z. B. sich wieder fragen können, ob es ein-eindeutige Berührungstransformationen (Cremonatransformationen) gibt, etc. etc. -

Wir wenden uns nun zu dem schon oben in Aussicht genommenen

Kapitel, welches eine erneute Betrachtung der Kugelgeometrie und der Liniengeometrie zum Gegenstande haben soll. In der That haben wir ja schon oben, vor Weihnachten über beide Gebiete mancherlei gesagt. Doch werden wir jetzt zu einer tieferen Auffassung derselben durchdringen können, indem wir über die Begriffe der Transformation, der Gruppe von Transformationen, der Invarianten, und ganz besonders über den Begriff der Berührungstransformation verfügen. Ich werde mich der besseren Anschaulichkeit wegen fast ganz auf den gewöhnlichen R_3 beschränken; doch sind unsere Betrachtungen fast ausnahmslos auf den R_n zu übertragen. Wir werden uns zunächst dessen erinnern, was wir neulich über die Einführung der pentasphärischen Coordinaten $x_1, x_2 \dots x_5$ mit der Bedingung $\Omega(x) = 0$ gesagt haben. Unsere Ueberlegung kam darauf hinaus, den Punktraum von 3 Dimensionen als stereographische Projektion der Kugel des R_4 zu betrachten und letztere dann mit projektiven Mitteln zu behandeln. Von dieser Auffassung ausgehend haben wir insbesondere ∞^{10} conforme Transformationen in R_3 gefunden, mit dem Satze von Liouville, dass es keine anderen giebt. Es waren das einfach die linearen Transformationen der x, welche die quadratische Relation $\Omega = 0$ in sich transformieren. Nun möchte ich im Anschluss hieran Ihre Aufmerksamkeit heute zunächst auf die elementare Kugelgeometrie richten (indem wir uns die höhere Kugelgeometrie für die folgende Vorlesung vorbehalten).

Die Gleichung der Kugel in pentasphärischen Coordinaten war linear in den letzteren: $\sum u_i x_i = 0$. Wir erhielten die elemen-

lare Kugelgeometrie, wenn wir die hier auftretenden Coefficienten u_i als die homogenen Coordinaten der Kugel betrachteten.

Die elementare Kugelgeometrie kommt daher darauf hinaus, neben den Coordinaten x_i contragrediente u_i einzuführen, d.h. auch im Gebiete der pentasphärischen x_i das Princip der Dualität zu Geltung zu bringen. Wir können natürlich auch sagen, dass die Kugeln im R_3 die stereographischen Bilder sind für die ebenen Schnitte des im R_4 gelegenen Fundamentalkugel.

Wir werden nun leicht den Ausdruck zum Gebrauch der Coordinaten u_i erhalten, wenn wir uns fragen, wann sich die Kugel u_i im R_3 auf einen Punkt zusammenzieht? Offenbar wird dies dann der Fall sein, wenn die Schnittebene des R_4 die Fundamentalkugel desselben gerade berührt. Indem nun die Gleichung der Kugel im R_4 durch $\Omega = \sum a_{ik} x_i x_k = 0$ gegeben wird, (wobei wir eingangs beliebiger Coordinatensystem zu Grunde gelegt denken), erhalten wir die Bedingung für die Punktkugeln des R_3 durch das Nullsystem der geränderten Determinante =

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{15} & u_1 \\ \vdots & & & \\ a_{51} & \cdots & a_{55} & u_5 \\ u_1 & \cdots & u_5 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dem diese Gleichung stellt uns die Fundamentalkugel in Ebenencoordinaten dar. Diese Gleichung steht im Mittelpunkte der elementaren Kugelgeometrie, wir hatten dieselbe vor Weihnachten erst in dem speciellen Falle kennen gelernt, dass nur die Quadrate in der Glei-

hung $\Omega = 0$ vorkamen, $\sum x_i^2 = 0$.
ndem nun die Coordinaten u_i sich linear substituiren, wenn
in Gleicher für die x_i der Fall ist, so haben wir weiter den Satz:
e ∞^{10} conformen Transformationen der R_3 erscheinen als diejeni-
n linearen Transformationen der u_i, welche die Gleichung
$= 0$ in sich selbst überführen. Hieraus gewinnen wir die schär-
re Definition der elementaren Kugelgeometrie als der Lehre
on solchen Eigenschaften der aus Kugeln gebildeten Figu-
n, welche bei der 10 gliedrigen Gruppe der genannten linearen
ransformation invariant sind.
ir werden heute die entsprechenden Formulirungen [Fr. 17. II. 93.]
ü die höhere Kugelgeometrie zu behandeln haben. Wir wollen
esselbe zunächst in der elementaren Weise einführen, wie wir es
ieher gethan haben. Damals gingen wir von der Gleichung der
ugel in rechtwinkligen Coordinaten aus:

$$(x^2 + y^2 + z^2) - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + C = 0,$$

nd ergab sich der Radius der Kugel gleich $r = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-C}$.
ir machen ausdrücklich wiederholt auf das doppelte Vorzei-
hen desselben aufmerksam; diese Zweideutigkeit wird sich durch
ie ganze Theorie hindurchziehen. Kugelcoordinaten sollten nun
icht mehr $\alpha\ \beta\ \gamma$ u. C sondern $\alpha\ \beta\ \gamma\ C$ u. r sein, wobei zwi-
chen denselben die Relation besteht: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2-C=0$.
rade in der hinzunahme des r als weiteren Coordinate ist
e höhere Standpunkt charakterisiert. Wir haben dann noch
e homogene Form eingeführt, indem wir setzen:

$\alpha = \frac{\xi}{r}$, $\beta = \frac{\eta}{r}$, $\gamma = \frac{\zeta}{r}$, $\varkappa = \frac{\varkappa}{r}$, $\varrho = \frac{\lambda}{r}$, worauf wir $\xi : \eta : \zeta : \lambda : \mu : r$ als homogene Coordinaten der Kugel in der höheren Kugelgeometrie ansahen, welche an die Bedingungsgleichung 2ten Grades geknüpft sind $\psi = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \lambda^2 - \mu^2 r = 0$.

An diese Gleichung schloss sich dann, wie wir auch bereits lernten, das Ueberieren mit unseren Kugelcoordinaten an. So ergiebt z.B. die Polarengleichung:

$$2\xi\xi' + 2\eta\eta' + 2\zeta\zeta' - \lambda\lambda' - \mu r' - \mu' r = 0$$

die Bedeutung für die Berührung zweier Kugeln. Diese Polarengleichung steht zu $\psi = 0$ in einer durch lineare Transformation unzerstörbaren Beziehung.

Von unserem erweiterten Standpunkte, der sich auf den Begriff der Gruppe und Invarianten aufbaut, werden wir jetzt überhaupt die folgende Definition an die Spitze stellen können: Die höhere Kugelgeometrie beschäftigt sich mit denjenigen Eigenschaften irgendwelcher aus Kugeln gebildeter Figuren, welche invariant bleiben bei den ∞^{15} vielen linearen Transformationen der 6 homogenen Variablen $\xi\ \eta\ \zeta\ \lambda\ \mu\ r$, bei denen die Gleichung $\psi = 0$ in sich übergeht.

Neben die so geschilderte Einführung der höheren Kugelgeometrie von den gewöhnlichen rechtwinkeligen Punktcoordinaten stellt sich die allgemeinere, die gleich von beliebigen pentasphärischen Punktcoordinaten beginnt. Die Gleichung der Kugel ist doch in letzteren gegeben durch $u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots u_5 x_5$. Die Coefficienten u_i haben wir dann geradezu als Coordinaten

der Kugel eingeführt und so die niedere Kugelgeometrie gewonnen. Nun ergiebt sich der Radius der Kugel

$$r = \pm \frac{\sqrt{\Phi(u_1 \ldots u_5)}}{\Sigma c_i u_i},$$

woselbst $\Phi = 0$ die Bedingung für die Punktkugel ist, $\Sigma c_i u_i = 0$ dagegen die Bedingung, dass die Kugel ∞ ferne Punkte enthält, d.h. in eine Ebene übergeht. Wir werden nun einfach eine 6te homogene Variable einführen können, indem wir setzen: $u_6 = \sqrt{\Phi(u_1 \ldots u_5)}$, so dass $r = \frac{u_6}{\Sigma c_i u_i}$. Dadurch dass wir diese 6te Coordinate zu den Kugelcoordinaten $u_1 \ldots u_5$ der niederen Kugelgeometrie hinzunehmen, steigen wir zur höheren Kugelgeometrie auf. Dabei besteht als Bedingungsgleichung zwischen den 6 Coordinaten die Relation: $\psi = (u_6^2 - \Phi(u_1 \ldots u_5)) = 0$. Das eigentliche Wesen der höheren Kugelgeometrie besteht im Zusammenhange hiermit darin, dass wir eine grössere Mannigfaltigkeit von Umformungen in Betracht ziehen. Die Gruppe der höheren Kugelgeometrie besteht jetzt nämlich aus allen linearen Substitutionen der Variablen $u_1 \ldots u_6$, welche $\psi = 0$ in sich überführen. Während die Gruppe der niederen Kugelgeometrie ∞^{10} Substitutionen umfasst, enthält die Gruppe der höheren Kugelgeometrie 15fach ∞ viele Substitutionen. Und zwar ist erstere in der letzteren als Untergruppe enthalten, wie man aus der Gegenüberstellung der Gleichungen $\Phi = 0$ u. $\psi = 0$ erkennt. Nun wollen wir sehen, mit welchen geometrischen Vorstellungen wir diese analytische Einführung der höheren Kugelgeometrie

leiten können. Wir knüpfen wieder an einen früher
Gedanken an. Wir sagten damals, wir wollen der Kugel mit den
Mittelpunktskoordinaten α, β, γ und Radius R einen Punkt
R_4 gegenüberstellen mit den rechtwinkligen Coordinaten $x=\alpha$,
$y=\beta$, $z=\gamma$ und $t=ir$. Diese Beziehung zwischen den Kugeln
des R_3 und den Punkten des R_4 (die eine Transformation mit
Wechsel der Raumelemente ist) wollen wir jetzt etwas weiter ver-
folgen. Die Bedingung für 2 sich berührende Kugeln ist bekannt —
lich: $(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2-(r-r')^2=0$.
Dies besagt für die entsprechenden Punkte im 4 dimensionalen
Raume: $(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2+(t-t')^2=0$.
Wir haben daher (wie wir ebenfalls schon früher ausführten),
dass zwei Kugeln, welche sich berühren, 2 Punkte liefern, die
eine verschwindende Entfernung haben, d.h. auf einer Minimal-
geraden liegen. Wir wollen diese Beziehung zwischen beiden Räu-
men jetzt noch unmittelbarer geometrisch auffassen. Wir können
doch von einem beliebigen Punkte P im R_4 nach dem Kugelkreise
desselben den Minimalkegel ziehen, dessen Erzeugende Minimal-
geraden sind, und diesen letzteren wollen wir dann mit dem
R_3 schneiden. Ich behaupte dann, dass die Zuordnung vom
Punkte des R_4 und der Kugel im R_3, wie sie durch obige For-
mel gegeben wird, geometrisch einfach dadurch vermittelt wird,
dass die Kugel des R_3 der Schnitt ist, welchen der R_3 mit dem
Minimalkegel gemein hat, der vom Punkte des R_4 ausläuft.
Es ist sofort analytisch nachzuweisen. Die Gleichung des

Minimalkegels vom Punkte x, y, z, t des R_4 ist in laufenden Coordinaten $x' y' z' t'$:

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2+(t'-t)^2=0.$$

Diesen Minimalkegel schneiden wir mit unserem R_3, der durch die Gleichung $t'=0$ gegeben ist. Dann erhalten wir:

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2+t^2=0 \text{ als Projektion oder}$$

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2-r^2=0. \quad q.\,e.\,d.$$

Den so gefundenen Zusammenhang zwischen den Punkten des R_4 und den Kugeln des R_3 wollen wir weiterhin die Minimalprojektion des R_4 auf den R_3 nennen, um eine kurze Bezeichnung zu haben.

Nun gehen wir weiter: Wir haben doch neben α, β, γ, r noch die Coordinate C mit der Identität $C=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2$ hinzugenommen und dann homogen gesetzt:

$$\alpha=\frac{\xi}{\nu}, \quad \beta=\frac{\eta}{\nu}, \quad \gamma=\frac{\zeta}{\nu}, \quad C=\frac{\mu}{\nu}, \quad r=\frac{\lambda}{\nu}.$$

Dasselbe wollen wir jetzt für die Punktcoordinaten des R_4 ausführen und uns fragen, was die 6 homogenen Coordinaten der Kugel im R_3 für den gehörigen Punkt des R_4 bedeuten. Wir hatten $\alpha=x, \beta=y, \gamma=z, r=\frac{t}{i}$ gesetzt und nehmen nun noch $C=x^2+y^2+z^2+t^2$ hinzu. Dann sei, indem wir homogen machen:

$$x=\frac{x_1}{x_6}, \quad y=\frac{x_2}{x_6}, \quad z=\frac{x_3}{x_6}, \quad t=\frac{x_4}{x_6} \quad \text{und} \quad x^2+y^2+z^2+t^2=\frac{x_5}{x_6}.$$

Die Bedingungsgleichung zwischen den 6 homogenen Coordina-

ten nimmt dann die Form an: $x_5 x_6 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Nun zeigt sich sofort, dass die homogenen Coordinaten $x_1 \ldots x_6$ mit der letzten Bedingung sich als hexasphärische Coordinaten erweisen. Aber aus unseren $\xi\ \eta\ \zeta\ \lambda\ \mu\ \nu$ ergeben sich die allgemeinen Coordinaten $u_1 \ldots u_6$ der höheren Kugelgeometrie durch beliebige lineare Substitution und ebenso aus den $x_1 \ldots x_6$ die allgemeinsten hexasphärischen Punktcoordinaten des R_4 durch beliebige lineare Substitution. Daher:

Die Einführung der 6 homogenen Coordinaten für die Kugeln des R_3 kommt darauf hinaus, die Punkte im R_4 durch hexasphärische Coordinaten festzulegen und dann diese Punkte durch Kleinmulprojektion auf die Kugeln des R_3 zu beziehen. Indem ferner beidemal die quadratische Relation $\psi = 0$ bei den linearen Substitutionen der 6 homogenen Coordinaten unverändert bleiben soll, so ergibt sich weiter der Satz: Die ∞^{15} linearen Transformationen der 6 homogenen Coordinaten, die wir bei der höheren Kugelgeometrie des R_3 zu Grunde legen wollen, erscheinen einfach als Abbild der ∞^{15} conformen Transformationen, welche der Punkt-Raum von 4 Dimensionen gestattet. Man erinnere sich endlich, dass die Punkte des R_4 beim Gebrauch hexasphärischer Coordinaten als stereographisches Bild der Punkte einer Kugel im R_5 zu gelten haben. Daraufhin werden wir jetzt folgenden Satz aufstellen können: Höhere Kugelgeometrie im R_3 kommt darauf hinaus, die Kugeln des R_3 als das Abbild der Punkte einer im R_5 gelegenen Kugel

aufzufassen und diese letztere Kugel in gewöhnlichem projektivem Sinne zu studiren. Wir wollen dieses Schlussergebniss ganz allgemein für höhere Räume noch einmal wiederholen. Im R_{n+2} sei eine feste Kugel gegeben; dieselbe behandeln wir projektiv und bestimmen so eine Gruppe von $\infty^{\frac{(n+3)(n+4)}{2}}$ linearen Umformungen von $n+3$ homogenen Coordinaten. Diese Kugel wird dann stereographisch auf die Punkte des R_{n+1} bezogen, worauf wir letztere Räume eliminalprojektion auf die Kugeln des R_n beziehen. Wir haben dann im R_{n+1} $(n+3)$ polysphärische Punktcoordinaten und die zugehörige Gruppe der $\infty^{\frac{(n+2)(n+3)}{2}}$ conformen Transformationen. Im R_n aber haben wir $(n+3)$ Kugelcoordinaten und $\infty^{\frac{(n+3)(n+4)}{2}}$ Kugeltransformationen, deren geometrische Bedeutung noch näher darzulegen bleibt. —

Wir wollen uns den Zusammenhang zwischen der höheren Kugelgeometrie des R_n und der conformen Punktgeometrie des R_{n+1} jetzt noch näher führen, indem wir geradezu entsprechende Gebilde in beiden Räumen einander gegenüber stellen. Und zwar beschränken wir uns auf die niedrigsten Fälle des n, für die unsere Raumanschauung wenigstens, was die Kugelgeometrie betrifft, noch ausreicht. Es sei zunächst $n=2$; wir haben dann die Kreise der Ebene als die Kugeln des R_2 den Punkten des gewöhnlichen Raumes in Minimalprojektion entsprechend zu setzen. Im Raume haben wir die Gruppe der ∞^{10} conformen Punkttransformationen, die sich auf die Ebene als ebensoviele vorläufig ihrem Wesen nach noch unbekannte Kreistransformationen übertragen.

[Mo. 20. II. 93]

Wir wollen

im Einzelnen diese Beziehung durch einige Sätze skizzieren und übrigens auffordern die hier hervortretenden Verhältnisse (wie überhaupt die sämmtlichen Gegenstände, mit denen wir uns g.Z. beschäftigen) womöglich eingehender systematischer zu bearbeiten, als es bis jetzt geschehen ist.

Zunächst erkennen wir:

Den Flächen des R_3 werden Kreiscomplexe des R_2, den Curven des R_3 Kreisreihen des R_2 entsprechen. Insbesondere wird eine Kugel des R_3 sich als linearer Kreiscomplex des R_2 abbilden. Wir fanden schon früher, dass dies diejenige Kreisschaar ist, deren Kreise einen festen Grundkreis unter gegebenem festen Winkel schneiden. Geht insbesondere die Kugel des R_3 in eine Punktkugel über, so bekommen wir im R_3 einen „speciellen" linearen Kreiscomplex, d.h. die Berührungskreise eines Grundkreises. Durch einen Kreis im R_3 gehen immer 2 Punktkugeln, den Punkten des Kreises entsprechen also alle Kreise des R_2, welche 2 Grundkreise berühren. — Aus einer Minimalgeraden des R_3 erhalten wir ein Kreisbüschel des R_2 mit gemeinsamem Curvenelement, d.h. die Schaar aller sich in dem gleichen Punkte berührenden Kreise. Umgekehrt können wir geradezu sagen, dass jedem Curvenelement des R_2 eine Minimalgerade des R_3 entspricht. Diesem Satze haben wir unsere besondere Aufmerksamkeit, der späteren Anwendung wegen, zuzuwenden. Nun möge in R_3 eine Minimalcurve vorliegen, die dadurch definirt ist, dass je 2 aufeinanderfolgende Punkte eine verschwindende Entfernung haben. Ihr steht im R_2 eine

einreihegegenüber, mit der speciellen Eigenschaft, dass je 2 auf-
anderfolgende Kreise sich berühren. Wir wollen dementsprechend
einer Berührungsreihe von Kreisen des R_2 sprechen. Wir erhal-
eine solche Berührungsreihe, wenn wir bei irgend einer Curve
R_2 in den aufeinanderfolgenden Punkten Krümmungs-
se construiren. Wir haben daher hier ein interessantes Bei-
el, wie bei dieser Uebertragung der Gebilde des R_3 auf den R_2
letzteren immer ohnedies in der Geometrie wichtige Gebil-
sich ergeben. Nun gehört weiter zu jeder Minimalcurve des
eine Minimaldeveloppable, die von den Tangenten der ersten
n gebildet wird. Dieselbe giebt offenbar einen speciellen Kreis-
plex, der aus der Gesammtheit der Berührungskreise einer ebe-
Curve besteht; die Rückenkante der Minimaldeveloppable
t dabei insbesondere die Reihe der Krümmungskreise. Wir
len des Ferneren die Verticalprojektion der Minimalcurve
R_3 auf die $x\,y$-Ebene betrachten. Jeder Punkt der Curve
ört uns gerade den Mittelpunkt des correspondirenden Krei-
der Krümmungskreises der ebenen Curve. Hiergiebt den Satz:
Verticalprojektion der Minimalcurve auf die Ebene $z=0$ giebt
ekt die Evolute der ebenen Curve. Nun können wir offenbar
Minimalcurve auf ihrem verticalen Cylinder beliebig ver-
iben. Den ∞ vielen Lagen der zugehörigen Minimaldeve-
ppablen entsprechen dann unendlich viele Curven der Ebene,
che dieselbe Evolute haben, d. h. die unendliche Schaar der
uten der nämlichen Evolute.

Ferner sei eine beliebige Fläche im R_3 gegeben. Auf ihr verlaufen doch 2 Schaaren von Minimalcurven. Dem gewiss wichtigen Problem ihrer Bestimmung entspricht in der Ebene die Aufgabe, die beiden Curvenschaaren zu finden, deren Krümmungskreise dem ebenen Kreiscomplex angehören der durch die Fläche im R_3 bestimmt wird. Nun gibt es auf der Fläche immer besondere Punkte, in denen die Minimalrichtungen auf derselben zusammenfallen. Man kann ja stets um den Kugelkreis und die gegebene Fläche eine gemeinsame Developpable legen, welche auf der Fläche eine Berührungscurve gibt. Die Punkte der letzteren sind offenbar die Punkte der genannten Eigenschaft. Nun gilt der interessante Satz, den Darboux zuerst ausgesprochen hat, dass diese Berührungscurve allemal eine Krümmungscurve ist, indem die bezüglichen Flächennormalen mit den Erzeugenden der Developpablen zusammenfallen und daher gewiss eine Developpable bilden. Was entspricht dieser Curve aber im R_2? Im allgemeinen hat jeder Kreis eines ebenen Complexes 2 berührende Nachbarkreise. Für den Punkten dieser Berührungscurve entsprechenden Kreise haben jedoch jedesmal nur einen berührenden Nachbarkreis im Complex. Diese besonderen Kreise pflegt man als singuläre Kreise des Complexes zu bezeichnen. Das Element, in welchem ein solcher Kreis von einem Nachbarkreise des Complexes berührt wird, nennen wir das zugehörige singuläre Element. Diesem Elemente entspricht in dem früher discutirten, dargelegten Sinne die Erzeugende unserer Deve-

developpable. In dem diese Erzeugenden in ihrer Aufeinanderfolge die Developpable bilden, werden sich die auf einander folgenden singulären Elemente zu einer Curve zusammenschliessen, welche man die singuläre Curve des Complexes nennt. Die sämmtlichen singulären Kreise des Complexes berühren die letztere je in ihrem singulären Elemente —. In analoger Weise können wir auch an eine gegebene Raumcurve anknüpfen. Durch dieselbe kann man immer eine Minimaldevelopp. legen, [welche die Curve zur Doppelcurve hat]; man braucht nur eine Ebene sich so bewegen zu lassen, dass sie gleichzeitig die Raumcurve und den Kugelkreis berührt. Hieraus folgt: Jede Kreisreihe des R_2 hat eine Umhüllungscurve, welche von jedem Kreise der Reihe zweimal berührt wird. Wieder wird man fragen, wann die beiden Berührungspunkte des einzelnen Kreises zusammenfallen mögen, etc. etc. — Diese Beispiele, welche sich auf die Kreiscomplexe und Kreisreihen der Ebene beziehen, lassen sich nun leicht noch beliebig fortsetzen, indem man irgendwelche geometrische Verhältnisse von Curven und Flächen des R_3 als Ausgangspunkt nimmt, die sich bei der Gruppe der conformen Transformationen nicht ändern und dieselben auf den R_2 überträgt. So kann man z. B. die Krümmungslinien auf den Flächen wählen, oder orthogonale Systeme von Flächen, für die dann das Dupin'sche Theorem gelt, dass die letzteren sich in ihren Krümmungscurven durchdringen. Das allgemeinste System dieser Art, welches wir kennen lernten, waren die confocalen Cycliden. Stets können wir uns fragen, was entspricht diesen Gebilden im R_2? Wir können das hier leider nicht ausführen.

Wir werden uns vielmehr dazu, die Gruppe der hier in Betracht kom-

menden Transformationen zu betrachten. Im R_3 haben wir ∞^{15} Transformationen, die jeden Punkt wieder in einen Punkt überführen; ebensoviele Transformationen haben wir also im R_2, die jeden Kreis wieder einem Kreise entsprechen lassen. Indem die Raumtransformationen zugleich conform sind, gehen Minimalgeraden des R_3 wieder in Minimalgeraden über. Dies besagt in der Ebene, dass Kreise die sich in einem Element berühren, diese Eigenschaft bei der Transformation behalten. Mit anderen Worten: Aus jedem Curvenelement entsteht ein neues Curvenelement (indem wir doch das Element als Träger eines Kreisbüschels ansehen können); wir haben daher jedenfalls eine Elemententransformation. Nun bleiben ferner Minimaldevelopp. im R_3 auch wieder Minimaldevelopp. Die Minimalgeraden, welche die Erzeugenden derselben bilden, liefern aber alle Curvenelemente, die in ihrer Aufeinanderfolge sich einer festen Curve anschmiegen. Also wird im R_2 aus jeder Curve eine neue Curve, oder Elemente in vereinigter Lage liefern wieder Elemente in vereinigter Lage. Wir haben daher das richtige Resultat: Die ∞^{10} Kreistransformationen, welche wir bei der höheren Kreisgeometrie der Ebene zu betrachten haben, sind sämmtlich Berührungstransformationen.

Nun besagt doch der Liouville'sche Satz, dass es überhaupt nur jene ∞^{10} conformen Punkttransformationen giebt, die unsere Gruppe ausmachen. Bei der Beziehung des R_3 auf den R_2 wird aber eine jede Punkttransformation des R_3 eine entsprechende Kreistransformation des R_2 liefern, und umgekehrt. Insofern nun Kreise im R_2 die sich berühren, wieder in solche Kreise übergehen sollen, – denn dies verlangt eine

jede Berührungstransformation – müssen in R_3 Minimalgerade in Minimalgerade übergehen, d. h. im R_3 haben wir notwendig eine conforme Transformation. Unsere ∞^{10} Kreistransformationen sind daher nicht nur Beispiele für Berührungstransformationen, sondern es sind überhaupt die einzigen Kreistransformationen, welche Berührungstransformationen vorstellen. Wir wollen doch noch einige Einzelheiten, diese Transformationen betreffend, anschliessen. Im R_3 wird der einzelne Punkt durch die Coordinaten x, y, z, im R_2 der einzelne Kreis durch die Mittelpunktcoordinaten α β und den Radius r festgelegt. Wir setzen dann $\alpha = x$, $\beta = y$, $r = z$. Lassen wir nun zunächst die z-Coordinate (oder doch die Ebene $z = 0$) des R_3 unverändert und beachten die folgenden Substitutionen:

a) $\left.\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + b. \end{aligned}\right\}$ Diese Parallelverschiebung des R_3 wird im R_2 einfach eine entsprechende Verschiebung bedeuten, wie sie die Formel:

$$\alpha' = \alpha + a$$
$$\beta' = \beta + b \quad \text{angiebt.}$$

b) $\left.\begin{aligned} x' &= \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y, \\ y' &= -\sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y. \end{aligned}\right\}$ (Drehung des R_3 um die z-Axe).
Dieser Substitution entspricht wieder eine entsprechende Drehung der Ebene α, β.

c) $\left.\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= +y \end{aligned}\right\}$ Dieser Spiegelung des R_3 an der yz-Ebene steht eine analoge Spiegelung des R_2 gegenüber.

d) $\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ y' &= \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ z' &= \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}\right\}$ Diese Substitution des R_3 (die Inversion vom Coordinatenanfangspunkte aus) wird im R_2

eine entsprechende Inversion geben, nämlich diejenige, die in Punktcoordinaten α, β durch die Formeln gegeben ist:

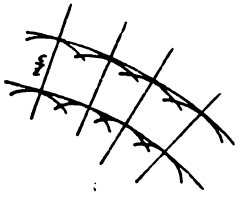
$$\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \beta = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \cdot -$$

Diese Beispiele geben uns im R_2 immer wieder die alten Transformationen. Doch lassen wir nun auch die 2 Coordinaten sich ändern. Es sei

e). $x' = x, \; y' = y, \; z' = z + c$. ($c$ sei reell, imaginär oder complex).

Dieser Substitution entspricht im R_2:

$\alpha' = \alpha, \beta' = \beta, \; r' = r + \frac{c}{i}$; d.h. die Mittelpunkte der Kreise bleiben unverändert, jedoch ihr Radius wird um $\frac{c}{i}$ vergrössert. Man nennt diese Transformation der Ebene eine Parallelkransformation. Dieselbe ist aus den Anwendungen der Differentialrechnung auf ebene Curven, wie sie in den Lehrbüchern gegeben werden, wohl bekannt. Wir denken uns in den Punkten einer ebenen Curve die Normalen construiert und dann auf diese eine bestimmte endliche Strecke in demselben Sinne abgetragen; wir erhalten in solcher Weise eine zur ersten, parallele Curve.



Dieselbe ist in der That die Umhüllungscurve aller Kreise, die sich aus den Berührungskreisen der gegebenen Curve ergeben, wenn man ihre Mittelpunkte festhält und ihre Radien um die gegebene Strecke vergrössert resp. verkleinert.

f.) Eine sehr merkwürdige Transformation des R_2 ist dann schliesslich diejenige, welche einer Drehung des R_3 um die x-Axe resp.

dar entspricht: $x' = x,\ y' = \cos\varphi . y + \sin\varphi . z,\ z' = -\sin\varphi . y + \cos\varphi . z$,
ich nicht weiter betrachten will. Es wird nun leicht zu zeigen
n, dass die hier angeführten Substitutionen von x, y, z zusammen
ganze Gruppe der ∞^{10}-fach ∞ vielen conformen Umformungen
ugen. Wir wollen nun in Kürze entsprechende Betrachtungen
die Beziehung der conformen Punktgeometrie des R_4 auf die hö-
Kugelgeometrie des R_3 machen. Wir greifen indess nur einzelne
spiele heraus:
e Minimalgeraden des R_4 entspricht im R_3 ein Kugelbüschel,
ein Flächenelement. Einer Minimalcurve (d. h. eine Minimal
) im R_4 entspricht eine Berührungsreihe von Kugeln im R_3,
em je 2 Nachbarkugeln dieser Schaar sich berühren. Wir fragen
gleich, welche charakteristische Eigenschaft die Reihe der auf-
anderfolgenden Flächenelemente darbietet, welche den Tangen-
der Minimalcurve entsprechen. Dieselben bilden einen „Strei-
" in dem früher erklärten Sinne, bei dem die Normalen zweier
inanderfolgenden Elemente sich schneiden. Einen solchen Strei-
wollen wir demnach einen Krümmungsstreifen nennen.
Minimalcurve des R_4 liefert daher einen Krümmungsstreifen
R_3. Eine Kugel im R_4 liefert ferner im R_3 einen linearen
elcomplex. Derselbe ist definiert, wie wir von früher wissen,
die Gesammtheit aller Kugeln, die eine feste Kugel unter con-
ntem Winkel schneiden. Derselbe geht insbesondere in einen
ellen Complex über, d. h. in die Gesammtheit aller eine Grund-
el berührenden Kugel, wenn die Kugel des R_4 zur Punktku-

gel wird. Wenn wir eine beliebige M_3 des R_4 übertragen, so erhalten wir im R_3 einen allgemeinen Kugelcomplex: Die beliebige M_3 des R_4 hat nun in jedem ihrer Punkte ihre Tangentialebene, (Die natürlich gleichfalls eine M_3 ist); diese liefert uns im R_3 einen besonderen linearen Kugelcomplex, den wir einen Tangentialcomplex des gegebenen Complexes nennen wollen, und der diesem Complex in einer seiner Kugeln berührt. Dieser hat seine specielle Bedeutung, wenn wir auf Berührungsverhältnisse achten. Die Frage, ob es in dem allgemeinen Complex zu einer gegebenen Kugel Nachbarkugeln gibt, welche sie berühren, ist identisch mit der analogen Frage, ob es auf der M_3 im R_4 zu einem gegebenen Punkte solche gibt, die von ihm eine verschwindende Entfernung haben. Indem nun ∞^1 Punkte der letzteren Eigenschaft zu jedem Punkte der M_3 vorhanden sind, besitzt jede Kugel des Complexes ∞^1 Nachbarkugeln, die sie berühren. Dabei genügt es offenbar, die M_3 in Bezug auf den ausgewählten Punkt, den wir betrachten wollen, durch die Tangentialebene in letzterem zu ersetzen. Dieser entspricht dann im R_3 ein Tangentialcomplex, dessen sämmtliche Kugeln eine bestimmte Grundkugel unter Konstantem Winkel schneiden. Den Schnittkreis einer Kugel eines linearen Complexes mit der zugehörigen Grundkugel wollen wir allgemein als Trajectorienkreis der Complexkugel bezeichnen. Diejenigen Kugeln eines linearen Complexes, welche eine einzelne Kugel des Complexes berühren, berühren dieselbe in einem Punkte ihres Trajectorienkreises. Alle diese Sätze übertragen sich auf den beliebigen Complex, sofern wir uns auf Nachbarkugeln der

gebnen Complexe Kugeln beschränken. Wir sagen: Jede Complex-
el hat ihren Trajektorienkreis, und weiter, indem wir von dem Be-
ff der Flächenelemente Gebrauch machen: Die einzigen Flächen-
mente, welche eine Kugel mit ∞ nachbarkugeln des Complexes gemein hat,
d die Flächenelemente ihres Trajektorienkreises.
n kann für specielle Kugeln unseres Complexes der lineare Tangentialcom-
plex speciell werden und also sich der Trajektorienkreis auf einen
kt zusammenziehen. Eine solche Kugel unseres Complexes nennt man
n eine singuläre Kugel; zu ihr gehört ein singuläres Element, eben
jenige Flächenelement, in dem die singuläre Kugel die Grundkugel
es Tangentialcomplexes berührt. Nun zeigt sich, dass die singulären
en mit den singulären Elementen die sogenannte singuläre Fläche des
plexes umhüllen. Diese singuläre Fläche ist dann das Abbild der Mini-
aldevelopabeln, die man im R_4 an unsere M_3 legen kann. Ueber-
pt bildet sich jede Minimaldevelopable ab als ein specieller Complex,
us der Gesammtheit der Berührungskugeln einer Fläche besteht. Eine
ebige M_2 im R_4 endlich giebt im R_3 eine Kugelcongruenz. Die
nimaldevelopable, welche man durch die M_2 hindurch legen kann,
t im R_3 die Brennfläche der Congruenz, d. h. diejenige Fläche, welche
den Kugeln umhüllt wird. Wir könnten diese Beispiele leicht noch
setzen, doch wollen wir hier abbrechen. Wir bemerken nur noch, dass
∞^{15} conformen Punkttransformationen des R_4 im R_3 ∞^{15} Kugeltrans-
nationen liefern, die zugleich Berührungstransformationen sind.
d zwar folgt wieder aus dem Liouville'schen Satze, dass die Gruppe
er Transformationen die Gesammtheit aller Berührungstransforma-

tionen der R_3 auszöpfen, welche zugleich Kugeltransformationen sind. Wir fügen diesen Betrachtungen, die einmal systematisch und mit Vollständigkeit durchzuführen eine wünschenswerte Aufgabe wäre, einige litterarische Notizen hinzu. Es ist vor allem die Arbeit von Lie, dem 5. (1871) zu nennen: „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendungen auf die Theorie partieller Differentialgleichungen." In dieser Arbeit wird die höhere Kugelgeometrie der R_3 überhaupt erst eingeführt. Doch durchdringen sich die Betrachtungen noch mit 2 weiteren Fragen, die wir in dieser Vorlesung erst in den folgenden Stunden nach ihrer Beziehung zur Kugelgeometrie behandeln werden, nämlich mit der Liniengeometrie und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Sodann sind meine eigenen Arbeiten in demselben Annalenbande (1871) zu erwähnen: „Über Liniengeometrie und metrische Geometrie" und „Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen." Ich habe damals zuerst die conforme Geometrie des R_4 herangezogen und mit der Liniengeometrie verglichen. (Der Vergleich mit Lie ergiebt dann den Zusammenhang zwischen der conformen Geometrie des R_4 und der Kugelgeometrie der R_3, was ich aber in der Arbeit nicht ausführe). Speciell habe ich die Bedeutung der Orthogonalsysteme im R_4, für die es dann auch ein Dupin'sches Theorem analog wie für die Flächen des R_3 giebt, näher studiert und deren Bedeutung für die Liniengeometrie entwickelt. Ferner habe ich dort correspondirende Differentialprobleme des R_4 und der Liniengeometrie mit 6 homogenen Coordinaten

handelt, letztere sind wieder die hexasphärischen Coordinaten des
4. An diese Arbeiten schliessen sich dann noch 2 Noten von Lie
n, die nur in den Göttinger Nachrichten (1871) stehen und aus die-
m Grunde wohl weniger beachtet sind: Über die metrische Geome-
ie des n-fach ausgedehnten Raumes. Hier wird allgemein der Zu-
mmenhang zwischen dem R_{n+1} und dem R_n durch Minimalpro-
ktion behandelt; insbesondere hat Lie die Minimalprojektion auf
thogonalsysteme des R_{n+1} angewandt, wobei sich sehr merkwür-
ge Resultate ergeben haben. Hier tritt die Liniengeometrie, deren
trachtung ja ursprünglich voranstand, die aber nur für $n=3$
istiert, völlig zurück. Fragt man endlich, weshalb eigentlich
se besonders gedankenreichen Arbeiten von Lie bisher so wenig
folg gehabt haben, so kann man den Grund nur darin sehen, dass
ihr so verschiedenartige Dinge neben einander behandelt wer-
, Liniengeometrie, Kugelgeometrie, Differentialgleichungen etc.
lle diese Gebiete muss man gleichförmig beherrschen, will man
n volles Verständniss dieser Arbeiten sich erwerben; es wird immer-
t von einem zum anderen übergegangen, und hier leicht folgen
können, dazu gehört eine Gewandtheit, die nur wenigen Mathema-
kern eigen ist. —

den letzten Stunden haben wir 3 Geometrien einander ge- [Di. 21. I. 1893].
nüber gestellt: die höhere Kugelgeometrie im R_n, die conforme Punkt-
metrie im R_{n+1} und die projektive Geometrie auf der Kugel
R_{n+2}; stets hatten wir $\infty^{\frac{(n+2)(n+3)}{2}}$ Transformationen. In
se Reihe zusammengehöriger Betrachtungen tritt nun, wie wir be-

reits vor Weihnachten andeuteten, für $n=3$, doch auch nur für $n=3$, die Liniengeometrie hinein. Der Grund liegt darin, dass wir die geraden Linien im Raume durch 6 Coordinaten festlegen, zwischen denen eine Bedingungsgleichung 2. Grades $P=0$ besteht, welche alles Weitere bestimmt. Hierbei ist insbesondere angenehm, dass in der Liniengeometrie die linearen Mannigfaltigkeiten, die man auf der Mannigfaltigkeit der quadratischen Gleichung $P=0$ im Raume von 5 Dimensionen betrachten wird, alle reell sind. Es ist demnach das Gebilde $P=0$, mit dem einschaligen Hyperboloid der R_3 zu vergleichen, auf dem gleichfalls reelle lineare Mannigfaltigkeiten, die geradlinigen Erzeugenden, liegen.

Erinnern wir uns, wie wir vor Weihnachten die Liniencoordinaten eingeführt haben: Wir gingen aus von der Matrix $\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix}\right|$, welche die homogenen Coordinaten zweier Punkte x_i und y_i enthält, und bildeten die 6 Unterdeterminanten p_{ik}, die wir dann in der Reihenfolge $p_{12}\ p_{34}\ p_{13}\ p_{42}\ p_{14}\ p_{23}$ als Coordinaten der Verbindungslinie der beiden Punkte genommen haben. Zwischen diesen 6 Grössen besteht die quadratische Identität: $P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$, und umgekehrt können 6 Grössen, welche der Gleichung $P=0$ genügen, immer als Liniencoordinaten angesehen werden. Nun wollen wir andererseits die Grössen p_{ik} als die homogenen Coordinaten eines Punktes des R_5 ansehen, der durch die Gleichung $P=0$ an eine Fläche 2ten Grades im R_5 gebunden ist. Die linke Seite dieser Gleichung $P=0$ hat eine nichtverschwindende Determinante. Wenn wir jetzt den Ausdruck P auf seine Trägheit untersuchen, so finden wir, dass

derselbe einer Form mit 3 positiven und 3 negativen Quadraten äquivalent ist. Mit diesem Umstande hängt zusammen, was sich über die Realität der linearen Mannigfaltigkeit auf $P=0$ ergiebt, die wir soeben andeuteten. Uebrigens erinnern wir uns, dass die Bedingung dafür, dass 2 gerade Linien p_{ik} und p'_{ik} sich schneiden, durch die Polarenverwandtschaft $\sum p_{ik} \cdot \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0$ in Bezug auf die Gl. $P=0$ gegeben wird. Endlich bemerken wir noch, dass die Liniencoordinaten q_{ik}, die man aus der Matrix zweier Ebenen $\left|\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right|$ ableiten kann, von den p_{ik} nur durch die Reihenfolge verschieden waren.

Wir wollen uns nun sogleich fragen, was es für lineare Mannigfaltigkeiten auf dieser Fläche $P=0$ im R_5 giebt. Wir bilden uns zunächst aus den Coordinaten zweier Geraden p_{ik} u. p'_{ik} die linearen Verbindungen $p_{ik} + \lambda p'_{ik}$ und untersuchen, wann die Gl. $P(p_{ik} + \lambda p'_{ik}) = 0$ identisch erfüllt wird für beliebiges λ. Indem wir diese Gl. nach Potenzen von λ entwickeln, erhalten wir

$$P(p_{ik}) + 2\lambda \sum p'_{ik} \cdot \frac{\partial P(p_{ik})}{\partial p_{ik}} + \lambda^2 \cdot P(p'_{ik}) = 0.$$

Es muss daher neben $P(p_{ik}) = 0$ und $P(p'_{ik}) = 0$, welche gewiss erfüllt sind, noch $\sum p'_{ik} \cdot \frac{\partial P(p_{ik})}{\partial p_{ik}} = 0$ sein. Diese letzte Bedingung besagt aber, dass die Geraden p_{ik} u. p'_{ik} sich schneiden. Durch $p_{ik} + \lambda p'_{ik}$ werden dann alle Geraden der Büschels (p, p') bezeichnet, d. h. alle Geraden, welche mit den gegebenen in einer Ebene liegen und gleichzeitig durch ihren Schnittpunkt gehen.

Es giebt daher auf unserer Fläche 2ten Grades im Raume von 5 Dimensionen soviel einfach ausgedehnte lineare Mannigfaltigkeiten, als es Geradenbüschel giebt, d. h. also ∞^5 viele. In der analogen Weise fragen wir nach den linearen $\mathcal{M}_2$, die auf der Fläche $P=0$ liegen, indem wir von der Verbindung $p+\lambda p'+\mu p''$ ausgehen, in der λ u. μ willkürliche Parameter sind. Wir finden, dass diese $\mathcal{M}_2$ nur dann der Gl. $P=0$ genügt, wenn p, p' u. p'' 3 gerade Linien sind, die sich im R_3 wechselseitig schneiden. Nun erkennt man sofort, dass es zwei verschiedene Fälle giebt: entweder können die 3 geraden Linien sich in einem gemeinsamen Punkte schneiden, oder aber sie werden in einer Ebene liegen. Demnach ergiebt sich als Resultat, dass es 2 Arten linearer 2fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten auf $P=0$ gibt, die sich im Raume von 3 Dimensionen darstellen 1) als alle geraden Linien, die durch einen Punkt gehen 2) als alle geraden Linien, die in einer Ebene liegen. Von jeder Art ist eine dreifach unendliche Zahl vorhanden. Wie wir daher auf einer Fläche 2ten Grades $R=0$ im R_3 2 einfach unendliche Schaaren linearer Mannigfaltigkeiten haben, die sich als die beiden Schaaren der geradlinigen Erzeugenden darstellen, so haben wir auch hier die analoge Gegenüberstellung zweier Arten von meist ausgedehnten, linearen Mannigfaltigkeiten; dieselben, wollen wir kurz als Strahlenbündel und als Gradenfelder bezeichnen. So treten hier also die dualistisch einander correspondirenden Elemente des R_3: Punkt und Ebene in einer neuen Weise einander gegenüber.

Wir wenden uns jetzt zu den linearen Transformationen. Wir haben im R_3 ∞^{15} lineare Punkt- (resp. Ebenen-) Transformationen und jeder

∞^{15} lineare dualistische Umformungen. Um zunächst vom ersteren zu sprechen, so mögen für die Coordinaten zweier Punkte die Substitutionsformeln gelten:

$$x_i' = \sum a_{iK} x_K ,$$
$$y_i' = \sum a_{iK} y_K .$$

Wir erkennen sofort, dass die Grössen p_{iK}, die sich aus den Coordinaten dieser Punkte zusammensetzen, sich gleichfalls linear substituieren werden, während zugleich $P = 0$ in sich selbst übergeht. Das Entsprechende gilt für die dualistischen Umformungen: $x_i' = \sum a_{iK} u_K$,

$y_i' = \sum a_{iK} v_K$. Aus ihnen wird zunächst zu folgern sein, dass die Coordinaten p_{iK}' von den Coordinaten q_{iK} linear abhängen. Indem aber letztere, wie oben bemerkt, von den zugehörigen Coordinaten p_{iK} sich nur durch die Reihenfolge unterscheiden, so ergiebt sich wiederum, dass auch bei den ∞^{15} dualistischen Transformationen, die Liniencoordinaten p_{iK} solche lineare Umformungen erleiden, welche die Gleichung $P = 0$ in sich selbst überführen. Nun kommt es aber besonders darauf an, diese Sätze umzukehren. Wenn wir 6 homogene Variable p_{iK} haben, so enthält deren allgemeine lineare Substitution doch 36 Coefficienten, so dass wir im R_5 überhaupt ∞^{35} Collineationen haben. Nun hat aber die allgemeine Gleichung 2ten Grades zwischen den 6 homogenen Coordinaten 20 wesentliche Constante. Demnach ergiebt diese Abzählung, dass es im Raume von 5 Dimensionen gerade 15fach ∞ viele lineare Transformationen giebt, welche eine Gl. 2. Grades in sich selbst überführen. Nun haben wir soeben ∞^{15} lineare Transformationen der p_{iK}, die $P = 0$ in sich überführen, gefunden, nämlich einerseits die ∞^{15} linearen Punkttransformationen, ande-

Es giebt daher auf unserer Fläche 2ten Grades im Raume von 5 Dimensionen soviel einfach ausgedehnte lineare Mannigfaltigkeiten, als es Geradenbüschel giebt, d. h. also 5fach ∞ viele. In der analogen Weise fragen wir nach den linearen $\mathcal{M}_2$, die auf der Fläche $P=0$ liegen, indem wir von der Verbindung $p+\lambda p'+\mu p''$ ausgehen, in der λ u. μ willkürliche Parameter sind. Wir finden, dass diese $\mathcal{M}_2$ nur dann der Gl. $P=0$ genügt, wenn p, p' u. p'' 3 gerade Linien sind, die sich im R_3 wechselseitig schneiden. Nun erkennt man sofort, dass es zwei verschiedene Fälle giebt: entweder können die 3 geraden Linien sich in einem gemeinsamen Punkte schneiden, oder aber sie werden in einer Ebene liegen. Demnach ergiebt sich als Resultat, dass es 2 Arten linearer 2fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten auf $P=0$ giebt, die sich im Raume von 3 Dimensionen darstellen 1) als alle geraden Linien, die durch einen Punkt gehen 2) als alle geraden Linien, die in einer Ebene liegen. Von jeder Art ist eine dreifach unendliche Zahl vorhanden. Wie wir daher auf einer Fläche 2ten Grades $\Lambda=0$ im R_3 2 einfach unendliche Schaaren linearer Mannigfaltigkeiten haben, die sich als die beiden Schaaren der geradlinigen Erzeugenden darstellen, so haben wir auch hier die analoge Gegenüberstellung zweier Arten von meist ausgedehnten, linearen Mannigfaltigkeiten; dieselben wollen wir kurz als Strahlenbündel und als Gradenfelder bezeichnen. So treten hier also die dualistisch einander correspondirenden Elemente des R_3: Punkt und Ebene in einer neuen Weise einander gegenüber.

Wir wenden uns jetzt zu den linearen Transformationen. Wir haben im R_3 ∞^{15} lineare Punkt- (resp. Ebenen-) Transformationen und jener

∞^{15} lineare dualistische Umformungen. Um zunächst von ersteren zu sprechen, so mögen für die Coordinaten zweier Punkte die Substitutionsformeln gelten:

$$x_i' = \sum a_{iK} x_K ,$$
$$y_i' = \sum a_{iK} y_K .$$

Wir erkennen sofort, dass die Grössen p_{iK}, die sich aus den Coordinaten dieser Punkte zusammensetzen, sich gleichfalls linear substituieren werden, während zugleich $P = 0$ in sich selbst übergeht. Das Entsprechende gilt für die dualistischen Umformungen: $x_i' = \sum a_{iK} u_K$,

$y_i' = \sum a_{iK} v_K$. Aus ihnen wird zunächst zu folgern sein, dass die Coordinaten p'_{iK} von den Coordinaten q_{iK} linear abhängen. Indem aber letztere, wie oben bemerkt, von den zugehörigen Coordinaten p_{iK} sich nur durch die Reihenfolge unterscheiden, so ergiebt sich wiederum, dass auch bei den ∞^{15} dualistischen Transformationen, die Liniencoordinaten p_{iK} solche lineare Umformungen erleiden, welche die Gleichung $P = 0$ in sich selbst überführen. Nun kommt es aber besonders darauf an, diese Sätze umzukehren. Wenn wir 6 homogene Variable p_{iK} haben, so enthält deren allgemeine lineare Substitution doch 36 Coefficienten, so dass wir im R_5 überhaupt ∞^{35} Collineationen haben. Nun hat aber die allgemeine Gleichung 2ten Grades zwischen den 6 homogenen Coordinaten 20 wesentliche Constante. Demnach ergiebt diese Abzählung, dass es im Raume von 5 Dimensionen gerade 15fach ∞ viele lineare Transformationen giebt, welche eine Vl. 2. Grades in sich selbst überführen. Nun haben wir soeben ∞^{15} lineare Transformationen der p_{iK}, die $P = 0$ in sich überführen, gefunden, nämlich einerseits die ∞^{15} linearen Punkttransformationen, ande-

zerseits die gleich zahlreichen dualistischen linearen Transformationen der R_3; wir behaupten, dass dieselben zugleich alle jene ∞^{15} Transformationen erschöpfen, die unsere Abzählung allgemein ergab. Beweis: Eine lineare Transformation der Grössen p_{ik}, welche $P=0$ in sich überführt; lässt aus jeder geraden Linie wieder eine gerade Linie entstehen. Aber auch jede lineare Schaar gerader Linien geht notwendig in eine lineare Schaar gerader Linien über. Insbesondere müssen daher aus den Bündeln u. Feldern des Raumes jetzt wieder Strahlenbündel und Strahlenfelder hervorgehen, wobei noch die doppelte Möglichkeit ist, dass entweder aus den Bündeln die Bündel, aus den Feldern die Felder, oder aus den Bündeln die Felder und aus den Feldern die Bündel entstehen. Wir behaupten, dass die erste Möglichkeit zu einer linearen Punkttransformation des R_3, die zweite zu einer linearen dualistischen Umformung desselben führt. Was die erste Möglichkeit betrifft, so wird offenbar, wenn die Gerade des ersten Raumes sich um einen Punkt dreht, auch die Gerade des transformirten Raumes sich um einen Punkt dreht. Dies aber heisst, dass einem Punkte allemal wieder ein Punkt entspricht, oder dass wir eine Punkttransformation vor uns haben. Aber Punkte, die einer Geraden angehören, liefern dabei notwendigerweise wieder Punkte, die einer Geraden angehören. Wir können daher auf unsere Transformation direct den früher bewiesenen Satz anwenden: Jede Punkttransformation, bei der collineare Punkte wieder collineare Punkte werden, ist notwendig durch eine lineare Substitution der Punktcoordinaten gegeben. Hiermit ist die Behauptung für den ersten Fall bewiesen.

Genau so werden wir für die zweite Möglichkeit, bei der Geraden wieder Gerade, Punkte Ebenen entsprechen und umgekehrt, den Nachweis zu führen haben. Wir bemerken zuerst, dass wir es mit einer collinearen Punkt-Ebenentransformation zu thun haben, und können dann wiederum sofort schliessen, dass dieselbe eine lineare Beziehung der Punkte und Ebenen ist. Auf Grund dieser Entwickelungen werden wir nun folgendermassen sagen: Als Inhalt der projektiven Liniengeometrie des Raumes von 3 Dimensionen erscheint zunächst die Gesammtheit derjenigen Eigenschaften geradliniger Figuren, welche bei den sämtlichen ∞^{15} Collineationen des R_3 und den 15fach ∞ vielen dualistischen Transformationen des R_3 invariant wird. Diesem Satz können wir dann folgende neue Fassung geben: Als Inhalt der projektiven Liniengeometrie erscheint die Gesamtheit solcher Eigenschaften geradliniger Figuren, welche ungeändert bleiben bei beliebigen linearen Transformationen der p_{ik}, die die Gl. $P=0$ in sich überführen.

Hiermit haben wir präcisiert, was wir zu Anfang der heutigen Vorlesung in Aussicht stellten: Die Liniengeometrie tritt in die Reihe derjenigen Geometrien ein, welche 6 homogene Coordinaten zu Grunde legen, die an eine Gl. 2ten Grades gebunden sind und dabei alle die linearen Transformationen der 6 Coordinaten in Betracht ziehen, welche die Gl. 2ten Grades in sich selbst überführen. Wir wollen nun insbesondere die Beziehung zwischen Liniengeometrie und höherer Kugelgeometrie noch weiter ausführen. Zunächst nach analytischer Seite. Neben den Coordinaten p_{ik} der geraden Linie mit

der Bedingung $P=0$ haben wir etwa die Kugelcoordinaten:
$\alpha=\frac{\xi}{r}$, $\beta=\frac{\eta}{r}$, $\gamma=\frac{\rho}{r}$, $r=\frac{\lambda}{r}$, $\delta=\frac{\mu}{r}$ mit der Bedingungsgleichung $\Lambda=\xi^2+\eta^2+\rho^2-\lambda^2-\mu\nu=0$. Man erinnere sich: Die Gl. einer beliebigen Kugel in rechtwinkligen Coordinaten x, y, z nimmt unter Einführung dieser Grössen $\xi, \eta, \rho, \lambda, \mu, \nu$ die folgende Gestalt an: $\nu\cdot(x^2+y^2+z^2)-2\xi\cdot x-2\eta\cdot y-2\rho\cdot z+\mu=0$
Haben wir eine Punktkugel, so wird λ und damit der Radius r gleich 0, die Punktcoordinaten des Mittelpunktes sind $\xi:\eta:\rho:\nu$. Geht die Kugel ferner in eine Ebene über, so wird $\nu=0$, und aus der letzten Gl. ergeben sich die Coordinaten der Ebene $+2\xi:+2\eta:+2\rho:-\mu$. Nun wird es darauf ankommen, die Coordinaten p_{ik} mit den Coordinaten $\xi\,\eta\,\rho\,\lambda\,\mu\,\nu$ so in Beziehung zu setzen, dass $P=0$ und $\Lambda=0$ in einander übergehen. Es muss dies auf ∞^{15} Weisen möglich sein. Wir setzen zu dem Zwecke etwa:

$$\begin{aligned}
\sigma\cdot p_{12} &= \xi+i\eta,\\
\sigma\cdot p_{34} &= \xi+i\eta,\\
\sigma\cdot p_{13} &= \xi+\lambda,\\
\sigma\cdot p_{42} &= \xi-\lambda,\\
\sigma\cdot p_{14} &= \mu,\\
\sigma\cdot p_{23} &= -\nu.
\end{aligned}$$

Aus diesen Formeln ergeben sich umgekehrt die Relationen:

$$\begin{aligned}
\sigma\cdot\xi &= p_{12}+p_{34}, & \sigma\cdot\xi &= p_{13}+p_{42},\\
\sigma\cdot\eta &= \frac{p_{12}-p_{34}}{i}, & \sigma\cdot\lambda &= p_{13}-p_{42},\\
& & \sigma\cdot\mu &= 2p_{14},\\
& & \sigma\cdot\nu &= -2p_{23}.
\end{aligned}$$

Indem wir nun beachten, dass für die Kugel das r und damit die λ-Coordinate im Vorzeichen unbestimmt ist, so ergeben unsere angegebenen Substitutionsformeln den Inhalt: Wir ordnen hier jeder geraden Linie eine Kugel und jeder Kugel 2 gerade Linien zu, welche sich dadurch von einander unterscheiden, dass ihre Coordinate p_{13} u. p_{42} unter einander vertauscht sind. Nun werden die Punktkugeln durch einen verschwindenden Wert von λ ausgezeichnet. Ihnen entsprechen daher insbesondere die geraden Linien des linearen Complexes $p_{13} = p_{42}$ und zwar ist dieses Entsprechen ein-eindeutig, weil ja kein Vorzeichen der Kugelradius mehr existiert. Ueberhaupt aber werden immer solche zwei gerade Linien dieselbe Kugel als Bild gebon, welche in Bezug auf den ausgezeichneten linearen Complex conjugierte Polaren sind. — Nun zeigt sich das überraschende Resultat, dass diese Transformation, welche die geraden Linien in Kugeln überführt und umgekehrt, oder auch alle die anderen ∞^{15} Transformationen, die man an ihre Stelle setzen kann, wieder Berührungstransformationen sind. Zunächst: 2 gerade Linien, die sich schneiden, geben 2 Kugeln, die sich berühren in dem die Bedingung des Schneidens durch die Polarenbeziehung in Bezug auf $P = 0$ gegeben und die Bedingung für die Berührung der Kugeln durch die Polarenbeziehung in Bezug auf $\Lambda = 0$ gegeben wird. Infolgedessen geben die Linien eines Büschels ein Berührungsbüschel von Kugeln. Durch die Linien eines Büschels legen sich aber ein Flächenelement fest, ebenso durch ein Büschel von Kugeln. Es entspricht also jedem Element des einen Raumes ein

Element des andern Raumes, d. h. wir haben jedenfalls eine Elemententransformation. Diese wird eine Berührungstransformation sein, sobald vereinigten Elementen hier wiederum vereinigte Elemente dort entsprechen und umgekehrt. Ich werde hier zunächst die analytischen Formeln für unsere Elemententransformation entwickeln, aus denen dann letzterer Nachweis unmittelbar hervorgehen muss.

Wir wollen ausgehen von einem Elemente im Linienraume mit den Coordinaten: $u_1\ u_2\ u_3\ u_4$ und $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$, wobei $u_x = 0$. Im Kugelraume sei das entsprechende Element $u_1'\ u_2'\ u_3'\ u_4'$ / $x_1'\ x_2'\ x_3'\ x_4'$ mit der Bedingung $u_{x'} = 0$. Um nun den Zusammenhang zwischen beiden Elementen zu berechnen, suche ich mir zunächst im Linienraume 2 gerade Linien aus, die dem Element $u_x = 0$ angehören. Wir wollen zu dem Zwecke die Schnittpunkte der Ebene des Elementes mit den Kanten (3,4) und (1,2) des Coordinatentetraeders berechnen. Dieselben werden entsprechend gegeben durch:

$$-u_2, +u_2, 0, 0 \quad \text{und}$$
$$0, 0, -u_4, +u_4.$$

Aus den beiden Matrices: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -u_2 & u_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & -u_4+u_3 & \end{vmatrix}$ bilde ich mir dann die Coordinaten der betreffenden Geraden p_{ik} u. p'_{ik} des Elementes, die (ohne den Proportionalitätsfaktor) sich wie folgt finden:

$$
\begin{aligned}
p_{12} &= u_1 x_1 + u_2 x_2, & & & p'_{12} &= 0,\\
p_{34} &= 0, & & & p'_{34} &= u_3 x_3 + u_4 x_4,\\
p_{13} &= u_2 x_3, & & & p'_{13} &= -u_4 x_1,\\
p_{42} &= u_1 x_4, & & \text{und} & p'_{42} &= -u_3 x_2,\\
p_{14} &= u_2 x_4, & & & p'_{14} &= +u_3 x_1,\\
p_{23} &= -u_1 x_3, & & & p'_{23} &= -u_4 x_2,
\end{aligned}
$$

Die diesen beiden Geraden entsprechenden Kugeln haben nach unseren allgemeinen Formeln die Coordinaten:

$$
\begin{aligned}
\xi &= u_1 x_1 + u_2 x_2, & & & \xi' &= u_3 x_3 + u_4 x_4,\\
\eta &= \frac{u_1 x_1 + u_2 x_2}{i}, & & & \eta' &= i(u_3 x_3 + u_4 x_3),\\
\zeta &= u_2 x_3 + u_1 x_4, & & \text{und} & \zeta' &= -u_4 x_1 - u_3 x_2,\\
\lambda &= u_2 x_3 - u_1 x_4, & & & \lambda' &= -u_4 x_1 + u_3 x_2,\\
\mu &= 2 u_2 x_4, & & & \mu' &= 2 u_3 x_1,\\
\nu &= 2 u_1 x_3, & & & \nu' &= 2 u_4 x_2.
\end{aligned}
$$

Diese beiden Kugeln haben nun das Flächenelement X, U gemein. Wir bekommen alle Berührungskugeln dieses Flächenelementes, indem wir die lineare Schaar $m\xi + m'\xi'$, $m\eta + m'\eta'$ u. s. w. betrachten, wo m und m' willkürliche Parameter sind. Diese Multiplicatoren wollen wir nun so wählen, dass wir die Punktkugel und die Ebene des Büschels erhalten, aus deren Coordinaten werden sich dann sofort die Coordinaten X, U des Flächenelementes der Kugelraumes finden lassen. Wir haben zu diesem Zwecke nur zu beachten, dass die Punkt-

Kugel durch $A=0$, die Ebene durch $V=0$ ausgezeichnet ist. Das Resultat ist, dass die K, U folgende Werthe annehmen:

$$\begin{aligned} K_1 &= A'\xi - A\xi', & U_1 &= V'\xi - V\xi', \\ K_2 &= A'\eta - A\eta', \text{ und} & U_2 &= V'\eta - V\eta', \\ K_3 &= A'\zeta - A\zeta', & U_3 &= V\zeta - V\zeta', \\ K_4 &= AV - AV', & U_4 &= -\frac{Va - Va'}{2}, \end{aligned}$$

wie die wir noch für die $\xi, \dots V$, $\xi' \dots V'$ ihre vorhin gegebenen Werthe einzutragen haben. Hier ist dann zu verificiren, dass einmal U_x im Multiplum von u_x ist, (was nothwendig ist, damit wir überhaupt eine Elemententransformation haben) und weiter, dass u'_{dx} ein Multiplum von u_{dx} ist, dass also vereinigte Elemente in vereinigte Elemente übergehen, und also unsere Elemententransformation in der That eine Berührungstransformation ist. — Wir wollen zunächst kurz lernen, [Do. 29.I.93] wie sie sich in geometrischer Weise davon überzeugt hat und zwar ohne aus den R_3 hervorzutreten, dass die Beziehung zwischen der höheren Kugelgeometrie und der Liniengeometrie eine Berührungstransformation darstellt. Wie wir wissen, entsprechen den Punktkugeln, d.h. den Punkten des Kugelraumes selbst, die geraden Linien des speciellen Complexes $p_{13} - p_{42}$ im Linienraume, den allgemeinen Kugeln dort aber 2 gerade Linien hier, die in Bezug auf diesen Complex sich als conjugirte Polaren darstellen. Nun bezeichnet Lie umgekehrt, was den Punkten des linearen Raumes im Kugelraume entsprechen

wird. Um dies zu sehen, gehen wir von einem Geradenbüschel des Complexes $p_{12} = p_{34}$ aus, d. h. von der Gesammtheit aller Geraden des Complexes, die durch einen Punkt gehen. Derselben entspricht im Kugelraum eine Minimalgerade *). Indem wir nun an Stelle des Büschels gerade seinen Schnittpunkt setzen, haben wir den Satz: Einem Punkte des Linienraumes entspricht eine Minimalgerade des Kugelraumes. Wir fassen unser Resultat in der Weise zusammen, dass wir sagen: Die beiden Räume sind in der Art aufeinander bezogen, dass beiderseits ein Liniencomplex ausgezeichnet ist, auf der einen Seite der lineare Complex $p_{13} = p_{42}$, auf der andern Seite der Minimalcomplex, und dass stets einem Punkte des einen Raumes eine gerade Linie des im andern Raume gegebenen Complexes entspricht. Nun wollen wir uns mit Lie geometrisch überzeugen, dass hiermit in der That eine Berührungstransformation gegeben ist. Zugleich werden wir dann in dem letzten Satze ein erstes Beispiel jener früher nur erst erwähnten Collegorie von Berührungstransformation zu sehen haben, bei denen die Punkte in Curven übergehen. Der Beweisgang ist der folgende: Lie zeigt zunächst, dass man aus einer Fläche des Linienraumes eine Fläche des Kugelraumes erhält, so dass wir eine Flächentransformation haben, und zweitens, dass alle Flächen, welche sich in einem Punkte berühren, wieder in Flächen übergehen, die sich in einem Punkte berühren, dass wir also eine Elemententransformation haben. Hieraus folgt dann, unmittelbar, dass Elementen in vereinigter Lage Elementen dort entsprechen, d. h. die hinreichende Bedingung

*) nämlich eine Curve, deren sämmtliche Punkte von einander eine verschwindende Entfernung haben.

der Berührungstransformation. Es sei im Linienraum irgend eine Fläche F_1 gegeben; zu ihr construieren wir die conjugierte Fläche F_2 in Bezug auf den linearen Complex, indem wir zu jedem Punkte von F_1 die zugehörige Polarebene bestimmen. Die Beziehung von F_1 und F_2 ist wegen der involutorischen Eigenschaft des Nullsystems eine gegenseitige.

Zwei zusammengehörige Punkte p_1 u. p_2 von F_1 u. F_2 liegen daher so, dass die Ebene, welche dem einen der Punkte im linearen Complex entspricht, immer die Tangentialebene ist, welche dem andern Punkte zugehört. Wir denken uns jetzt die Verbindungsgerade von p_1 u. p_2, die wir g nennen, gezeichnet. Diese g ist eine gemeinsame Tangente von F_1 und F_2. Sie gehört einerseits dem Büschel von Complexgeraden an, welche von p_1 ausstrahlen (und in der Tangentialebene von p_2 liegen), andererseits dem Büschel, welches von p_2 ausläuft. Eine leichte Ueberlegung zeigt, dass es überhaupt eine Congruenz solcher gerader Linien g giebt, welche gemeinsame Tangenten von F_1 u. F_2 sind. F_1 u. F_2 zusammen sind die Brennfläche dieser Congruenz. Man bemerkt nun weiter, dass auch diejenige zu g benachbarte Gerade g' der Congruenz gehört, welche durch eine ∞ kleine Drehung von g um p_1 (resp. p_2) in der Tangentialebene zu p_2 (resp. zu p_1) entsteht, d.h. Unter den Linien, welche im Büschel p_1 unserer Congruenz angehören, trifft das g doppeltzählend auf und unter den Linien, welche innerhalb des Büschels p_2 der Congruenz angehören, trifft das g ebenfalls doppeltzählend auf. (Allgemeine Eigenschaft der Brennfläche einer Congruenz.) Wir gehen jetzt vermöge unserer Transformation

in den Kugelraum über: Wir betrachten dort diejenige Fläche Φ, welche den Strahlen g unserer Congruenz bei der Abbildung entspricht. Zu einzelnen Geraden g entspricht ein einzelner Punkt y auf dieser Fläche; den einzelnen Büscheln p_1 und p_2 aber werden 2 Minimalgeraden π_1 u. π_2 entsprechen, welche dem von y auslaufenden Minimalkegel angehören. Weil nun die Büschel p_1 u. p_2 den Strahl g in der Congruenz der g doppelt zählend enthalten, werden π_1 u π_2 ihrerseits auf Φ den Punkt y doppelt zählend enthalten, d.h. es werden die Geraden π_1 u. π_2 gerade eben diejenigen Minimalgeraden sein, welche durch den Punkt y der Tangentialebene von Φ hindurchlaufen. Hiermit haben wir die Flächentransformation, welche aus den beiden Flächen F_1 u. F_2 des Linienraumes die Fläche Φ im Kugelraume entstehen lässt, hinreichend charakterisiert. Nun nehmen wir zu F_1 eine zweite Fläche F_1' hinzu, welche erstere im Punkte p_1 berührt. Dieser Fläche entspricht dann als conjugierte Fläche im Linienraum eine Fläche F_2', welche F_2 im Punkte p_2 berührt. Demnach geben F_1' und F_2' zusammen ganz dieselbe Figur der Büschel p_1 u. p_2, wie F_1 u. F_2 selbst. Daher geben F_1 u. F_2 einerseits, F_1' u. F_2' anderseits im Kugelraum 2 Flächen Φ u. Φ', welche denselben Punkt y und dieselben Minimalgeraden π_1 u. π_2 aufweisen. Indem nun π_1 u. π_2 zugleich in der Tangentialebene von y zu Φ resp. Φ' liegen, so folgt, dass Φ u. Φ' sich im Punkte y berühren. Das heisst aber, dass in der That alle Flächen F_1, die sich in einem Punkte p_1 berühren, Flächen

Flächen, die sich in demselben Punkte y berühren, d. h. dass man eine Elementtransformation hat. Dass zugleich in dem Vorstehenden der Nachweis enthalten ist, dass diese Elementtransformation auch eine Berührungstransformation ist, haben wir bereits erwähnt. Eine Berührungstransformation ist doch nur eine solche Elementtransformation, welche zugleich eine Flächentransformation ist. Wir wollen noch einige Bemerkungen über die besonders interessanten Eigenschaften unserer Berührungstransformation in Kürze hinzufügen. Aus einer geraden Linie wird doch eine Kugel. In die Sprache unserer Elementtransformation übersetzt besagt dieser Satz: Alle Elemente, die sich an eine gerade Linie anschmiegen, werden verwandelt in solche, welche eine Kugel berühren. Betrachten wir nun auf letzterer einmal alle die Elemente, die sich an einen Kreis auf ihr anschmiegen. Dieselben wollen wir in ihrer Gesamtheit einen kugelförmigen Kreisstreifen nennen. Ein Beispiel derselben bietet uns die frühere Betrachtung der Elemente, die sich an den „Trajectorienkreis" anschmiegen, d. h. welche die einzelne Kugel eines linearen Kugelcomplexes mit denjenigen Kugeln des Complexes gemein hat, die sie berühren. Wie liegen nun die entsprechenden Elemente, die sich an die gerade Linie im Linienraum anschmiegen? Wir können zwischen den Punkten der geraden Linie und den durch sie hindurchgehenden Ebenen eine projektive Zuordnung treffen der Art, dass nach einem beliebigen projectiven Gesetz sich die Ebene um die Gerade dreht, wenn der Punkt auf ihr fortschreitet. Wir nehmen dann zu je-

dem Punkte der Geraden das Element der solchenweise zugeordneten Ebene hinzu. Die Gesamtheit dieser Flächenelemente wollen wir einen geradlinigen Normalstreifen nennen. Wir behaupten nun; dass unserem Kugelförmigen Kreisstreifen ein solcher geradliniger Normalstreifen entspricht. In der That wird ein solcher Normalstreifen durch die sämmtlichen Geradenbüschel eines linearen Liniencomplexes geliefert, welche eine feste Gerade des Complexes schneiden. – Artet der Trajectorienkreis in einen Punktkreis aus, d.h. zerfällt er in zwei sich schneidende eliminalgeraden, so zerlegt sich der geradlinige Normalstreifen in ein Elementenbüschel, welches von irgend einem Punkte der tragenden geraden Linie ausgeht, und in einen Planstreifen, der sich an unsere Gerade entlang irgend einer durch sie hindurchgelegten Ebene anschmiegt. Wir können diese Beziehungen noch etwas weiter verfolgen. Betrachten wir einmal eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Kugeln, d.h. eine Kugelreihe. Indem jeder Kugel eine gerade Linie entspricht, geht die Kugelreihe in irgendwelche geradlinige Fläche über und umgekehrt. Ist im besonderen die Kugelreihe eine Berührungsreihe, d.h. eine Aufeinanderfolge von Kugeln, deren jede die nächstbenachbarte Kugel berührt, so erhalten wir eine developpable Fläche, d.h. die Tangenten einer Raumcurve, (indem doch je zwei benachbarte Gerade sich schneiden müssen). Nun richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Reihenfolge der Berührungselemente der speciellen Kugelreihe; dieselbe bildet, wie wir schon früher sagten,

einen „Krümmungsstreifen" d.h. die Normalen zweier Nachbarelemente schneiden sich hinreichend verlängert. Diesem Krümmungsstreifen entspricht die Gesammtheit der Osculationselemente der von der geraden Linie umhüllten Raumcurve, welche (ebenfalls nach früheren Entwickelungen) einen „Schmiegungsstreifen" bilden. Unsere Berührungstransformation hat also die merkwürdige Eigenschaft Krümmungsstreifen in Schmiegungsstreifen zu verwandeln und umgekehrt. Von diesem Resultate aus verstehen wir nun auf's Beste den schon vor Weihnachten angeführten Satz, dass vermöge unserer Transformation 2 Flächen derart zusammengeordnet werden, dass die Krümmungscurven der einen in die Hauptstangentencurven der anderen übergehen. Wir wählten für die beiden Flächen wie da die soeben eingeführten Bezeichnungen F u. Φ. Die Aufgabe auf der Fläche Φ die Krümmungscurven zu bestimmen, kommt offenbar darauf hinaus, die Berührungselemente von Φ zu Krümmungsstreifen zusammenzufassen. Daher ist sie in der That identisch mit der Aufgabe, auf der Fläche F die Hauptstangentencurven zu bestimmen, d.h. die Berührungselemente zu Schmiegungsstreifen zusammenzufassen. — Wir müssen leider unterlassen, die hier stattfindende Uebertragung noch bei anderen Sätzen der Liniengeometrie oder Kugelgeometrie zu verfolgen. Als Beispiele empfehle ich alle die Sätze, welche wir neulich für die Kugelgeometrie durch den Vergleich mit der Punktgeometrie des R_4 gewonnen haben. —

müssen jetzt noch lernen, in welcher Weise Lie die hier [Fr. 24. II. 93].
egenden geometrischen Betrachtungen mit der Theorie der partiel-
i Differentialgleichungen erster Ordnung mit 3 Variablen in
indung gebracht hat. Wir müssen zunächst die allgemeine ge-
bische Bedeutung dieser Theorie besprechen. Wir gehen darauf
er lieber ein, als wir hierfür alle Prämissen im vorgehenden
itgestellt haben, und die Theorie als solche doch sehr wichtig ist.
i $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ gesetzt und die Gleichung $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$
egeben; diese Gl. gilt es zu integrieren, d.h. man soll in
meinster Weise Gleichungen $z = \varphi(x\,y)$ finden, welche die
bille Differentialgl. 1. Ordnung" $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ befriedigen.
i hat schon längst in diese Theorie geometrische Anschauung
eführt. Zuerst ist zu nennen Monge in seinen Applica-
d'analyse à la Géométrie (1810), sodann u.a. du Bois (1864)
räge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichun-
mit 3 Variablen," (ein Werk, von dem nur der erste Band er-
nen ist), du Bois giebt in demselben allerhand interessan-
nsätze, ohne jedoch dieselben consequent durchzuführen. Erst
ar es vorbehalten einen gewissen Abschluss herbeizuführen,
m es vor allem $x\,y\,z\,p\,q$ als Flächenelement im R_3 deutete.
ebt ∞^5 solcher Flächenelemente im Raum; durch die Gleichung
$y\,z\,p\,q) = 0$ werden aus demselben ∞^4 herausgehoben. Nun wird
der bisherigen Theorie verlangt, aus diesen ∞^4 Elementen
hen zusammenzusetzen, d.h. Flächen der art zu finden, dass
Elemente, die sich an dieselben anschmiegen, der gegebenen Gl.
genügen.

Allgemeiner ist der Ansatz von Lie. Nach ihm kommt die Forderung der Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung $f=0$ darauf zurück, aus den 4fach ∞ vielen Elementen der Gl. $f=0$ auf alle Weisen 2fach ∞ Mannigfaltigkeiten zusammenzusetzen, welche die Gleichung $dz-pdx-qdy=0$, d.h. die Bedingung der vereinigten Lage benachbarter Elemente identisch erfüllen. Diese Lie'sche Formulierung ist allgemeiner als die gewöhnliche, weil eine solche „Integr.-Gl." unter Umständen in eine Raumcurve oder sogar in einen einzelnen Raumpunkt ausarten kann, wie wir sogleich noch näher sehen werden; gerade hierin liegt der Vorzug der Lie'schen Auffassung begründet.
Im übrigen will ich sogleich anführen, dass die Lie'schen geometrischen Auffassungen aufs engste parallel laufen mit den analytischen Ansätzen in der berühmten Arbeit von Pfaff in den Berliner Abhandlungen (1814) „Methodus generalis aequationes differentiarum particularum etc. complete integrandi". In dieser Schrift hat Pfaff das nach ihm benannte „Pfaff'sche Problem" eingeführt. Mit demselben hat es, was partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung mit 3 Variabelen angeht, folgende Bewandnis: Es sei $f(xyzpq)=0$ oder, nach z aufgelöst; $z=\psi(xypq)$ vorgegeben. Dann wird:

$$dz=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial p}dp+\frac{\partial\psi}{\partial q}\cdot dq \text{ sein. Andererseits soll: } dz=p\,dx+q\,dy \text{ sein. Aus beiden Gleichungen folgt durch Subtraction}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-p\right)dx+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-q\right)dy+\frac{\partial\psi}{\partial p}dp+\frac{\partial\psi}{\partial q}dq=0.$$

Diese Gleichung aber stellt ein Pfaff'sches Problem für 4 Variable dar. Pfaff ersetzt geradezu infolge dieser Analogie die Frage nach der Integration der partiellen Differentialgleichung $z = \Psi(x\,y\,p\,q)$ durch die Frage nach der Integration dieses „Pfaff'schen Problems."

Dieser analytische Ansatz von Pfaff ist offenbar der Lie'schen Auffassung, bei der $x\,y\,p\,q$ als Constanten eines Flächenelementes neben einander stehen, durchaus parallellaufend. In Folge dieser Analogie können wir ferner alles das, was wir nun, indem wir im R_3 bleiben, über die partielle Differentialgleichung $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ entwickeln werden, auf die Theorie des vorbezeichneten, im R_4 gegebenen Pfaff'schen Problems übertragen, wodurch wir eine Anleitung zur allgemeinen Behandlung des Pfaff'schen Problems gewinnen.

Wir teilen unsere Differentialgleichungen $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ nun ein

a) in solche, welche $p\,q$ gar nicht enthalten, die also einfach $f(x\,y\,z) = 0$ lauten. Diese Gleichung ist zwar für die gewöhnliche Auffassung keine Differentialgleichung, wohl aber für die Elementenauffassung.

b) solche Gleichungen, die in $p\,q$ linear sind. Ihre allgemeine Form ist: $C(x\,y\,z) - A(x\,y\,z)\cdot p - B(x\,y\,z)\cdot q = 0$ unter A, B, C irgend welche Functionen von $x\,y\,z$ verstanden.

c) Gleichungen mit beliebig vorkommenden p, q.

Diese 3 Kategorien wollen wir nun nach einander behandeln:
ad a. Der Fall der Gleichung $f(x,y,z)=0$ ist natürlich überaus einfach. Dieselbe stellt allgemein die Punkte einer Fläche dar. Indem die Größen p u. q ganz beliebig sind, genügen dann unserer Gleichung alle Bündel von Flächenelementen, deren Mittelpunkte auf der Fläche $f(x\,y\,z)=0$ liegen. Wir können nun sehr leicht auch alle Integrale M_2 angeben:

1) Zuerst gehören zu ihnen die ∞^2 Bündel von Flächenelementen selbst, deren Mittelpunkte auf der Fläche liegen.

2). Wenn wir ferner auf unserer Fläche irgend eine Curve ziehen und alle Elemente, die sich ihr anschmiegen, auswählen, so erhalten wir ebenfalls ein Integral M_2.

3) Endlich bilden die Elemente, die sich der gegebenen Fläche selbst anschmiegen, ein Integral M_2, welche wir als „singuläre Integral-M_2" bezeichnen. Im vorliegenden Falle kennen wir daher alle Integral-M_2 von vornherein.

Nun wollen sie noch bemerken, dass diese Gebilde, sofern wir von der singulären M_2 absehen, jedenfalls aus ∞^1 Streifen einer bestimmten Art zusammengesetzt sind. Es handelt sich um die Streifen, beg. Büschel von Elementen, die ein gemeinsames Linienelement der Fläche enthalten. Solche Streifen gibt es insgesammt ∞^3. Nun ist ohne Weiteres klar, wie die Integral-M_2 des einzelnen Flächenpunktes oder einer Curve auf der Fläche aus

lchen Tangentialbüscheln zusammengesetzt sind. Nur für die Fl
e $F=0$ selbst gilt Dieses nicht; Dieselbe nimmt dementsprechend ihre
sondere Stellung ein. — Alle diese Bemerkungen, die an sich tri
l erscheinen mögen, werden erst von Bedeutung, indem wir
weiteren Falle unserer Differentialgleichungen betrachten, für
en Erkenntnisse sie einfachste Beispiele geben. —

DB. Wir behandeln nun die in p, q lineare Gleichung $C - Ap - Bq = 0$.
ser sie wird jedem Punkte xyz eine bestimmte Elementenschaar
geordnet, nämlich alle Diejenigen Elemente, welche durch die
rschreitungsrichtung $dx : dy : dz = A : B : C$ hindurchgehen, wie leicht
übersehen ist. Mit anderen Worten: Die Gleichung $C - Ap - Bq = 0$
net jedem Punkte des Raumes ein Büschel von Flächenelemen
gu. Wenn wir im Falle einer beliebigen Gleichung $f(xyzpq) = 0$
n Punkte xyz ausgehend einen Kegel finden werden, der von den
menten pq umhüllt wird, so kann man bemerken, dass schon
n Dieser Kegel vorliegt, nur ist er ein Kegel erster Klasse gewor
r, d. h. in ein Büschel ausgeartet.

Von diesem Satze aus verstehen wir nun leicht die gewöhn
he Methode der Integration unserer Gleichung $C - Ap - Bq = 0$.
se beginnt damit, dass man das folgende System von ge
öhnlichen Differentialgleichungen zu integrieren sucht
$: dy : dz = A : B : C$. Geometrisch heisst Dies: Indem man von einem
liebigen Punkte immer in der hierdurch vorgeschriebenen Rich

Allgemeiner ist der Ansatz von Lie. Nach ihm kommt die Forderung der Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung $f=0$ darauf zurück, aus den 4fach ∞ vielen Elementen der Gl. $f=0$ auf alle Weisen 2fach ∞ Mannigfaltigkeiten zusammenzusetzen, welche die Gleichung $dz-pdx-qdy=0$, d.h. die Bedingung der vereinigten Lage benachbarter Elemente, identisch erfüllen. Diese Lie'sche Formulierung ist allgemeiner als die gewöhnliche, weil eine solche „Integral M²" unter Umständen in eine Raumcurve oder sogar in einen einzelnen Raumpunkt ausarten kann, wie wir sogleich noch näher sehen werden; gerade hierin liegt der Vorzug der Lie'schen Auffassung begründet.
Im übrigen will ich sogleich anführen, dass die Lie'schen geometrischen Auffassungen aufs engste parallel laufen mit den analytischen Ansätzen in der berühmten Arbeit von Pfaff in den Berliner Abhandlungen (1814) „Methodus generalis aequationes differentiarum particularum etc. complete integrandi". In dieser Schrift hat Pfaff das nach ihm benannte „Pfaff'sche Problem" eingeführt. Mit demselben hat es, was partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung mit 3 Variabelen angeht, folgende Bewandnis: Es sei $f(xyzpq)=0$ oder, nach z aufgelöst; $z=\psi(xypq)$ vorgegeben. Dann wird:

$$dz=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial p}dp+\frac{\partial\psi}{\partial q}\cdot dq \text{ sein. Andererseits soll: } dz=p\,dx+q\,dy \text{ sein. Aus beiden Gleichungen folgt durch Subtraction}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-p\right)dx+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-q\right)dy+\frac{\partial\psi}{\partial p}dp+\frac{\partial\psi}{\partial q}dq=0.$$

Diese Gleichung aber stellt ein Pfaff'sches Problem für 4 Variable dar. Pfaff ersetzt geradezu infolge dieses Ansatzes die Frage nach der Integration der partiellen Differentialgleichung $z = \psi(x\,y\,p\,q)$ durch die Frage nach der Integration dieses „Pfaff'schen Problems."

Dieser analytische Ansatz von Pfaff ist offenbar der Lie'schen Auffassung, bei der $x\,y\,p\,q$ als Constanten eines Flächenelementes neben einander stehen, durchaus parallellaufend. In Folge dieser Analogie können wir ferner alles das, was wir nun, indem wir im R_3 bleiben, über die partielle Differentialgleichung $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ entwickeln werden, auf die Theorie des vorbezeichneten, im R_4 gegebenen Pfaff'schen Problems übertragen, wodurch wir eine Anleitung zur allgemeinen Behandlung des Pfaff'schen Problems gewinnen.

Wir teilen unsere Differentialgleichungen $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ nun ein

a) in solche, welche $p\,q$ gar nicht enthalten, die also einfach $f(x\,y\,z) = 0$ lauten. Diese Gleichung ist zwar für die gewöhnliche Auffassung keine Differentialgleichung, wohl aber für die Elementenauffassung.

b) solche Gleichungen, die in $p\,q$ linear sind. Ihre allgemeine Form ist: $B(x\,y\,z) - A(x\,y\,z)\cdot p - B(x\,y\,z)\cdot q = 0$ unter A, B, C irgend welche Functionen von $x\,y\,z$ verstanden.

c) Gleichungen mit beliebig vorkommenden p, q.

Diese 3 Kategorien wollen wir nun nach einander behandeln:

ad a. Der Fall der Gleichung $f(x,y,z)=0$ ist natürlich überaus einfach. Dieselbe stellt allgemein die Punkte einer Fläche dar. Indem die Größen p u. q ganz beliebig sind, genügen dann unserer Gleichung alle Bündel von Flächenelementen, deren Mittelpunkte auf der Fläche $f(x\,y\,z)=0$ liegen. Wir können nun sehr leicht auch alle Integrale M_2 angeben:

1) Zuerst gehören zu ihnen die ∞^2 Bündel von Flächenelementen selbst, deren Mittelpunkte auf der Fläche liegen.

2). Wenn wir ferner auf unserer Fläche irgend eine Curve ziehen und alle Elemente, die sich ihr anschmiegen, auswählen, so erhalten wir ebenfalls ein Integral M_2.

3) Endlich bilden die Elemente, die sich der gegebenen Fläche selbst anschmiegen, ein Integral M_2, welches wir als „singuläre Integral-M_2" bezeichnen. Im vorliegenden Falle kennen wir daher alle Integral-M_2 von vornherein.

Nun wollen sie noch bemerken, dass diese Gebilde, sobald wir von der singulären M_2 absehen, jedenfalls aus ∞^1 Streifen einer bestimmten Art zusammengesetzt sind. Es handelt sich um die Streifen, bez. Büschel von Elementen, die ein gemeinsames Linienelement der Fläche enthalten. Solche Streifen gibt es insgesamt ∞^3. Nun ist ohne Weiteres klar, wie die Integral-M_2 des einzelnen Flächenpunktes oder einer Curve auf der Fläche aus

olchen Tangentialbüscheln zusammengesetzt sind. Nur für die Flä-
he $F=0$ selbst gilt dieses nicht; dieselbe nimmt dementsprechend ihre
esondere Stellung ein. — Alle diese Bemerkungen, die an sich tri-
ial erscheinen mögen, werden erst von Bedeutung, indem wir
ie weiteren Fälle unserer Differentialgleichungen betrachten, für
ren Vorkommnisse sie einfachste Beispiele geben. —

rd b. Wir behandeln nun die in p, q lineare Gleichung $C-Ap-Bq=0$.
urch sie wird jedem Punkte xyz eine bestimmte Elementenschaar
ugeordnet, nämlich alle diejenigen Elemente, welche durch die
ortschreitungsrichtung $dx:dy:dz=A:B:C$ hindurchgehen, wie leicht
u übersehen ist. Mit anderen Worten: Die Gleichung $C-Ap-Bq=0$
dnet jedem Punkte des Raumes ein Büschel von Flächenelemen-
n zu. Wenn wir im Falle einer beliebigen Gleichung $f(xyzpq)=0$
m Punkte xyz ausgehend einen Kegel finden werden, der von den
lementen pq umhüllt wird, so kann man bemerken, dass schon
ier dieser Kegel vorliegt, nur ist er ein Kegel erster Klasse gewor-
n, d. h. in ein Büschel ausgeartet.

Von diesem Satze aus verstehen wir nun leicht die gewöhn-
che Methode der Integration unserer Gleichung $C-Ap-Bq=0$.
ese beginnt damit, dass man das folgende System von ge-
öhnlichen Differentialgleichungen zu integrieren sucht
$-:dy:dz=A:B:C$. Geometrisch heisst dies: Indem man von einem
eliebigen Punkte immer in der hierdurch vorgeschriebenen Rich-

einen „Krümmungsstreifen" d.h. die Normalen zweier Nachbarelemente schneiden sich hinreichend verlängert. Diesem Krümmungsstreifen entspricht die Gesammtheit der Osculationselemente der von der geraden Linie umhüllten Raumcurve, welche (ebenfalls nach früheren Entwickelungen) einen „Schmiegungsstreifen" bilden. Unsere Berührungstransformation hat also die merkwürdige Eigenschaft Krümmungsstreifen in Schmiegungsstreifen zu verwandeln und umgekehrt. Von diesem Resultate aus verstehen wir nun auch den schon vor Weihnachten angeführten Satz, dass vermöge unserer Transformation 2 Flächen derart zusammengeordnet werden, dass die Krümmungscurven der einen in die Hauptasymptotencurven der anderen übergehen. Wir wählen für die beiden Flächen wieder die soeben eingeführten Bezeichnungen F u. Φ. Die Aufgabe auf der Fläche Φ die Krümmungscurven zu bestimmen, kommt offenbar darauf hinaus, die Berührungselemente von Φ zu Krümmungsstreifen zusammenzufassen. Daher ist sie in der That identisch mit der Aufgabe, auf der Fläche F die Hauptasymptotencurven zu bestimmen, d.h. die Berührungselemente zu Schmiegungsstreifen zusammenzufassen. — Wir müssen leider unterlassen, die hier stattfindende Uebertragung noch bei anderen Sätzen der Liniengeometrie oder Kugelgeometrie zu verfolgen. Als Beispiele empfehle ich alle die Sätze, welche wir neulich für die Kugelgeometrie durch den Vergleich mit der Punktgeometrie des R4 gewonnen haben. —

Wir müssen jetzt noch lernen, in welcher Weise Lie die hier [Nr. 24. II. 93]. vorliegenden geometrischen Betrachtungen mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit 3 Variablen in Verbindung gebracht hat. Wir müssen zunächst die allgemeine geometrische Bedeutung dieser Theorie besprechen. Wir gehen darauf um so lieber ein, als wir hierfür alle Prämissen im vorgehenden bereitgestellt haben, und die Theorie als solche doch sehr wichtig ist. Es sei $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ gesetzt und die Gleichung $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ vorgegeben; diese Gl. gilt es zu integrieren, d. h. man soll in allgemeinster Weise Gleichungen $z = \varphi(x\,y)$ finden, welche die „partielle Differentialgl. 1. Ordnung" $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ befriedigen. Man hat schon längst in diese Theorie geometrische Anschauung eingeführt. Zuerst ist zu nennen Monge in seinen Applications d'analyse à la Géométrie (1810), sodann u. a. du Bois (1864) „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit 3 Variablen," (ein Werk, von dem nur der erste Band erschienen ist); du Bois giebt in demselben allerhand interessante Ansätze, ohne jedoch dieselben consequent durchzuführen. Erst Lie war es vorbehalten einen gewissen Abschluss herbeizuführen, indem er vor allem $x\,y\,z\,p\,q$ als Flächenelement im R_3 deutete. Es giebt ∞^5 solcher Flächenelemente im Raum; durch die Gleichung $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ werden aus denselben ∞^4 heraus gehoben. Nun wird nach der bisherigen Theorie verlangt, aus diesen ∞^4 Elementen Flächen zusammenzusetzen, d. h. Flächen der art zu finden, dass alle Elemente, die sich an dieselben anschmiegen, der gegebenen Gl. genügen.

Allgemeiner ist der Ansatz von Lie. Nach ihm kommt die Forderung der Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung $f=0$ darauf zurück, aus den 4fach ∞ vielen Elementen der Gl. $f=0$ auf alle Weisen 2fach ∞ Mannigfaltigkeiten zusammenzusetzen, welche die Gleichung $dz-pdx-qdy=0$, d.h. die Bedingung der vereinigten Lage benachbarter Elemente, identisch erfüllen. Diese Lie'sche Formulierung ist allgemeiner als die gewöhnliche, weil eine solche „Integral M$_2$" unter Umständen nur eine Raumcurve oder sogar in einen einzelnen Raumpunkt ausarten kann, wie wir sogleich noch näher sehen werden; gerade hierin liegt der Vorzug der Lie'schen Auffassung begründet.
Im übrigen will ich sogleich anführen, dass die Lie'schen geometrischen Auffassungen aufs engste parallel laufen mit den analytischen Ansätzen in der berühmten Arbeit von Pfaff in den Berliner Abhandlungen (1814) „Methodus generalis aequationes differentiarum particularum etc. complete integrandi". In dieser Schrift hat Pfaff das nach ihm benannte „Pfaff'sche Problem" eingeführt. Mit demselben hat es, was partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung mit 3 Variabelen angeht, folgende Bewandnis: Es sei $f(xyzpq)=0$ oder, nach z aufgelöst; $z=\psi(xypq)$ vorgegeben. Dann wird:

$$dz=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial p}dp+\frac{\partial\psi}{\partial q}\cdot dq \text{ sein. Andererseits soll: } dz=p\,dx+q\,dy \text{ sein. Aus beiden Gleichungen folgt durch Subtraction}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-p\right)dx+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-q\right)dy+\frac{\partial\psi}{\partial p}dp+\frac{\partial\psi}{\partial q}dq=0.$$

Diese Gleichung aber stellt ein Pfaff'sches Problem für 4 Variable dar. Pfaff ersetzt geradezu infolge dieses Ansatzes die Frage nach der Integration der partiellen Differentialgleichung $z = \psi(x\,y\,p\,q)$ durch die Frage nach der Integration dieses „Pfaff'schen Problems."

Dieser analytische Ansatz von Pfaff ist offenbar der Lie'schen Auffassung, bei der $x\,y\,p\,q$ als Constanten eines Flächenelementes neben einander stehen, durchaus parallellaufend. In Folge dieser Analogie können wir ferner alles das, was wir nun, indem wir im R_3 bleiben, über die partielle Differentialgleichung $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ entwickeln werden, auf die Theorie des vorbezeichneten, im R_4 gegebenen Pfaff'schen Problems übertragen, wodurch wir eine Anleitung zur allgemeinen Behandlung des Pfaff'schen Problems gewinnen.

Wir teilen unsere Differentialgleichungen $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ nun ein

a) in solche, welche $p\,q$ gar nicht enthalten. Die also einfach $f(x\,y\,z) = 0$ lauten. Diese Gleichung ist zwar für die gewöhnliche Auffassung keine Differentialgleichung, wohl aber für die Elementenauffassung.

b) solche Gleichungen, die in $p\,q$ linear sind. Ihre allgemeine Form ist: $C(x\,y\,z) - A(x\,y\,z)\cdot p - B(x\,y\,z)\cdot q = 0$ unter A, B, C irgend welche Funktionen von $x\,y\,z$ verstanden.

c) Gleichungen mit beliebig vorkommenden p, q.

Allgemeiner ist der Ansatz von Lie. Nach ihm kommt die Forderung der Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung $f=0$ darauf zurück, aus den 4fach ∞ vielen Elementen der Gl. $f=0$ auf alle Weisen 2fach ∞ Mannigfaltigkeiten zusammenzusetzen, welche die Gleichung $dz-p\,dx-q\,dy=0$, d. h. die Bedingung der vereinigten Lage benachbarter Elemente, identisch erfüllen. Diese Lie'sche Formulierung ist allgemeiner als die gewöhnliche, weil eine solche „Integral-M$_2$" unter Umständen in eine Raumcurve oder sogar in einen einzelnen Raumpunkt ausarten kann, wie wir sogleich noch näher sehen werden; gerade hierin liegt der Vorzug der Lie'schen Auffassung begründet.
Im übrigen will ich sogleich anführen, dass die Lie'schen geometrischen Auffassungen aufs engste parallel laufen mit den analytischen Ansätzen in der berühmten Arbeit von Pfaff in den Berliner Abhandlungen (1814) „Methodus generalis aequationes differentiarum particularum etc. complete integrandi". In dieser Schrift hat Pfaff das nach ihm benannte „Pfaff'sche Problem" eingeführt. Mit demselben hat es, was partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung mit 3 Variabeln angeht, folgende Bewandnis: Es sei $f(x\,y\,z\,p\,q)=0$ oder, nach z aufgelöst; $z=\psi(x\,y\,p\,q)$ vorgegeben. Dann wird:

$$dz=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial p}dp+\frac{\partial\psi}{\partial q}\cdot dq$$ sein. Andererseits soll: $dz=p\,dx+q\,dy$ sein. Aus beiden Gleichungen folgt durch Subtraction

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-p\right)dx+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-q\right)dy+\frac{\partial\psi}{\partial p}dp+\frac{\partial\psi}{\partial q}dq=0.$$

e Gleichung aber stellt ein Pfaff'sches Problem für 4 Variable dar.
ff ersetzt geradezu infolge dieses Ansatzes die frage nach der
egration der partiellen Differentialgleichung $z = \Psi(x\,y\,p\,q)$
n die frage nach der Integration dieses „Pfaff'schen Problems."

Dieser analytische Ansatz von Pfaff ist offenbar der Lie'schen
fassung, bei der $x\,y\,p\,q$ als Constanten eines Flächen-
ientes neben einander stehen, durchaus parallellaufend. In-
e dieser Analogie können wir ferner alles das, was wir nun
nn wir im R_3 bleiben, über die partielle Differentialgleichung
$y\,z\,p\,q) = 0$ entwickeln werden, auf die Theorie des vorbezeichneten,
R_4 gegebenen Pfaff'schen Problems übertragen, wodurch wir
Anleitung zur allgemeinen Behandlung des Pfaff'schen
blems gewinnen.

Wir teilen unsere Differentialgleichungen $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$
n ein
in solche, welche $p\,q$ gar nicht enthalten, die also einfach
$(x\,y\,z) = 0$ lauten. Diese Gleichung ist zwar für die gewöhnli-
Auffassung keine Differentialgleichung, wohl aber für die Ele-
nentenauffassung.
solche Gleichungen, die in $p\,q$ linear sind. Ihre allgemeine
rm ist: $C(x\,y\,z) - A(x\,y\,z)\cdot p - B(x\,y\,z)\cdot q = 0$ unter A, B, C irgend
elche Functionen von $x\,y\,z$ verstanden.
Gleichungen mit beliebig vorkommenden p, q.

Diese 3 Kategorien wollen wir nun nach einander behandeln:
ad a. Der Fall der Gleichung $f(x,y,z)=0$ ist natürlich überaus einfach. Dieselbe stellt allgemein die Punkte einer Fläche dar. Indem die Größen p u. q ganz beliebig sind, genügen dann unserer Gleichung alle Bündel von Flächenelementen, deren Mittelpunkte auf der Fläche $f(x\,y\,z)=0$ liegen. Wir können nun sehr leicht auch alle Integrale M_2 angeben:

1) Zuerst gehören zu ihnen die ∞^2 Bündel von Flächenelementen selbst, deren Mittelpunkte auf der Fläche liegen.

2) Wenn wir ferner auf unserer Fläche irgend eine Curve zeichnen und alle Elemente, die sich ihr anschmiegen, auswählen, so erhalten wir ebenfalls ein Integral M_2.

3) Endlich bilden die Elemente, die sich der gegebenen Fläche selbst anschmiegen, ein Integral M_2, welches wir als „singuläre Integral-M_2" bezeichnen. Im vorliegenden Falle kennen wir daher alle Integral-M_2 von vornherein.

Nun wollen sie noch bemerken, dass diese Gebilde, sofern wir von der singulären M_2 absehen, jedenfalls aus ∞^1 Streifen einer bestimmten Art zusammengesetzt sind. Es handelt sich um die Streifen, bez. Büschel von Elementen, die ein gemeinsames Linienelement der Fläche enthalten. Solche Streifen gibt es insgesammt ∞^3. Nun ist ohne Weiteres klar, wie die Integral-M_2 des einzelnen Flächenpunktes oder einer Curve auf der Fläche aus

elchen Tangentialbüscheln zusammengesetzt sind. Nur für die Flä
e $F=0$ selbst gilt dieses nicht; dieselbe nimmt dementsprechend ihre
sondere Stellungen ein. — Alle diese Bemerkungen, die an sich tri
al erscheinen mögen, werden erst von Bedeutung, indem wir
e weiteren Fälle unserer Differentialgleichungen betrachten, für
ren Verkommnisse sie einfachste Beispiele geben. —

DB. Wir behandeln nun die in p, q lineare Gleichung $C - Ap - Bq = 0$.
rch sie wird jedem Punkte xyz eine bestimmte Elementenschaar
geordnet, nämlich alle diejenigen Elemente, welche durch die
rschreitungsrichtung $dx : dy : dz = A : B : C$ hindurchgehen, wie leicht
u übersehen ist. Mit anderen Worten: Die Gleichung $C - Ap - Bq = 0$
net jedem Punkte des Raumes ein Büschel von Flächenelemen
n zu. Wenn wir im Falle einer beliebigen Gleichung $f(xyzpq) = 0$
m Punkte xyz ausgehend einen Kegel finden werden, der von den
lementen p, q umhüllt wird, so kann man bemerken, dass schon
er dieser Kegel vorliegt, nur ist er ein Kegel erster Klasse gewor
n, d. h. in ein Büschel ausgeartet.

Von diesem Satze aus verstehen wir nun leicht die gewöhn
che Methode der Integration unserer Gleichung $C - Ap - Bq = 0$.
ese beginnt damit, dass man das folgende System von ge
öhnlichen Differentialgleichungen zu integrieren sucht
$dx : dy : dz = A : B : C$. Geometrisch heisst dies: Indem man von einem
liebigen Punkte immer in der hierdurch vorgeschriebenen Rich

lung $dx:dy:dz$ weiter geht, setzen sich die einzelnen Fortschreitungsrichtungen zu bestimmten Curven zusammen. Und zwar wird man insgesammt ∞^2 solcher Raumcurven erhalten, die man *die Charakteristiken der Differentialgleichung* nennt. Nun ist es sehr einfach, von hier aus alle *Integralflächen zu bestimmen*. Dieselben werden nämlich durch alle diejenigen Flächen gegeben, welche von einfach ∞ vielen Charakteristiken gebildet werden, also z. B. von den Charakteristiken, die man von den Punkten einer beliebigen Raumcurve auslaufen lässt. Es ist dies ohne Weiteres zu sehen. Zu ihnen tritt dann als „singuläre Lösung" noch die „Brennfläche" der von den Charakteristiken gebildeten Curvencongruenz; doch wollen wir hierauf nicht verweilen.

Dieser gewöhnlichen Theorie wollen wir nun die *Lie'sche Darstellung* gegenüberstellen. Nach ihr sind die Charakteristiken selbst bereits Integral-M_2, indem sich in den einzelnen Linienelementen der Curve Büschel von Flächenelementen aneinanderreihen, die alle der vorgelegten Gleichung $f=0$ genügen. Zu ihnen treten dann weiter als Integral-M_2 die Flächen, die von ∞^1 Charakteristiken gebildet werden. *Für alle diese Integral-M_2 können wir dann wieder den Satz aufstellen, dass eine jede derselben aus ∞^1 charakteristischen Streifen besteht.* Wir bezeichnen hier als *charakteristischen Streifen* jeden Streifen, d. h. jede Gesammtheit von ∞^1 Flächenelementen, die sich an 2 Nachbarcharakteristiken anschliesst; es ist leicht zu sehen,

Sinn, dass es überhaupt ∞^3 solcher charakteristischen Streifen gibt, da es ∞^2 Charakteristiken gibt, und jede ∞^1 benachbarte Charakteristiken hat. Unser ausgesprochenes Resultat, dass jede Integral-M_2 aus ∞^1 solchen charakteristischen Streifen besteht, ist ohne weiteres einleuchtend, sowohl was die Charakteristiken selbst betrifft, wie die Integralflächen.

ad c. Wir müssen nun die allgemeine Differentialgleichung $f(xyzpq)=0$ näher betrachten. Die Größen p u. q können, wie wir Coordinaten der Ebenen, den Punkt xyz ansehen. Ist dann für den bestimmten Punkt xyz die Gleichung $f(xyzpq)=0$ vorgeschrieben, so wird die Ebene noch ∞^1 fach angenommen können, d.h. jedem Punkte erscheint hier eine Kegelspitze zugeordnet. Die Integralflächen, welche die gewöhnliche Theorie sucht, sind dann dadurch bestimmt, dass sie in jedem ihrer Punkte von dem zugehörigen elementaren Kegel berührt werden.

Wir wollen nun mit die überhaupt einmal nach den Integral-M_1 fragen. Die einzelne Kegelspitze ist schon eine Integral-M_1. Dann können wir wieder noch andere Integral-M_1 angeben. Wir können z.B. den Punkt xyz längs einer beliebigen Raumcurve laufen lassen und hierbei diejenigen Flächenelemente der jedesmaligen Kegel zusammenrechnen, die sich an die Raumcurve anschmiegen. Schließlich kann man auch von einer beliebigen Fläche ausgehen und auf ihr alle Flächenelemente suchen, die unserer Gleichung $f=0$ genügen; diese werden auf der Fläche notwendig einen Streifen bilden, d.h. wieder eine Integral-M_1.

hiernach werden wir leicht durch „ausführbare Operationen“
jede Integration unbegrenzt viele „Streifen“ construieren können.
Nun aber zeigt sich, dass es unter denselben wieder ausgezeichnete Streifen gibt, die wir nach Analogie der vorhergehenden ja
le als charakteristische Streifen bezeichnen wollen. Als vorläufige Definition derselben wollen wir den folgenden Satz an die
Spitze stellen: Wir bekommen die charakteristischen Streifen,
indem wir auf den Integralflächen diejenigen Curven zie-
hen, welche in jedem ihrer Punkte als Tangente diejenige
Richtung haben, nach welcher der zugehörige elementare Ke-
gel von der Integralfläche berührt wird. Das Wichtigste aber
ist dieses:

Es zeigt sich, dass diese charakteristischen Streifen un-
abhängig von der einzelnen Integralfläche durch ein System
gewöhnlicher Differentialgleichungen definiert werden können,
und dass infolge dessen umgekehrt die Integralflächen aus den
charakteristischen Streifen aufgebaut werden können.

Um zunächst die irreparente Definition der Streifen
zu entwickeln, gehen wir von einem einzelnen Element aus
und markieren in ihm zunächst die Fortschreitungsrichtung
des elementaren Kegels, der von seinem Punkte ausläuft. Die
Gleichung dieses Elementarkegels wird für feste Grössen $x\,y\,z$
Ω. Gleichung $f(x\,y\,z,\ p\,q) = 0$ gegeben. Wir finden wir

die bezeichnete Fortschreitungsrichtung $dx : dy : dz$ für gegebene Werte x, y, z, p, q?

Die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial p} \cdot (p' - p) + \frac{\partial f}{\partial q} (q' - q) = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} \cdot p' + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot q' - \left(p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0$$

wird die Bedingung sein, dass ein Element p', q' durch die gesuchte Fortschreitungsrichtung hindurchgeht. Indem nun allgemein die Bedingung, dass ein Element $p' q'$ durch die Fortschreitungsrichtung $dx : dy : dz$ hindurchgeht, durch die Gleichung $dx \cdot p' + dy \cdot q' - dz = 0$ gegeben wird, finden wir durch Coefficientenvergleichung: $dx : dy : dz = \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : \left(\frac{\partial f}{\partial p} \cdot p + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot q\right)$. Dies gibt uns die

Fortschreitungsrichtung des Punktes, die wir zur Construction des charakteristischen Kreises zu wählen haben. — Nun wollen wir in dualistischer Weise verfahren. Wir wollen von irgend einer Ebene ausgehen; in ihr werden dann einfach unendlich viele Elemente unserer Gleichung $f = 0$ liegen, die sich an eine bestimmte Curve der Ebene anschmiegen. Sei $xyz pq$ eines dieser Elemente. Wir verlangen jetzt, die Tangentenrichtung der Curve vom Punkte xyz aus in der Ebene p, q zu bestimmen, indem wir uns fragen, wie wir die Grössen p und q ändern

Diese 3 Categorien wollen wir nun nach einander behandeln:
ad α. Der Fall der Gleichung $f(x,y,z)=0$ ist natürlich überaus einfach. Dieselbe stellt allgemein die Punkte einer Fläche dar. Indem die Grössen p u. q ganz beliebig sind, genügen dann unserer Gleichung alle Bündel von Flächenelementen, deren Mittelpunkte auf der Fläche $f(x\,y\,z)=0$ liegen. Wir können nun sehr leicht auch alle Integrale M_2 angeben:

1) Zuerst gehören zu ihnen die ∞^2 Bündel von Flächenelementen selbst, deren Mittelpunkte auf der Fläche liegen.

2). Wenn wir ferner auf unserer Fläche irgend eine Curve zeichnen und alle Elemente, die sich ihr anschmiegen, auswählen, so erhalten wir ebenfalls ein Integral M_2.

3) Endlich bilden die Elemente, die sich der gegebenen Fläche selbst anschmiegen, ein Integral M_2, welches wir als „singuläre Integral-M_2" bezeichnen. Im vorliegenden Falle kennen wir daher alle Integral-M_2 von vornherein.

Nun wollen sie noch bemerken, dass diese Gebilde, sofern wir von der singulären M_2 absehen, jedenfalls aus ∞^1 Streifen einer bestimmten Art zusammengesetzt sind. Es handelt sich um die Streifen, bez. Büschel von Elementen, die ein gemeinsames Linienelement der Fläche enthalten. Solche Streifen gibt es insgesammt ∞^3. Nun ist ohne Weiteres klar, wie die Integral-M_2 des einzelnen Flächenpunktes oder einer Curve auf der Fläche aus

olchen Tangentialbüscheln zusammengesetzt sind. Nur für die Flä
he $F=0$ selbst gilt Dieses nicht; Dieselbe nimmt dementsprechend eine
sondere Stellung ein. — Alle diese Bemerkungen, die an sich tri
ial erscheinen mögen, werden erst von Bedeutung, indem wir
i weiterem Falle unserer Differentialgleichungen betrachten, für
ren Verkommnisse sie einfachste Beispiele geben. —
B. Wir behandeln nun die in p, q lineare Gleichung $C - Ap - Bq = 0$.
ner sie wird jedem Punkte xyz eine bestimmte Elementenschaar
ugeordnet, nämlich alle Diejenigen Elemente, welche durch die
ortschreitungsrichtung $dx : dy : dz = A : B : C$ hindurchgehen, wie leicht
u übersehen ist. Mit anderen Worten: Die Gleichung $C - Ap - Bq = 0$
net jedem Punkte des Raumes ein Büschel von Flächenelemen
n zu. Wenn wir im Falle einer beliebigen Gleichung $f(xyzpq) = 0$
m Punkte xyz ausgehend einen Kegel finden werden, der von den
lementen pq umhüllt wird, so kann man bemerken, dass schon
ier dieser Kegel vorliegt, nur ist er ein Kegel erster Classe gerov
n, d. h. in ein Büschel ausgeartet.

Von diesem Satze aus verstehen wir nun leicht die gewöhn
che Methode der Integration unserer Gleichung $C - Ap - Bq = 0$.
ese beginnt damit, dass man das folgende System von ge
öhnlichen Differentialgleichungen zu integrieren sucht
$= dy : dz = A : B : C$. Geometrisch heisst dies: Indem man von einem
iebigen Punkte immer in der hierdurch vorgeschriebenen Rich

lung $dx : dy : dz$ weiter geht, setzen sich die einzelnen Fortschreitungsrichtungen zu bestimmten Curven zusammen. Und zwar wird man insgesammt ∞^2 solcher Raumcurven erhalten, die man *die Charakteristiken der Differentialgleichung* nennt. Nun ist es sehr einfach, von hier aus alle *Integralflächen zu bestimmen*. Dieselben werden nämlich durch alle diejenigen Flächen gegeben, welche von einfach ∞ vielen Charakteristiken gebildet werden, also z. B. von den Charakteristiken, die man von den Punkten einer beliebigen Raumcurve ausgehen lässt. Es ist dies ohne Weiteres zu sehen. Zu ihnen tritt dann als „singuläre Lösung" noch die „Brennfläche" der von den Charakteristiken gebildeten Curvencongruenz; doch wollen wir hierauf nicht verweilen.

Dieser gewöhnlichen Theorie wollen wir nun die *Lie'sche Auffassung* gegenüberstellen. Nach ihr sind die Charakteristiken selbst bereits Integral-M_2, indem sich in den einzelnen Linienelementen der Curve Büschel von Flächenelementen aneinanderreihen, die alle der vorgelegten Gleichung $f = 0$ genügen. Zu ihnen treten dann weiter als Integral-M_2 die Flächen, die von ∞^1 Charakteristiken gebildet werden. *Für alle diese Integral-M_2 können wir dann wieder den Satz aufstellen, dass eine jede derselben aus ∞^1 charakteristischen Streifen' besteht.* Wir bezeichnen hier als *charakteristischen Streifen* je den Streifen, d. h. jede Gesammtheit von ∞^1 Flächenelementen, die sich an 2 Nachbarcharakteristiken anschliesst; es ist leicht zu sehen,

hier, dass es überhaupt ∞^3 solche charakteristischen Streifen gibt, da es ∞^3 Charakteristiken gibt, und jede ∞^1 benachbarte Charakteristiken hat. Unser aufgestelltes Resultat, dass jede Integral-M_2 aus ∞^1 solchen charakteristischen Streifen besteht, ist ohne weiteres evident, sowohl was die Charakteristiken selbst betrifft, wie die Integralflächen.

dd c. Wir müssen nun die allgemeine Differentialgleichung $f(xyzpq)=0$ näher betrachten. Die Grössen p u. q können, wie wir Coordinaten der Ebenen durch den Punkt xyz ansahen. Ist dann für den bestimmten Punkt xyz die Gleichung $f(xyzpq)=0$ vorgeschrieben, so wird die Ebene noch ∞^1 Lagen annehmen können, d.h. jedem Punkte erscheint hier eine Kegelspitze zugeordnet. Die Integralflächen, welche die gewöhnliche Theorie sucht, sind dann dadurch bestimmt, dass sie in jedem ihrer Punkte von dem zugehörigen elementaren Kegel berührt werden.

Wir wollen nun mit Lie überhaupt einmal nach den Integral-M_1 fragen. Die einzelne Kegelspitze ist schon eine Integral-M_1. Diese können wir wieder zu andere Integral-M_1 zusammensetzen. Wir können z.B. den Punkt xyz längs einer beliebigen Raumcurve laufen lassen und hierbei diejenigen Flächenelemente der jedesmaligen Kegel zusammenrechnen, die sich an die Raumcurve anschmiegen. Schliesslich kann man auch von einer beliebigen Fläche ausgehen und auf ihr alle Flächenelemente suchen, die unserer Gleichung $f=0$ genügen; diese werden auf der Fläche notwendig einen Streifen bilden, d.h. wieder eine Integral-M_1.

Hiernach werden wir leicht durch „ausführbare Operationen" d.h. ohne jede Integration unbegrenzt viele „Streifen" construieren können. Nun aber zeigt sich, dass es unter denselben wieder ausgezeichnete Streifen gibt, die wir nach Analogie der vorhergehenden Fälle als <u>charakteristische Streifen</u> bezeichnen wollen. Als vorläufige Definition derselben wollen wir den folgenden Satz an die Spitze stellen: <u>„Wir bekommen die charakteristischen Streifen, indem wir auf den Integralflächen diejenigen Curven ziehen, welche in jedem ihrer Punkte als Tangente diejenige Richtung haben, nach welcher der zugehörige elementare Kegel von der Integralfläche berührt wird.</u> Das Wichtigste aber ist dieses:

<u>„Es zeigt sich, dass diese charakteristischen Streifen unabhängig von der einzelnen Integralfläche durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen definiert werden können, und dass infolge dessen umgekehrt die Integralflächen aus den charakteristischen Streifen aufgebaut werden können.</u>

Um zunächst die invariante Definition der Streifen zu entwickeln, gehen wir von einem einzelnen Element aus und markieren in ihm zunächst die Fortschreitungsrichtung des elementaren Kegels, der von seinem Punkte ausläuft. Die Gleichung dieses Elementarkegels wird für feste Grössen xyz durch die Gleichung $f(xyz, pq) = 0$ gegeben. Wir finden nun

die bezeichnete Fortschreitungsrichtung $dx : dy : dz$ für gegebene Werte x, y, z, p, q?

Die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot (p' - p) + \frac{\partial f}{\partial q} (q' - q) = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} \cdot p' + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot q' - \left(p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0$$

wird die Bedingung sein, dass ein Element p', q' durch die gesuchte Fortschreitungsrichtung hindurchgeht. Indem nun allgemein die Bedingung, dass ein Element $p' q'$ durch die Fortschreitungsrichtung $dx : dy : dz$ hindurchgeht, durch die Gleichung $dx \cdot p' + dy \cdot q' - dz = 0$ gegeben wird, finden wir durch Coefficientenvergleichung: $dx : dy : dz = \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : \left(\frac{\partial f}{\partial p} \cdot p + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot q\right)$. Dies giebt uns die

<u>Fortschreitungsrichtung des Punktes</u>, die wir zur Construction des charakteristischen Streifens zu wählen haben. — Nun wollen wir in dualistischer Weise verfahren. Wir wollen von irgend einer Ebene ausgehen; in ihr werden dann einfach unendlich viele Elemente unserer Gleichung $f = 0$ liegen, die sich an eine bestimmte Curve der Ebene anschmiegen. Sei $xyzpq$ eines dieser Elemente. Wir verlangen jetzt, die Tangentenrichtung der Curve vom Punkte xyz aus in der Ebene p, q zu bestimmen, indem wir uns fragen, wie wir die Grössen p und q ändern

müssen, damit sich die Ebene pq um die Tangente dreht. Eine einfache Rechnung ergibt dann:

$$dp : dq = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial y} + q\cdot\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Die Definition der charakteristischen Streifen, die wir fortan zu Grunde legen wollen, sei nun diese:

<u>Wir erhalten einen charakteristischen Streifen unserer Gleichung $f(xyzpq)=0$, indem wir in der Weise unter den Flächenelementen unserer Gleichung vorwärts gehen, dass wir für den Punkt des Elementes die berechnete Fortschreitungsrichtung und für die Ebene desselben die berechnete Drehrichtung in Anwendung bringen.</u> Dass wir auf solche Weise gerade die charakteristischen Streifen auf den Integralflächen erhalten, von denen wir zuerst sprachen, wird erst hinterher zu beweisen sein.

Wir setzen nun unter vorläufiger Einführung des Proportionalitätsfactors ϱ für die Änderung der Grössen $xyzpq$ bei dieser Bewegung aus d. p. 513. berechneten Bestimmungsgleichungen die fortlaufende Proportion zusammen:

$$dx : dy : dz : dp : dq = \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : (p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}) : \varrho\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) : \varrho\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Nun soll aber das Element in der Gleichung $f(xyzpq)=0$ genügen, folglich muss:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial p}dp + \frac{\partial f}{\partial q}dq = 0 \text{ sein.}$$

Setzen wir hierin die proportionalen Glieder ein, so finden wir für ϱ den Wert $\varrho = -1$.

Unsere charakteristischen Streifen werden also durch die Differentialgleichungen:

$$dx : dy : dz : dp : dq = \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : \left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right) : -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) : -\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

definiert sein.

Was aber die Bedeutung dieser Streifen für die Integralflächen angeht, so stellen wir die folgende Behauptung auf:

Kennt eine Integralfläche mit einem charakteristischen Streifen auch nur ein Element gemeinsam, dann enthält sie den Streifen nach seiner ganzen Ausdehnung.

Man erzeugt geradezu alle Integralflächen, von der „singulären Lösung“ abgesehen, die wir hier wieder bei Seite lassen, und auf die wir kommen noch kurz zu sprechen kommen, indem man die charakteristischen Streifen zusammennimmt, die von den Elementen irgend eines anderen der Gleichung $f = 0$ genügenden Streifens auslaufen.

Hieraus ergibt sich folgende Überlegung:

Es gibt an sich ∞^5 Flächenelemente, der Gleichung $f = 0$ genügen von ihnen ∞^4 Elemente. Diese letzteren reihen sich je zu ∞^1 in der angegebenen Weise zu charakteristischen Streifen zusammen, sodass wir insgesamt ∞^3 charakteristische Streifen erhalten. Der Kern der hier in Frage stehenden Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung besteht dann

im Folgenden: Zunächst kommt es darauf an, die ∞^3 ∞ vielen charakteristischen Streifen zu bilden, welche sich aus den ∞^4 Elementen der Gleichung zusammensetzen lassen. Es hat dann keine Schwierigkeit diese Streifen zu Integralflächen zusammenzufassen.

Wenn wir diese Theorie in den Lehrbüchern nachsehen, so werden wir finden, dass ein Ausschluss an Monge statt von charakteristischen Streifen gewöhnlich von „Charakteristiken" gesprochen wird, d. h. es wird nur von der Curve, nicht aber von den zugehörigen Flächenelementen gesprochen. Gerade in der Einführung des „charakteristischen Streifens" haben wir den wesentlichen Fortschritt der Lie'schen Auffassung zu erblicken.

Nun ist die Frage, wie wir unsere obigen Sätze beweisen werden. Zu dem Zwecke wollen wir der bequemen Berechnung wegen die Gleichung $f(xyzpq)=0$ nach z aufgelöst denken, sodass wir erhalten $z-\psi(xyzpq)=0$. (Damit schliessen wir also die Fälle aus, dass z in $f=0$ überhaupt nicht vorkommt, diese Fälle sind ohne Weiteres direkt zu behandeln). Dann gehen unsere Differentialgleichungen für den charakteristischen Streifen über in:

$$dx : dy : dz : dp : dq = \frac{\partial\psi}{\partial p} : \frac{\partial\psi}{\partial q} : p\frac{\partial\psi}{\partial p} + q\frac{\partial\psi}{\partial q} : -\frac{\partial\psi}{\partial x} - q\frac{\partial\psi}{\partial z} : -\frac{\partial\psi}{\partial y} - p\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Es sei nun $z-\varphi(xy)=0$ eine Integralfläche unserer Gleichung $f=0$.

Wir werden darauf hin setzen können:

$$dz = p\,dx + q\,dy$$
$$dp = r\,dx + s\,dy$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$ woselbst p, q die ersten, r, s, t die zweiten partiellen Differentialgleichungen von z bezeichnen mögen. Haben wir xyz ein Flächenelement genannt, so wollen wir den Inbegriff von $xyzpqrst$ als eine <u>Flächencalotte</u> bezeichnen; derselbe legt für den einzelnen Punkt der Integralfläche nicht nur die Tangentialebene, sondern auch die Krümmung fest. Wir wollen jetzt untersuchen, was sich über die Flächencalotte einer Integralfläche sagen lässt, die sich an ein gegebenes Flächenelement anschmiegt.

Aus der gegebenen Gleichung $z - \psi(xypq) = 0$ folgt: [Montag 27. II. (2 97.)]
$dz = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial p}dp - \frac{\partial\psi}{\partial q}dq$. Indem wir dann für dz, wie dp, dq die Werte der letzten Seite einsetzen, erhalten wir:

$$p\,dx + q\,dy = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot(r\,dx + s\,dy) + \frac{\partial\psi}{\partial q}\cdot(s\,dx + t\,dy).$$

Diese Gleichung muss dann eine Identität darstellen, d.h. die Coefficienten von dx und dy müssen für sich beiderseits gleich sein. Dies liefert uns die beiden Gleichungen:

1) $p = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial p}r + \frac{\partial\psi}{\partial q}\cdot s$

2) $q = \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial p}s + \frac{\partial\psi}{\partial q}\cdot t$

Aus diesen haben wir die 3 Grössen

r, s, t zu bestimmen; wir erhalten daher einfach ∞ viele Lösungssysteme für dieselben. Dieses besagt aber, dass an dasselbe Element $xyzpq$ sich einfach ∞ viele Calotten r, s, t anschliessen, welche unserer Gleichung genügen.

Um uns nun eine nähere Vorstellung von diesen ∞ vielen Calotten zu verschaffen, betrachten wir ein Nachbarelement $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $p+dp$, $q+dq$ und fragen uns, wann dasselbe sich an eine dieser Flächencalotten anschmiegt. Es gesellen sich zu unseren letzten beiden Gleichungen dann noch die folgenden beiden:

$$3)\quad dp = r\,dx + s\,dy,$$

$$4)\quad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Die Gesammtheit dieser 4 Gleichungen, welche die Beziehungen der Calotte r, s, t zu einem Nachbarelemente darlegen, sollen nun auf ihre Auflösbarkeit (was die r, s, t angeht) untersucht werden. Wir verfahren einfach so, dass wir aus den Gleichungen 1 u. 3 resp. 2 u. 4 die Grössen r u. s, resp. die Grössen p u. t wirklich berechnen. Es ergibt sich:
aus Gleichung 1 u. 3

$$r = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial q}\,dp - \left(p - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dy}{N},$$

$$s = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot dp + \left(x - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx}{N},$$

und aus Gleichung 2 u. 4

$$s = \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right) dq - \left(q - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dy}{N};$$

$$t = \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial p} dq + \left(q - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dx}{N}, \text{ wo allemal } N = \frac{\partial \psi}{\partial q} dx - \frac{\partial \psi}{\partial p} dy \text{ ist}$$

Sollen nun unsere 4 Gleichungen mit einander verträglich sein, so müssen die beiden Werte für s übereinstimmen, d. h. es muss:

$$\left(p - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx + \left(q - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dy - \frac{\partial \psi}{\partial p} dp - \frac{\partial \psi}{\partial q} dq = 0 \text{ sein.}$$

Diese Gleichung besagt aber einfach, dass das Nachbarelement $x + dx$, $y + dy$ etc. der Ausgangsgleichung $z - \psi(x\,y\,p\,q) = 0$ genügt. Sollen daher unsere 4 Gleichungen auflösbar sein, so muss das Nachbarelement, gleich dem Anfangselement, der vorgelegten partiellen Differentialgleichung genügen.

Doch müssen wir noch eine einschränkende Bedingung hinzufügen, wenn die Werte von x, s, t dann weiteres brauchbar sein sollen; es muss der Nenner N von 0 verschieden sein.

Ist aber diese Bedingung erfüllt, so werden wir sagen können: Ein jedes Nachbarelement unserer Gleichung $f = 0$ liefert ganz bestimmte Werte von x, s und t, d. h. gehört einer der ∞ vielen Flächencurven an.

Wenn aber der Nenner N verschwindet, so werden die Werte für x, s, t

allgemein zu reden zu gross, und in solchem Falle ist gewiss nichts neues weiteres auszusagen, indem wir uns an einer singulären Stelle der Integralfläche befinden; wir verfolgen die hier vorliegenden Möglichkeiten nicht weiter.*) Anders aber ist es, wenn für $N = 0$ auch die Zähler verschwinden, so dass wir für s, r, t die Form $\frac{0}{0}$ d.h. einen unbestimmten Wert erhalten. Das Verschwinden des Zählers mit $N = 0$ zusammen führt uns aber zu den Bedingungsgleichungen:
$dx : dy : dp : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q} : p - \frac{\partial \Psi}{\partial x} : q - \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, in denen wir sogleich die Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen wieder erkennen.

Wenn daher das Nachbarelement auf einem charakteristischen Streifen gewählt ist, so tritt kein Unendlichwerden, sondern ein Unbestimmtwerden von r, s, t ein. Wir schliessen, dass das Nachbarelement von sämmtlichen Flächencalotten der Gleichung berührt werde.

Mit diesem Satze ist die Grundlage gegeben, aus der sich jetzt der Nachweis unserer Behauptungen der vorigen Stunde ergeben wird. Gehen wir nämlich von einem beliebigen Flächenelemente x, y, z, p, q aus und construiren zu ihm irgend eine Integralfläche, so wird dort eine hiemit bestimmte Flächencalotte r, s, t diesem Elemente zugeordnet sein. Die Flächencalotte enthält nun auch das Nachbarelement des charakteristischen Streifens, wie wir soeben sahen. Von diesem Nachbarelement können wir nun in derselben Weise weiter gehen, da

*) Ich gehe ohne Beweis an, dass ein solcher Streifen im allgemeinen eine Rückkehrcurve der von ihm ausgehenden Integralfläche ist.

zu ihm gehörende Flächencalotte der Integralfläche wird das nächstfolgende Nachbarelement des charakteristischen Streifens enthalten und so fort. Es folgt daher, dass der ganze charakteristische Streifen auf der Integralfläche liegt und somit alle Integralflächen, welche ein Element $xyzpq$ gemein haben, auch den zugehörigen charakteristischen Streifen gemein haben, welcher von diesem Element ausläuft.

Wir wollen nun von einem Element $xyzpq$ zu einem beliebigen Nachbarelemente übergehen, welches mit ihm vereinigt liegt, und der Gleichung $N = \frac{\partial V}{\partial p}\,dx - \frac{\partial V}{\partial q}\,dy = 0$ genügt. Von diesem Nachbarelement wird ein neuer charakteristischer Streifen auslaufen. Dieser letztere wird dann mit dem vom Anfangselement auslaufenden charakteristischen Streifen nach einer ganzen Erstreckung vereinigt liegen. Denn man kann doch stets, wie wir zeigten, eine Flächencalotte construiren, welche das ursprüngliche Element und das Nachbarelement enthält. Erstreckten wir die Calotte zu einer beliebigen Integralfläche, so wird diese die beiden charakteristischen Streifen enthalten, welche von diesen Elementen auslaufen. Die beiden Streifen laufen also auf der Fläche nebeneinander her, d. h. eben sie liegen in ihrem Gesammtverlauf vereinigt. Aus diesen Sätzen ergibt sich nun sofort die Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichung $z - \Psi(xyzpq) = 0$, die wir in Aussicht nahmen. Denken wir uns zunächst die charakteristischen Streifen unserer Integration ihrer gewöhnlichen Differentialgleichung bestimmt. Wir finden dann die allgemeine Integralfläche unserer Gleichung

allgemein zu reden ∞ gross, und in solchem Falle ist gewiss nichts mehr weiteres auszusagen, indem wir uns an einer singulären Stelle der Integralfläche befinden; wir verfolgen die hier vorliegenden Möglichkeiten nicht weiter.*) Anders aber ist es, wenn für $N=0$ auch die Zähler verschwinden, so dass wir für s, r, t die Form $\frac{0}{0}$ d.h. einen unbestimmten Wert erhalten. Das Verschwinden des Zählers mit $N=0$ zusammen führt uns aber zu den Bedingungsgleichungen:
$dx : dy : dp : dq = \frac{\partial N}{\partial p} : \frac{\partial N}{\partial q} : p - \frac{\partial N}{\partial x} : q - \frac{\partial N}{\partial y}$, in denen wir sogleich die Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen wieder erkennen.

Wenn daher das Nachbarelement auf einem charakteristischen Streifen gewählt ist, so tritt kein Unendlichwerden, sondern ein Unbestimmtwerden von r, s, t ein. Wir schliessen, dass das Nachbarelement von sämmtlichen Flächencalotten der Gleichung berührt werde.

Mit diesem Satze ist die Grundlage gegeben, aus der sich jetzt der Nachweis unserer Behauptungen der vorigen Stunde ergeben wird. Gehen wir nämlich von einem beliebigen Flächenelemente x, y, z, p, q aus und construiren zu ihm irgend eine Integralfläche, so wird dort eine hiemit bestimmte Flächencalotte r, s, t diesem Elemente zugeordnet sein. Die Flächencalotte enthält nun auch das Nachbarelement des charakteristischen Streifens, wie wir soeben sahen. Von diesem Nachbarelement können wir nun in derselben Weise weiter gehen, da

*) Ich gebe ohne Beweis an, dass ein solcher Streifen im allgemeinen eine Rückkehrcurve der von ihm ausgehenden Integralfläche ist.

zu ihm gehörende Flächencalotte der Integralfläche wird das nächstfolg
le Nachbarelement des charakteristischen Streifens enthalten und so
fort. Es folgt daher, dass der ganze charakteristische Streifen auf der
Integralfläche liegt und somit alle Integralflächen, welche ein Element
$xyzpq$ gemein haben, auch den zugehörigen charakteristischen Streifen ge-
mein haben, welcher von diesem Element ausläuft.

Wir wollen nun von einem Element $xyzpq$ zu einem beliebigen Nach-
barelemente übergehen, welches mit ihm vereinigt liegt, und der Gleichung
$N = \frac{\partial \Psi}{\partial p} dx - \frac{\partial \Psi}{\partial q} dy \geq 0$ genügt. Von diesem Nachbarelement wird ein neuer
charakteristischer Streifen auslaufen. Dieser letztere wird dann mit dem
vom Anfangselement auslaufenden charakteristischen Streifen nach sei-
ner ganzen Erstreckung vereinigt liegen. Denn man kann doch stets,
wie wir zeigten, eine Flächencalotte construiren, welche das ursprüng-
liche Element und das Nachbarelement enthält. Erweitern wir die
Calotte zu einer beliebigen Integralfläche, so wird diese die beiden
charakteristischen Streifen enthalten, welche von diesen Elementen
auslaufen. Die beiden Streifen laufen also auf der Fläche nebenein-
der her, d. h. eben sie liegen in ihrem Gesammtverlauf verei-
nigt. Aus diesen Sätzen ergibt sich nun sofort die Integrationsmetho-
de partieller Differentialgleichung $z - \Psi(x\,y\,p\,q) = 0$, die wir in Aus-
sicht nahmen. Denken wir uns zunächst die charakteristischen Streifen
durch Integration ihrer gewöhnlichen Differentialgleichung bestimmt,
so haben dann die allgemeine Integralfläche unserer Gleichung

$z - \Psi(x\,y\,p\,q) = 0$ *), indem wir alle möglichen Streifen aufzählen, für welche $\Psi = 0$ sein soll und von den verschiedenen Elementen des jedesmaligen Streifens aus jeden zugehörigen charakteristischen Streifen auslaufen lassen. Die Gesammtheit derselben überdeckt dann eine zugehörige Integralfläche und wir erhalten so die allgemeine Integralfläche, die wir suchten.

Hiermit ist daher die Integration der vorgelegten partiellen Differentialgleichung zurückgebracht auf die Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, durch welches die charakteristischen Streifen definiert sind. Freilich bekommen wir solcherweise nur die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung; ausgeschlossen sind die singulären Lösungen, (wenn es solche gibt). Dieselben verbergen sich in die „singulären Elemente" der Gleichungen, die dadurch definirt sind, dass in den Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen:

$$dx : dy : dp : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q} : p - \frac{\partial \Psi}{\partial x} : q - \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$ die rechten Seiten

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p},\ \frac{\partial \Psi}{\partial q},\ p - \frac{\partial \Psi}{\partial x},\ q - \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$ sämmtlich verschwinden. Es bleibt nie einzelnen Falle zu untersuchen, — allgemein lässt sich aber nichts sagen, ob diese Elemente für sich eine singuläre Lösung bilden oder nicht. Als Literaturangabe betreffend singuläre Lösungen sei auf eine Arbeit von Darboux in den Mémoires des Savants étrangers Bd. 27 (1880) hingewiesen.

*) und natürlich jede einzelne Integralfläche unendlich oft!

Fragen wir uns nun nach dem Werth der angeführten Integrationsmethode. In den Lehrbüchern findet man gewöhnlich die Differentialgleichungen eingetheilt in solche, die man integrieren kann, d.h. denen man durch die anderweitig bekannten elementaren Functionen genügen kann, und in solche, bei denen die Integration nicht möglich ist, sei es, dass man zufälligerweise nicht im Stande war, das Integral in explicierter Form zu finden, sei es, dass die Differentialgleichung in der That durch die einfachen Functionen (sin, cos, log, e^z etc) nicht befriedigt werden kann. Der wissenschaftliche Standpunkt ist jedenfalls der, dass man die Differentialgleichung überhaupt als Definition einer Function ansieht und nur eventuell untersucht, ob dieselbe durch bekannte Functionen ausdrückbar ist oder nicht. In diesem Sinne ist auch unsere Methode zu beurtheilen. Der Werth der Zurückführung der Integralflächen auf die charakteristischen Kreisen ist gewiss nicht der, dass es hierdurch leichter wird die Integralflächen zu berechnen, sei es durch die traditionellen Methoden oder durch directe Reihenentwickelung. Es wäre nicht schwer, specielle Beispiele aufzustellen, in denen dieses keineswegs der Fall ist. Vielmehr hat man von den Kreisen aus eine bessere Einsicht in die Erzeugung der Integralflächen: man sieht, dass die Function $z = \varphi(xy)$ zweier Variabelen einerseits abhängt von dem transcendenten Verlaufe der durch die Kreisen definierten Functionen einer

Variabeln und andererseits von der willkürlichen Aneinanderreihung dieser Streifen.

Wie verhält sich nun die Theorie der charakteristischen Streifen zu der Theorie der partiellen Differentialgleichungen von Lagrange, wie sie überall in den Lehrbüchern gegeben wird? Wenn eine Differentialgleichung $z - \psi(x\,y\,p\,q) = 0$ gegeben ist, so sucht man nach Lagrange zunächst eine Funktion $z = \varphi(x\,y\,z\,\alpha\,\beta)$ mit zwei willkürlichen Parametern α, β zu bekommen, die der vorgelegten Gleichung genügt. Diese Funktion $z = \varphi(x\,y\,z\,\alpha\,\beta)$ nennt man ein vollständiges Integral der Gleichung. Indem aber jede Fläche der 2fach ∞ Schaar $z = \varphi(x\,y\,z\,\alpha\,\beta)$ 2fach ∞ viele Elemente darstellt, ergibt sich als Sinn der vollständigen Lösung von Lagrange dieser, dass wir versuchen sollen die 4fach ∞ vielen Elemente der Gleichung $z - \psi(x\,y\,p\,q) = 0$ überhaupt auf irgend eine Weise auf 2fach ∞ viele Flächen zu ordnen.

Wenn dieses nun gelungen ist, so bildet man nach Lagrange alle Umhüllungsflächen von ∞^1 Flächen $z = \varphi$ des vollständigen Integrals. Man setze einfach $\beta = w(\alpha)$ d. h. gleich einer beliebigen Funktion von α, sodass man erhält: $z = \varphi(x, y, \alpha, w(\alpha))$. Hierdurch wird eine einfach ∞ Reihe von Integralflächen aus der Gesammtschaar ausgewählt. Nun findet man die Schnittcurve jeder dieser Integralflächen mit der benachbarten, indem man zu $z = \varphi(x, y, \alpha, w(\alpha))$ die Gleichung $z = \varphi(x, y, \alpha + d\alpha, w(\alpha + d\alpha))$ hinzunimmt. An Stelle der letzteren lässt sich in Rücksicht auf

die erste Gleichung setzen die Gleichung $0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$. Aus $z = \varphi(x, y, \alpha, \omega(\alpha))$ und $0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ eliminirt man dann α und erhält in solcher Weise das allgemeine Integral.

Endlich nimmt Lagrange noch die Umhüllungsfläche aller $z = \varphi(x, y, \alpha, \beta)$ hinzu, die durch die Gleichungen: $z = \varphi$, $0 = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$, $0 = \frac{\partial \psi}{\partial \beta}$ bestimmt ist. Dieselbe bildet die singuläre Lösung nach Lagrange.

Dieser Ideengang von Lagrange hängt nun in der Weise mit unserer allgemeinen Theorie zusammen, dass wir sagen: Je 2 benachbarte Elemente des vollständigen Integrals haben einen charakteristischen Streifen gemein, und wenn wir das allgemeine Integral durch ∞ viele Flächen des vollständigen Integrals umhüllen, so bedeutet dies eben, dass wir diese allgemeinen Flächen aus lauter charakteristischen Streifen aufbauen.—

Blicken wir nun auf unsere letzten Entwickelungen nochmals zurück. Dieselben bezogen sich auf die folgenden 3 Formen der partiellen Differentialgleichung: 1) $f(xyz) = 0$ 2) $C - Ap - Bq = 0$ und 3) allgemein $f(xyzpq) = 0$. Wenn wir diese 3 Fälle mit einander vergleichen, so werden wir in ihnen das Gemeinsame erkennen, dass wir stets ∞^3 charakteristische Streifen hatten, von denen je ∞^1 richtig aneinandergereiht eine Integral M_2 ergaben. Im Falle 1 hatten wir die „Elementenbüschel", im Falle 2 die sich an 2 Nachbarcharakteristiken anschliessenden Streifen, im Falle 3 die durch die bestimmten gewöhnlichen

Differentialgleichungen definirten Streifen als die charakteristischen Streifen erkannt. Den tieferen Grund dieser Parallelisirung der 3 Fälle erkennen wir mit Lie in dem Umstande, dass 2 beliebige partielle Differentialgleichungen erster Ordnung immer durch Berührungstransformationen in einander verwandelt werden können (wobei dann die charakteristischen Streifen ihre Bedeutung behalten), – oder mit anderen Worten, dass eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung gegenüber der Gruppe der Berührungstransformationen keine absolute Invariante besitzt.

Haben wir aber einmal dieses Theorem als bewiesen vorangestellt, so sehen wir mit Lie sofort, dass wir die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung geradezu von der einfachsten derartigen Gleichung $Z=0$ ablesen können, indem wir die Integral-M_2 dieser letzten Gleichung uns vorstellen und alle Eigenschaften derselben auffassen, die bei Berührungstransformationen erhalten bleiben müssen. Diese Integral-M_2 werden aber bekanntlich durch alle Flächenelemente in einem Punkte der Ebene $r=0$ oder alle Flächenelemente, die sich einer Curve auf $Z=0$ anschmiegen, dargestellt, endlich von der Ebene $Z=0$ selbst. Diese Auffassung ist von Lie zuerst mitgetheilt in den Göttingen Nachrichten vom Oktober 1872.

Indem wir hiermit die Betrachtung der allgemeinen Theorie abschliessen, gehen wir zu der Beziehung derselben zur Linien- u. Kugelgeometrie über. Wir knüpfen damit wieder an die Lie'sche Arbeit in Ann. 5 an.

Was zunächst die Liniengeometrie betrifft, so können wir doch

eine Liniencongruenz und einen Liniencomplex betrachten. Eine Liniencongruenz stellt uns insgesammt ∞^2 gerade Linien vor, während ein Liniencomplex für jeden Raumpunkt einen Kegel von geraden Linien, insgesammt also ∞^3 gerade Linien enthält. Wir behaupten nun, dass wir beide Gebilden eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung verbinden können. Sie ist wieder ein Gedanke von Lie. Wir können nämlich verlangen, dass sich im ersten Falle das Flächenelement stets an eine gerade Linie der Congruenz anschmiegen soll, und dass im zweiten Falle das Flächenelement den von seinem Punkte ausgehenden Complex-Kegel berühren soll. Das erste Mal werden wir daher zu einer linearen, das zweite Mal zu einer allgemeinen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen x, y, z, p, q geführt. Die Charakteristiken im ersten Falle sind dann die geraden Linien der Congruenz selbst, die Integralflächen aber die windschiefen Flächen, die sich aus den Linien der Congruenz bilden lassen, und also bilden die Charakteristiken auf diesen Integralflächen zugleich Haupttangentencurven.

Dies letzte Theorem gilt nun auch für die Liniencomplexe; auch hier bilden die Charakteristiken auf den Integralflächen, die zu den Liniencomplexen gehören, Haupttangentencurven. Wie werden wir dies erkennen? Zu dem Zwecke wollen wir zunächst den Begriff einer Complexcurve erklären; unter derselben verstehen wir eine solche Curve, die von einfach ∞ vielen Complexgeraden umhüllt wird. Wir können uns ihre Entstehung in der Weise vorstellen, dass wir

von einem beliebigen Punkte längs einer der ausstrahlenden Com-
plexgeraden um ein Linienelement fortschreiten, dann von dem End-
punkte des Linienelementes längs einer benachbarten von dem End-
punkte auslaufenden Complexgeraden um ein folgendes Element
u. so fort. Man übersieht dann sofort, dass alle Streifen der partiel-
len Differentialgleichung, welche Complexstreifen sind, d. h. wel-
che sich an eine Complexcurve anlehnen, Schmiegungsstreifen
sind, indem die Osculationsebene der Curve in einem beliebigen
ihrer Punkte immer zugleich Tangentialebene an den ausstrahlen-
den Complexkegel ist. Insbesondere sind nun die charakteristischen
Streifen Beispiele von Complexstreifen, darum sind auch sie Schmie-
gungsstreifen und also Haupttangentencurven der Integralflächen.

Sie hat diese Verhältnisse in Annalen V noch weiter ent-
wickelt. Ist es überhaupt ein altes Problem, partielle Differen-
tialgleichungen 1. Ordnung aufzustellen, deren charakteristische
Streifen Haupttangentialcurven sind, so zeigt sie vor allem,
dass diese Differentialgleichungen durch die Differentialgleichungen
der Liniencongruenzen und Linienscomplexe erschöpft sind. Fer-
ner untersucht sie bei 2 Linienscomplexen, was es geometrisch heisst,
wenn sie gemeinsame Integralflächen haben. Drittens beschäftigt
sie sich mit der Integration der Linienscomplexe 2. Grades. Diese
Untersuchungen habe ich dann selbst in Ann. 5 in der Arbeit: Ueber
gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichun-

gen in analytischer Form zum Abschluss gebracht.

Wir wollen doch auch ein specielles Beispiel, welches [Dienstag 28.I.9. sich auf die Theorie der partiellen Differentialgleichung des Liniencomplexes bezieht, etwas näher betrachten. Als solches wählen wir den tetraedralen Complex aus. Derselbe ist, wie wir wissen, bestimmt durch die Gleichung $a p_{12} p_{34} + b p_{13} p_{42} + c p_{14} p_{23} = 0$ und besteht aus allen geraden Linien, die die Seitenebenen eines Tetraeders nach constantem Doppelverhältniss schneiden. Nehmen wir dieses Tetraeder als xyz-Coordinatensystem, d.h. führen wir unhomogene Schreibweise ein, so liefert die genannte Gleichung:

$$a(x-x)(yz'-y'z)+b(y'-y)(zx'-z'x)+c(z'-z)(xy'-x'y)=0.$$

Setzen wir für x', y', z' ein $x+dx, y+dy, z+dz$, die Coordinaten eines Nachbarpunktes zu xyz, so erhalten wir die Gleichung:

$$a\,dx(y\,dz-z\,dy)+b\,dy(z\,dx-x\,dz)+c\,dz\cdot(x\,dy-y\,dx)=0,$$

oder geordnet: $(b-c)x\,dy\,dz+(c-a)y.dz\,dx+(a-b)z\,dx.dy=0.$

Diese Gleichung liefert uns bei festgehaltenem xyz den Kegel von Fortschreitungsrichtungen, der von dem Punkte xyz in unserem Complex ausstrahlt. Wir wollen nun die Tangentialgleichung dieses Kegels bestimmen. Dieselbe finden wir in derselben Weise, als wenn wir in letzter Gleichung dx, dy, dz als homogene Punktcoordinaten auffassen und dann die Gleichung des „Kegelschnittes" in ebenen Liniencoordinaten u.s.w. mit der Bedingung $u\,dx+v\,dy+w\,dz=0$ aufstellen würden, d.h. durch Nullsetzen der geänderten Deter-

minante der Coefficienten:

$$\begin{vmatrix} 0 & p-h,z & (c-z,y & u \\ (a-b)z & : & (b-c)x & v \\ (c-a)y & (b-c)x & 1 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Wie aus den Verhältnissen der Grössen $dx : dy : dz$, die der obigen Gleichung genügen, die Fortschreitungsrichtungen des Kegels folgen, so wird das Verhältniss der Grössen $u : v : w$, die der letzten Gleichung genügen, die Tangentialebenen des Kegels bestimmen. Diese Determinantengleichung stellt uns dann zugleich die gesuchte partielle Differentialgleichung dar, indem wir in derselben für u, v, w noch resp. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z}$ oder auch $p, q, -1$ einsetzen.

Fragen wir uns nun, wie wir diese Differentialgleichung integrieren. Es ist am einfachsten, zu dem Zweck wieder an die erste Gleichung des Kegels anzuknüpfen, die wir schreiben wollen:

$$(b-c).\frac{dy\,dz}{yz} + (c-a)\frac{dz\,dx}{zx} + (a-b)\frac{dx\,dy}{xy} = 0$$

Man macht nun die Substitution: $\log x = \xi, \log y = \eta, \log z = \zeta$, d.h. eine Punkttransformation, die den Raum xyz in den Raum $\xi\eta\zeta$ verwandelt, und erhält:

$$(b-a)\,dy\,d\xi + (c-a)\,d\xi\,d\xi + (a-b)\,d\xi\,d\eta = 0.$$

Dann wird man sich mit der einfacheren Aufgabe beschäftigen, diese Differentialgleichung bez. die mit ihr verbundene partielle Differentialgleichung zu integrieren. Durch Umkehr der angegebenen Substitutionen wird man hiermit zugleich die Integration unserer obigen partiellen Differentialgleichung leisten. Wir beschäftigen uns aber zunächst mit der letzteren Gleichung. Dieselbe stellt uns, wie man sofort sieht, den Kegel von Fortschreitungsrichtungen dar, deren Strahlen die Punkte eines bestimmten Kegelschnittes in der unendlichfernen Ebene treffen. Dieser Kegelschnitt wird durch die Gleichung:

$(b-a)\,\eta\,\zeta + (c-a)\,\zeta\,\xi + (a-b)\,\xi\,\eta = 0$ bestimmt. Wir wollen diesen Kegelschnitt einfach sogleich den Kugelkreis nennen, indem es ja keine Schwierigkeit bieten würde, in jedem Falle den ersteren in den Kugelkreis zu transformieren. Dann aber wird der Kegel von Fortschreitungsrichtungen, der vom Punkte ξ, η, ζ ausstrahlt, durch die Minimalgeraden, die von ihm ausgehen, geliefert. Durch die logarithmische Abbildung ist daher der tetraedrale Complex in den Minimalcomplex verwandelt, d. h. die Differentialgleichung des Fortschreitungskegels auf der einen Seite in die Differentialgleichung des Fortschreitungskegels auf der anderen Seite und natürlich auch die partielle Differentialgleichung auf der einen Seite in die der anderen

Seite.

Wollen wir daher jetzt unserem Tetraedralcomplex integrieren, so werden wir vor der Aufgabe stehen, den Minimalcomplex zu integrieren. Diese ist aber sofort durchzuführen; die Integralflächen des Minimalcomplexes sind einfach die uns wohlbekannten Minimaldevelopp ablen und ihre charakteristischen Streifen sind die Streifen dieser Flächen entlang den Minimalgeraden, von denen sie erzeugt werden.

Zugleich finden wir dann in diesem Beispiel aufs beste den allgemeinen Satz bestätigt, dass 2 Integralflächen, welche ein Element gemein haben, den ganzen von diesem Elemente ausstrahlenden Streifen enthalten. Von hieraus ergeben sich die Integralflächen und die charakteristischen Streifen des tetraedralen Complexes durch die logarithmische Abbildung, insbesondere werden die Charakteristiken eine Gattung von W-Curven sein, den Minimalgeraden des $\xi\eta\zeta$-Raumes entsprechend. — Hiermit wollen wir die Betrachtung unseres speciellen Beispieles abschliessen und nur noch eine allgemeine Bemerkung hinzufügen:

Wir haben in solcher Weise schliesslich 3 Linienconplexe in wechselseitige Verbindung gesetzt, nämlich im Linienraum hatten wir zunächst den linearen Complex $p_{13} = p_{42}$, dann im Kugelraum den Minimalcomplex und endlich wieder im Linienraum den tetraedralen Complex. Zwischen den ersten

beiden Complexen stellt die Linien-Kugelabbildung die Verbindung her, zwischen den letzten beiden jene Punktabbildung, die wir als logarithmische Abbildung bezeichneten. Dieser Vergleich der 3 solcherweise in Beziehung zu einander gesetzten Liniencomplexe ist nun für Lie der eigentliche Ausgangspunkt gewesen, an welchen sich seine sämmtlichen Arbeiten vom Jahre 1870 anschlossen. Wir haben z. B. seiner Zeit davon gesprochen, wie Lie die Theorie der Minimalflächen entwickelt hat, die im Minimalcomplex eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung befriedigt. Wie hat Lie die bez. Resultate gefunden? Er hat zunächst Flächen im tetraedralen Complex gesucht, die einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung genügen (deren Haupttangenten nämlich harmonisch liegen gegen die beiden im jeweiligen Tangentenbüschel verlaufenden Complexrichtungen) und hat diese dann der logarithmischen Abbildung unterworfen, um mit einem Male zu erkennen, dass jene Flächen hier die Minimalflächen geben, dass also seine Theorie jener Flächen eine Theorie der Minimalflächen impliciert. —

Nun müssen wir alles das, was wir über die partiellen Differentialgleichungen des Liniencomplexes und der Liniencongruenz gesagt haben, auf die entsprechenden Gebilde der Kugelgeometrie übertragen. Wir werden sogleich

sagen können, dass wir auch bei jeder Kugelcongruenz oder jedem Kugelkomplex eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung aufstellen können. Es handelt sich doch allgemein darum, aus der Gesammtheit der ∞^5 Flächenelemente des Raumes ∞^4 Elemente herauszugreifen. Bei einer Kugelcongruenz wählen wir einfach alle Flächenelemente aller Kugeln der Congruenz, dies sind in der That insgesammt ∞^4 Elemente. Die Aufgabe besteht dann wieder darin, aus diesen ∞^4 Elementen in allgemeinster Weise andere Flächen zusammenzusetzen. Wir erhalten da offenbar alle Röhrenflächen, die von Kugeln der Congruenz umhüllt werden *). Der Fall der Kugelcongruenz wird hiermit bereits hinreichend besprochen sein. Complicirter gestalten sich die Verhältnisse für den Kugelcomplex. Erinnern wir uns, dass wir beim Liniencomplex alle Elemente ausgewählt hatten, die sich an den Kegel von Fortschreitungsrichtungen eines beliebigen Punktes anschmiegen; es sind dies alle Elemente des Raumes, welche zwei zusammenfallende Gerade des Liniencomplexes enthalten, d. h. zwei aufeinanderfolgende Gerade, welche sich schneiden. Dementsprechend werden wir hier unter den Flächenelementen jeder Komplex-Kugel immer diejenigen auszuwählen haben, die sie mit benachbarten Kugeln gemein hat; dies sind aber diejenigen Flächenelemente der Kugel, die sich an den zugehörigen Trajektorienkreis anschmiegen. In der That erhalten wir so für die Gesammtheit der ∞^3 Kugeln ∞^4 Flächenelemente, die dann dasjenige bilden, was wir die partielle Differentialgleichung des Kugelcomplexes nennen.

*) Denn die Kugeln der Congruenz bilden ja so ipso eine vollständige Lösung der in Betracht [illegible] oben partiellen Differentialgleichung.

Haben wir nun gestern gelernt, dass die charakteristischen Kreise der linearen Schmiegungskreise sind, so haben wir hier den Satz, dass die charakteristischen Kreise der Kugelcomplexe Krümmungskreise sind. Dieselben ergeben also auf den zugehörigen Integralflächen Krümmungscurven; gleichzeitig sind die zugehörigen Komplexkugeln Krümmungskugeln der Integralflächen.

Wir wollen nun eine interessante Beziehung dieser Theorie zum Problem der geodätischen Linien anschliessen, welche ebenfalls bereits in Anm. V, sogar in sehr viel allgemeinerer Weise, entwickelt ist. Die Coordinaten einer Kugel seien in bekannter Weise α, β, γ, r, wobei $\alpha\beta\gamma$ die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes u. r der Radius sei. Nun sei der specielle Complex gegeben $f(\alpha\beta\gamma) = 0$, d. h. man soll alle Kugeln nehmen, deren Mittelpunkte auf der Fläche $f = 0$ liegen. Es soll sich nun handeln diesen speciellen Complex zu integrieren, d. h. wir sollen alle Flächen finden, deren Krümmungskugeln ihren Mittelpunkt auf der Fläche $f = 0$ haben. In Bezug auf die Integralfläche nennen wir den Mittelpunkt jeder solchen Krümmungskugel den einen Krümmungsmittelpunkt der Fläche, so dass wir zusammenfassend den Satz haben: Den speciellen Complex $f(\alpha\beta\gamma) = 0$ integrieren heisst, alle Flächen des Raumes finden, für welche die eine Reihe der Krümmungsmittelpunktsflächen mit der Fläche $f(\alpha, \beta\gamma) = 0$ zusammenfällt.

Indem nun in unserem Complex $f(\alpha\beta\gamma) = 0$ der Radius r

... erkennen wir, dass ersterer in einen übergeht durch die Substitution $x' = x + \text{const}$. Dieselbe stellt eine beliebige Parallelverschiebung vor; sie führt natürlich eine Integralfläche stets wieder in eine Integralfläche über. Daher sind zugleich mit jeder Integralfläche des Complexes immer auch deren Parallelflächen Integralflächen. Für denjenigen, der die allgemeine Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen kennt, folgt hier ohne Weiteres: Krümmungsstreifen der einzelnen Integralfläche, wie ihre Parallelflächen, entsprechen auf $f(\alpha\beta\gamma) = 0$ als Elementen je zwei geodätischen Curven, und die Schnitte, welche die parallelen Integralflächen mit $f = 0$ liefern, bilden eine zu ihr normaler aequidistanter Curven. In solcher Weise entspricht die Aufeinanderfolge der geodätischen Linien auf $f = 0$ und ihrer zugehörigen aequidistanten Curven gerade der Aufeinanderfolge der charakteristischen Streifen unseres Kugelcomplexes und der aus ihnen zu bildenden Integralflächen. Die charakteristischen Streifen des Kugelcomplexes sind einerseits die Evolventen der auf $f(\alpha\beta\gamma) = 0$ verlaufenden geraden Linien. Und der geometrische Zusammenhang, den wir früher zwischen geodätischen Linien und Systemen aequidistanter Curven kennen lernten, ist ein Abbild der allgemeinen Theorie von der Zusammensetzung der Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung aus deren

charakteristischen Streifen. —

Übrigens hat Lie in Annalen I, wie wir hier nur ganz beiläufig erwähnen können, die Theorie der Linien- und Kugelgebilde auch mit Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Verbindung gebracht. Ich verweise hier insbesondere auf eine elegante Behandlung des Problems, alle Flächen mit sphärischen Krümmungslinien zu finden. Es ist merkwürdig, dass alle diese Entwickelungen bisher von den Differentialgeometern so wenig beachtet worden sind. Um so nachdrücklicher müssen wir die allgemeine Auffassung betonen, die ihnen zu Grunde liegt: dass man nämlich in der Differentialgeometrie alle geometrischen Hülfsmittel benutzen soll, also Liniengeometrie, Kugelgeometrie etc. etc., welche die entwickelte analytische Geometrie zur Verfügung stellt.

Wir gehen nun zu dem letzten Kapitel dieser Winter- [Dat. I. 93] Vorlesung über, das sich mit der

allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen

beschäftigen soll. Ihre Darlegung wird sich jetzt um so einfacher gestalten, da wir ja schon manches von ihr vorweggenommen haben*). Wir sprechen zunächst von der Aufzählung aller Berührungstransformationen im R_3.

*) man vergleiche übrigens die zusammenfassende Darstellung in Lie's „Theorie der Transformationsgruppen", II, (Leipzig 1890).

Seite.

Wollen wir daher jetzt unseren Tetraedralcomplex integrieren, so werden wir vor der Aufgabe stehen, den Minimalcomplex zu integrieren. Diese ist aber sofort durchzuführen; die Integralflächen des Minimalcomplexes sind einfach die uns wohlbekannten Minimaldevelopp ablen und ihre charakteristischen Streifen sind die Streifen dieser Flächen entlang den Minimalgeraden, von denen sie erzeugt werden.

Zugleich finden wir dann in diesem Beispiel aufs beste den allgemeinen Satz bestätigt, dass 2 Integralflächen, welche ein Element gemein haben, den ganzen von diesem Elemente auslaufenden Streifen enthalten. Von hieraus ergeben sich die Integralflächen und die charakteristischen Streifen des tetraedralen Complexes durch die logarithmische Abbildung; insbesondere werden die Charakteristiken eine Gattung von W-Curven sein, den Minimalgeraden des $\xi\eta\zeta$-Raumes entsprechend. — Hiermit wollen wir die Betrachtung unseres speciellen Beispieles abschliessen und nur noch eine allgemeine Bemerkung hinzufügen:

Wir haben in solcher Weise schliesslich 3 Linienc omplexe in wechselseitige Verbindung gesetzt, nämlich im Linienraum hatten wir zunächst den linearen Complex $p_{13} = p_{42}$, dann im Kugelraum den Minimalcomplex und endlich wieder im Linienraum den tetraedralen Complex. Zwischen den ersten

beiden Complexen stellt die Linien-Kugelabbildung die Verbindung her, zwischen den letzten beiden jene Punktabbildung, die wir als logarithmische Abbildung bezeichneten. Diesen Vergleich der 3 solchermaßen in Beziehung zu einander gesetzten Liniencomplexe ist nun für Lie der eigentliche Ausgangspunkt gewesen, an welchen sich seine sämmtlichen Arbeiten vom Jahre 1870 anschlossen. Wir haben z. B. seiner Zeit davon gesprochen, wie Lie die Theorie der Minimalflächen entwickelt hat, die mit Minimalcomplex eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung befriedigt. Wie hat Lie die bez. Resultate gefunden? Er hat zunächst Flächen im tetraedralen Complex gesucht, die einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung genügen (Deren Haupttangenten nämlich harmonisch liegen gegen die beiden unendlich vielen Tangentenkegel verbindenden Complexerzeugenden) und hat diese dann der logarithmischen Abbildung unterworfen, um mit einem Male zu erkennen, dass jene Flächen hier die Minimalflächen gebe, dass also seine Theorie jener Flächen eine Theorie der Minimalflächen impliciere. —

Nun müssen wir alles das, was wir über die partiellen Differentialgleichungen des Liniencomplexes und der Liniencongruenz gesagt haben, auf die entsprechenden Gebilde der Kugelgeometrie übertragen. Wir werden sogleich

sagen können, was wir auch bei jeder Kugelcongruenz oder jedem Kugelkomplex eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung aufstellen können. Es handelt sich dort allgemein darum, aus der Gesammtheit der ∞^5 Flächenelemente des Raumes ∞^4 Elemente herauszugreifen. Bei einer Kugelcongruenz wählen wir einfach alle Flächenelemente aller Kugeln der Congruenz, dies sind in der That insgesammt ∞^4 Elemente. Die Aufgabe besteht dann wieder darin, aus diesen ∞^4 Elementen in allgemeinster Weise andere Flächen zusammenzusetzen. Wir erhalten da offenbar alle Röhrenflächen, die von Kugeln der Congruenz umhüllt werden *). Der Fall der Kugelcongruenz wäre hiermit bereits hinreichend besprochen sein. Complicirter gestalten sich die Verhältnisse für den Kugelcomplex. Erinnern wir uns, dass wir beim Liniencomplex alle Elemente ausgewählt hatten, die sich an den Kegel von Fortschreitungsrichtungen eines beliebigen Punktes anschmiegen, so sind dies alle Elemente des Raumes, welche zwei zusammenfallende Gerade des Liniencomplexes enthalten, d. h. zwei aufeinanderfolgende Gerade, welche sich schneiden. Dementsprechend werden wir hier unter den Flächenelementen jeder Komplex-Kugel immer diejenigen auszuwählen haben, die sie mit benachbarten Kugeln gemein hat. Dies sind aber diejenigen Flächenelemente der Kugel, die sich an den zugehörigen Trajektorienkreis anschmiegen. In der That erhalten wir so für die Gesammtheit der ∞^3 Kugeln ∞^4 Flächenelemente, die dann dasjenige bilden, was wir die partielle Differentialgleichung des Kugelcomplexes nennen.

*) Denn die Kugeln der Congruenz bilden ja so zu sagen eine vollständige Lösung der in Rede stehenden Rummerschen partiellen Differentialgleichung.

Haben wir nun gestern gelernt, dass die charakteristischen Kreise der linearen Schmiegungskreise sind, so haben wir hier den Satz, dass die charakteristischen Kreise der Kugelcomplexe Krümmungskreise sind. Dieselben ergeben also auf den zugehörigen Integralflächen Krümmungscurven; gleichzeitig sind die zugehörigen Komplexkugeln Krümmungskugeln der Integralflächen.

Wir wollen nun eine interessante Beziehung dieser Theorie zum Problem der geodätischen Linien anschliessen, welche ebenfalls bereits in Anm. [illegible], sogar in sehr viel allgemeinerer Weise, entwickelt ist. Die Coordinaten einer Kugel seien in bekannter Weise α, β, γ, r, wobei $\alpha\beta\gamma$ die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes u. r der Radius sei. Nun sei der specielle Complex gegeben $f(\alpha\beta\gamma) = 0$, d. h. man soll alle Kugeln nehmen, deren Mittelpunkte auf der Fläche $f = 0$ liegen. Es soll eine Formel für diesen speciellen Complex zu integrieren, d. h. wir sollen alle Flächen finden, deren Krümmungskugeln ihren Mittelpunkt auf der Fläche $f = 0$ haben. In Bezug auf die Integralfläche nennen wir den Mittelpunkt jeder solchen Krümmungskugel den einem Krümmungsmittelpunkt der Fläche, so dass wir zusammenfassend den Satz haben: Den speciellen Complex $f(\alpha\beta\gamma) = 0$ integrieren heisst, alle Flächen des Raumes finden, für welche die eine Schale der Krümmungsmittelpunktfläche mit der Fläche $f(\alpha\beta\gamma) = 0$ zusammenfällt.

Indem nun in unserem Complex $f(\alpha\beta\gamma) = 0$ der Radius r

setzt, erkennen wir, dass ersterer in einen übergeht durch die Substitution $x' = x + \text{Const.}$ Dieselbe stellt eine beliebige Parallelverschiebung vor; sie führt natürlich eine Integralfläche stets wieder in eine Integralfläche über. Daher sind zugleich mit jeder Integralfläche des Complexes immer auch deren Parallelflächen Integralflächen. Für denjenigen, der die allgemeine Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen kennt, folgt hier ohne Weiteres: Der Krümmungsstrikturen der einzelnen Integralfläche, wie ihrer Parallelflächen, entspricht auf $f(\alpha\beta\gamma) = 0$ als Elementen eine Schaar geodätischer Curven, und die Schnitte, welche die parallelen Integralflächen mit $f = 0$ liefern, bilden eine Schaar deren normaler aequidistanter Curven. In solcher Weise entspricht die Aufeinanderfolge der geodätischen Linien auf $f = 0$ und der zugehörigen aequidistanten Curven gerade der Aufeinanderfolge der charakteristischen Streifen unseres Kugelcomplexes und der aus ihnen zu bildenden Integralflächen. Die charakteristischen Streifen des Kugelcomplexes sind ein, fach die Evolventen der auf $f(\alpha\beta\gamma) = 0$ verlaufenden geraden Linien. Und der geometrische Zusammenhang, den wir zwischen geodätischen Linien und Systemen aequidistanter Curven kennen lernten, ist ein Abbild der allgemeinen Theorie von der Zusammensetzung der Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung aus deren

charakteristischen Kreisen. —

Übrigens hat Lie in Annalen I, wie wir hier nur ganz beiläufig erwähnen können, die Theorie der Linien- und Kugelgebilde auch mit Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Verbindung gebracht. Ich verweise hier insbesondere auf eine elegante Behandlung des Problems, alle Flächen mit sphärischen Krümmungslinien zu finden. Es ist merkwürdig, dass alle diese Entwickelungen bisher von den Differentialgeometern so wenig beachtet worden sind. Um so nachdrücklicher müssen wir die allgemeine Auffassung betonen, die ihnen zu Grunde liegt: Dass man nämlich in der Differentialgeometrie alle geometrischen Hülfsmittel benutzen soll, also Liniengeometrie, Kugelgeometrie etc. etc., welche die entwickelte analytische Geometrie zur Verfügung stellt.

Wir gehen nun zu dem letzten Kapitel dieser Winter- [Vorl. S. 99]
Vorlesung über, das sich mit der

allgemeinen Theorie der wenig transformirenden

Flächen beschäftigen soll. Ihre Darlegung wird sich jetzt um so einfacher gestalten, da wir ja schon manches von ihr vorweggenommen haben*). Wir sprechen zunächst von der Aufzählung aller Berührungstransformationen im R_3.

*) man vergleiche übrigens die zusammenfassende Darstellung in Lies „Theorie der Transformationsgruppen", II, (Leipzig 1890).

Wir wissen, dass wir R_3 die Punkte, Curven u. Flächen gleichzeitig Integral-R_2 des Pfaff'schen Problems $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ sind. Dennoch müssen wir die Berührungstransformationen wie solche, welche die ∞^3 Punkte ∞^3 Punkten oder ∞^3 Curven oder ∞^3 Flächen zuordnen. Es ist dies natürlich eine Einleitung, welche die Punktauffassung bevorzugt. Ich sage nun, <u>dass jede der, den ∞^3 Punkte, den ∞^3 Punkte oder Curven oder Flächen zugeordnen, eine Berührungstransformation gibt</u>.

Nehmen wir den letzten Fall zunächst zur weiteren Betrachtung vor: Es sei irgend eine Gleichung $\Lambda(x, y, z, x', y', z') = 0$ gegeben. Nun wir die Coordinaten $x' y' z'$ festhalten, so ordnet diese Gleichung dem Punkte $x' y' z'$ des einen Raumes in allgemeinster Weise eine Fläche des anderen Raumes zu und umgekehrt. Wir werden jetzt noch die Gleichung hinzunehmen, welche uns die Grössen p u. q, resp. p' und q' der Tangentialebenen der beg. Fläche im Punkte xyz resp. $x'y'z'$ bestimmen:

$$p = -\frac{\frac{\partial \Lambda}{\partial x}}{\frac{\partial \Lambda}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial \Lambda}{\partial y}}{\frac{\partial \Lambda}{\partial z}} \quad \text{und}$$

$$p' = -\frac{\frac{\partial \Lambda}{\partial x'}}{\frac{\partial \Lambda}{\partial z'}}, \quad q' = -\frac{\frac{\partial \Lambda}{\partial y'}}{\frac{\partial \Lambda}{\partial z'}}$$

Diese letzten Gleichungen mit den ursprünglichen $\Lambda = 0$ zusammen ordnen jedem Elemente $x\,y\,z\,p\,q$ ein Element $x'y'z'$ $p'q'$ zu und umgekehrt, sie definiren also eine Elemententransformation. Insbesondere nennt man die Gleichung $\Lambda = 0$ die aequatio directrix oder die Leitgleichung. Wir behaupten nun, Dass die Gleichung $\Lambda = 0$ zusammen mit den 4 aus der abgeleiteten Gleichungen immer eine Berührungstransformation giebt. Dies ist analytisch leicht einzusehen. (Ich muss leider der Kürze halber unterlassen die geometrische Seite der Sache so auszuführen, wie sie es verdient).

Aus der Gleichung $\Lambda = 0$ folgern wir zunächst:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x}dx + \frac{\partial \Lambda}{\partial y}dy + \frac{\partial \Lambda}{\partial z}dz + \frac{\partial \Lambda}{\partial x'}dx' + \frac{\partial \Lambda}{\partial y'}dy' + \frac{\partial \Lambda}{\partial z'}dz' = 0,$$

d.h. die Incremente dx, dy etc. werden immer an diese Bedingung gebunden sein. Diese letzte Gleichung geht nun in Rücksicht auf die Ausdrücke für p, q, p', q' sogleich wieder folgende über:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy) + \frac{\partial \Lambda}{\partial z'}(dz' - p'dx' - q'dy') = 0.$$ Hieraus die letzte Gleichung erscheint wir sofort, Dass wir also eine Berührungstransformation vor uns haben.

Nun gehen wir zu dem zweiten Falle, indem die Punkte der einen Raumes Curven des anderen Raumes zugeordnet seien sollen und umgekehrt. Eine solche Beziehung wird in allgemeinster Weise durch das gemeinsame Bestehen zweier Glei-

vermittelt: $\Lambda_1(xyzx'y'z') = 0,$

und $\Lambda_2(xyzx'y'z') = 0.$

wir hier z. B. $x'y'z'$ fest, so ist xyz an eine Curve gebunden
ungekehrt. Nun nachdem wir wieder die Flächenelemente, resp.
eien an die Curven der beiden Räume anschmiegen, wir Be-
ze zu ziehen haben. Zu dem Zwecke berechnen wir wieder
Grössen p u. q, resp. p' u. q', die zu den Flächenelementen
es Linienelementes der Curven gehören.

Wir setzen:

$$p = -\frac{\frac{\partial(\Lambda_1+\lambda\Lambda_2}{\partial x}}{\frac{\partial(\Lambda_1+\lambda\Lambda_2)}{\partial z}}, \qquad q = -\frac{\frac{\partial(\Lambda_1+\lambda\Lambda_2}{\partial y}}{\frac{\partial(\Lambda_1+\lambda\Lambda_2}{\partial z}}$$

und:

$$p' = -\frac{\frac{\partial(\Lambda_1+\lambda\Lambda_2)}{\partial x'}}{\frac{\partial(\Lambda_1+\lambda\Lambda_2)}{\partial z'}}, \qquad q' = -\frac{\frac{\partial(\Lambda_1+\lambda\Lambda_2)}{\partial y'}}{\frac{\partial(\Lambda_1+\lambda\Lambda_2)}{\partial z'}}$$

In diesen Gleichungen stellt λ einen willkürlichen
meter vor, so dass $\Lambda_1 + \lambda\Lambda_2 = 0$ das lineare Flächenbü-
schaar, welches die Durchschnittscurve von $\Lambda_1 = 0$ u. $\Lambda_2 = 0$

gemeinsam hat. Deuten wir uns zu diesen 4 Gleichungen die ursprünglichen Gleichungen $\Lambda_1 = 0$ u. $\Lambda_2 = 0$ hinzugenommen und die willkürliche Grösse λ eliminiert, so erhalten wir wieder 5 Beziehungen zwischen den Grössen $xyz\,p\,q$ und $x'y'z'p'q'$ d.h. eine Elemententransformation. Diese Gleichungen stellen dann wieder eine Berührungstransformation dar. Der Beweisgang ist derselbe wie vorhin. Wir bilden die Gleichung:

$$\frac{\partial(\Lambda_1 + \lambda\Lambda_2)}{\partial x}\,dx + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial(\Lambda_1 + \lambda\Lambda_2)}{\partial z'}\,dz' = 0, \text{ wenn } \Lambda_1 + \lambda\Lambda_2 = 0$$

folgt, und aus ihr ergibt sich wieder durch einfache Umformung, dass $dz - p\,dx - q\,dy$ bis auf einen Faktor übereinstimmt mit $dz' - p'dx' - q'dy'$. Die Gleichung $\Lambda_1 = 0$ u. $\Lambda_2 = 0$ nennen wir wieder die Leitgleichungen.

Schliesslich gehen wir von 3 Leitgleichungen aus: $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = 0$. Dieselben stellen uns eine Punkttransformation dar, und wir wissen bereits von früher her, und können es übrigens sofort nach Analogie der beiden vorhergehenden Fälle ableiten, dass eine solche stets eine Berührungstransformation darstellt. —

Wollen wir für die sämmtlichen betrachteten Fälle einfache Beispiele haben, so ist es am bequemsten, bilineare Gleichungen zu Grunde zu legen.

Eine einzelne bilineare Gleichung $\Lambda = 0$ zwischen den Coordinaten xyz, $x'y'z'$ stellt die allgemeine lineare Dualistische Verwandtschaft dar, die uns ja hinlänglich bekannt ist. Zwei nebeneinanderstehende bilineare Gleichungen ordnen jedem Punkte

des einen Raumes ...
zu. Den Punkten werden daher die Linien eines ...
chend gesetzt. Im einzelnen mögen Sie dieses in der Lie'schen Arbeit
Ann. 5 nachsehen; als specielles Beispiel ergibt sich die Linien-
Kugelverwandtschaft. Von hier aus ist Lie zuerst zu dieser Ver-
wandtschaft gekommen.

Sind endlich 3 bilineare Gleichungen gegeben, so können wir
diese doch z. B. nach $x'y'z'$ oder auch nach xyz auflösen. Die Unbe-
kannten ergeben sich als Quotienten zweier dreigliedriger De-
terminanten, wie leicht zu übersehen ist. Wir haben daher eine
Cremonatransformation 3. Grades vor uns. Mit dieser sehr allge-
meinen Raumtransformation haben sich Cayley und Nöther viel
beschäftigt, beide im Jahre 1870, jener in der Math. Society 3, die-
ser in Ann. Bd. 3. Die Transformation schliesst als besondere Fäl-
le ziemlich alle Cremonatransformationen des Raumes ein, die
man genauer kennt. —

In den vorstehenden Betrachtungen haben wir die Theorie
der Berührungstransformationen des R_3 so entwickelt, wie sie
sich vom Punktstandpunkte aus darstellt. Wir wollen jetzt all-
gemeinere Formeln geben, welche die Coordinaten $xyzpq$ als
gleichberechtigte Variable neben einander gelten lassen. Wir
schreiben:

$$X = X(xyzpq) \qquad P = P(xyzpq)$$
$$Y = Y(xyzpq) \qquad Q = Q(xyzpq)$$
$$Z = Z(xyzpq)$$

und fragen uns direkt, wie wir diese Funktionen einrichten müssen, damit $dZ - P\,dX - Q\,dY$ bis auf einen Faktor übereinstimmt mit $dz - p\,dx - q\,dy$. Die betreffenden Resultate sind von Lie 1874/5 in den Verhandlungen der Akademie zu Christiania publicirt, sodann hat Moritz Mayer in den Göttinger Nachrichten von 1873 und in Ann. eine directe elementare Ableitung gegeben. (Man vergleiche auch mein Vorlesungsheft über Mechanik II 1891).

Die Sache ist die folgende: Es mögen $F(xyzpq)$ u. $\Phi(xyzpq)$ irgend zwei Functionen sein; wir müssen zunächst vor allem eine Covariante derselben kennen lernen, gegenüber irgend welchen Berührungstransformationen, d. h. ein K_5 eine Covariante von F, Φ und dem Pfaff'schen Ausdrucke $dz - p\,dx - q\,dy$. Man bezeichnet dieselbe gewöhnlich mit (F, Φ). Dieselbe lautet:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{d\Phi}{dx} - \frac{\partial \Phi}{\partial p}\,\frac{dF}{dx}\Big) + \Big(\frac{\partial F}{\partial q}\,\frac{d\Phi}{dy} - \frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{dF}{dy}\Big)$$ oder wenn wir die totalen Differentialquotienten in die partiellen auflösen, z. B. $\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\cdot p$ setzen:

$$(F,\Phi) = \Big(\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\Big) + \Big(\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\Big)$$
$$+\Big(\Big(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}\Big)\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Big(p\frac{\partial \Phi}{\partial p} + q\frac{\partial \Phi}{\partial q}\Big)\cdot\frac{\partial F}{\partial z}\Big).$$

Dieser Ausdruck soll also bei beliebigen Berührungstransformationen bis auf einen Faktor unverändert bleiben. Um

Dies zu sehen, fragen wir nach der Bedeutung von $(F, \Phi) = 0$; wir werden sehen, dass diese Gleichung, eine durch Berührungstransformation unzerstörbare Beziehung darstellt. Dabei können wir einen doppelten Standpunkt einnehmen: entweder soll $(F, \Phi) = 0$ sein vermöge $F = 0$ u. $\Phi = 0$, oder aber es soll $(F, \Phi) = 0$ sein für alle Flächenelemente, während F wie Φ selbst verschwindende Werte erhalten: $F = C_1$ u. $\Phi = C_2$, (wobei dann diese letzten beiden Gleichungen 2 Scharen von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen). Wir beginnen mit der ersten Voraussetzung, indem wir auf die zweite erst später kurz eingehen werden.

Wir werden zunächst setzen:

$$dx : dy : dz : dp : dq = \frac{\partial F}{\partial p} : \frac{\partial F}{\partial q} : p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} : -\frac{\partial F}{\partial x} - p\frac{\partial F}{\partial z} : -\frac{\partial F}{\partial y} - q\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Diese Differentialgleichungen definieren uns die charakteristischen Streifen von $F = 0$. Jetzt möge das Element $x\,y\,z\,p\,q$ gleichzeitig $F = 0$ u. $\Phi = 0$ angehören. Wir schreiten von $x\,y\,z\,p\,q$ auf dem zugehörigen charakteristischen Streifen von $F = 0$ zum Nachbarelemente fort. Wir fragen uns nun, unter welcher Bedingung dieses zweite Element ebenfalls der Gleichung $\Phi = 0$ angehört, oder allgemein, wie wir es einrichten müssen, dass die charakteristischen Streifen von $F = 0$ zugleich Streifen von $\Phi = 0$ sind? Damit das Nachbarelement der Gleichung $\Phi = 0$ angehört, muss die folgende Gleichung erfüllt sein: $\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \ldots\ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial q} dq = 0$. Tragen wir in diese für $dx, dy, \ldots dq$ die oben angegebenen Proportionalwerte ein, so geht diese Gleichung gerade über in $(F, \Phi) = 0$. Indem nun der Ausdruck (F, Φ) in

Den Funktionen F u. Φ symmetrisch aufgebaut ist, bekommen wir den folgenden Satz: $(F, \Phi) = 0$ bedeutet sowohl, dass die charakteristischen Streifen von $F = 0$, welche von den gemeinsamen Elementen der Gleichungen $F = 0$ u. $\Phi = 0$ auslaufen, Streifen der Gleichung $\Phi = 0$ sind, als auch umgekehrt, dass die bezüglichen charakteristischen Streifen $\Phi = 0$ solche von $F = 0$ sind. Hieraus können wir nun eine schöne Folgerung ziehen. Es sei wieder $x y z p q$ unserer $F = 0$ u. $\Phi = 0$ gemeinsames Ausgangselement, von ihm aus lassen wir die beiden charakteristischen Streifen S_1 und S_2 von $F = 0$ u. $\Phi = 0$ auslaufen. Nun lassen wir von jedem Element von S_1 die ∞^1 charakteristischen Streifen für $\Phi = 0$ auslaufen und erhalten so eine Integralfläche von $\Phi = 0$. Aber diese Streifen gehören nach unserem eben abgeleiteten Satze auch der Gleichung $F = 0$ an, d. h. die erzeugte Fläche ist auch eine Integralfläche von $F = 0$, die beiden Gleichungen $\Phi = 0$ u. $F = 0$ haben eine Integralfläche gemeinsam. Dieselbe Fläche können wir natürlich auch erzeugen, wenn wir von den Elementen von S_2 die charakteristischen Streifen von $F = 0$ auslaufen lassen. Das Verschwinden von (F, Φ) hat zur Folge, dass die ∞^3 gemeinsamen Elemente der beiden Gleichungen $F = 0$ u. $\Phi = 0$ sich zusammenfassen lassen zu ∞^1 gemeinsamen Integralflächen, deren jede von einfach ∞ vielen charakteristischen Streifen der einen Art und ebenso von einfach ∞ vielen charakteristischen Streifen der anderen Art überdeckt ist.

Sie drücke dieses aus, indem er sagt: $F=0$ u. $\Phi=0$ liegen involutorisch, sodass wir den Inhalt des letzten Satzes nun wie folgt zusammenfassen können: Die Bedingung, dass $(F,\Phi)=0$ sein soll vermöge $F=0$ u. $\Phi=0$ besagt, dass die beiden Gleichungen $F=0$ u. $\Phi=0$ in Involution liegen. Sollte aber (F,Φ) identisch $=0$ sein, so ändert sich nur dies, dass dann alle Gleichungen der Schaar $F=$ const. mit allen Gleichungen der Schaar $\Phi=$ const. in Involution liegen. – Aus diesem hier, mit für $(F,\Phi)=0$ ausgesprochenen Sätzen folgt dann die invariante Natur des Ausdruckes (F,Φ) selbst. –

Nun hatten wir die allgemeine Berührungstransformation dadurch in Ansatz gebracht, dass $dZ-P\,dX-Q\,dY=\varrho(dz-p\,dx-q\,dy)$ sein sollte. Man kann jetzt nun Besonderen ausrechnen, welche Bedingungen die Funktionen X, Y, Z, P, Q erfüllen müssen, damit diese Gleichung besteht. Wir wollen alle Zwischenrechnung fortlassen; das Endresultat ist, dass

$$(Z,X)=(Z,Y)=(X,Y)=X,Q)=(Y,P)=(P,Q)=0$$

und $(Z,P)=\varrho P,(ZQ)=-\varrho Q,(X,P)=(Y,Q)=-\varrho$

sein muss, wo $\varrho=\frac{\partial Z}{\partial z}-P\frac{\partial X}{\partial z}-Q\frac{\partial Y}{\partial z}$ gesetzt ist.

Wir können nun wieder an die Bedeutung der Klammerausdrücke anknüpfen. So besagt z.B. $(Z,X)=0$, dass die Gleichung $Z=\text{const}$ und $X=\text{const}'$ [unabhängig von dem Werte der beiden Constanten] einfach ∞ viele Lösungen gemein haben sollen. Wir fragen uns, haben denn beim ursprünglichen Coordinatensystem die Gleichungen $Z=C$, $X=C'$ ∞^1 Lösungen gemeinsam? In der That ist dies der Fall, denn die Ebenen $z=C$ u. $x=C'$ schneiden sich doch in einfach ∞ vielen Punkten, und diese Punkte sind gemeinsame Integral-M_2 der beiden partiellen Differentialgleichungen $z=C$ u. $x=C'$. Wollen wir unseren Raum so transformiren, dass $dz-p\,dx-q\,dy$ invariant bleibt, so müssen wir daraufhin Z u. X als Funktion von $x\,y\,z\,p\,q$ in der That immer so auswählen, dass alle Gleichungen $Z=C$ u. $X=C'$ wieder ∞^1 Integralflächen gemeinsam haben. Das Analoge gilt für die übrigen Bedingungen, so dass wir ein volles geometrisches Verständniss unseres Formelsystems erhalten. Jedoch sieht man nicht von vornherein ein, dass diese Bedingungen zugleich auch ausreichend sind. Ferner beherrschen wir mit unseren Formeln nicht das Unendliche Weite, was doch für das allseitige Verständniss stets wünschenswerth ist. Um da abzumessen, müssen wir homogene Schreibweise der Formeln einführen. Ich schliesse mich an die Entwickelung von Lindemann in Clebsch's Vorlesungen I p. 1023 ff.

Da hier ist das Element durch die homogenen Coordinaten $x_1\,x_2\,x_3\,x_4$ und $u_1\,u_2\,u_3\,u_4$ (allgemein im R_{n-1} $x_1,\ldots x_n$ und $u_1,\ldots u_n$) mit der Bedingung $u_x=0$ bestimmt. So wird dann gesetzt:

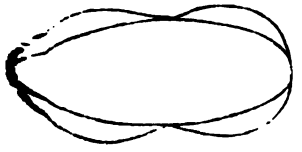
$X_i = X_i(x_1 \dots x_4, u_1 \dots u_4)$.

und $U_i = U_i(x_1 \dots x_4, u_1 \dots u_4)$. Wir wollen hier keinen Proportionalitätsfaktor hinzufügen. Dann soll für $u_x = 0$ auch $U_x = 0$ sein, damit wir überhaupt eine Elementartransformation haben, wir setzen geradezu, um etwas Bestimmtes zu haben, $U_x = u_x$. Ferner müssen wir natürlich X in den x_i homogen, etwa vom Grade α, wählen; dann werden die U_i in den x_i homogen vom Grade $1-\alpha$, damit U_x linear in den x wird. Ebenso möge X_i vom Grade $1-\beta$ in den u_i und U_i vom Grade β in den u_i sein. Nun verlangen wir, dass $\sum U_i \, dX_i = \sum u_i \, dx_i$ sein soll aber $\sum X_i \, dU_i = \sum x_i \, du_i$, was dasselbe besagt. Sind diese Gleichungen erfüllt, so wird unsere Elementartransformation zugleich eine Berührungstransformation sein. In homogener Schreibweise wird nun der Ausdruck $(F,\Phi) = \sum_i^4 \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} - \frac{\partial F}{\partial u_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)$ die Bedingung, dass wir eine Berührungstransformation haben, wird sich dann so aussprechen, dass einerseits

$(X_i X_k) = (X_i U_k) = (U_i U_k) = 0$ d.h. jedes X_i mit jedem X_k u.s.w. involutorisch liegt, und dass andererseits $(X_i U_i) = 1$. Sie sehen, dass diese homogene Formulierung zwar viel systematischer wird, aber auch viel schleppender als die unhomogene; das ist derselbe Gegensatz, den wir immer antreffen, wenn wir homogene und unhomogene Formeln vergleichen. Welche Formeln den Vorzug verdienen, hängt von den Fragestellungen ab, mit denen man sich beschäftigt. —

Wir wollen heute noch einige specielle Beispiele von [Fr. 3.II.
Berührungstransformationen kennen lernen. Hatten wir schon die Punkttransformationen im allgemeinen, dann die linearen dualistischen Umformungen, die ∞^{15} Transformationen der höheren Kugelgeometrie, die Beziehungen zwischen Linien- und Kugelgeometrie als Berührungstransformationen erkannt, so bietet andererseits die mathematische Litteratur noch mannigfache andere Fälle solcher Umformungen dar, die sich als Berührungstransformationen erweisen; man hat nur früher bei der Einführung dieser Umformungen keineswegs diesen allgemeinen Charakter an die Spitze gestellt.

Als erstes Beispiel wollen wir die Herstellung der Fusspunktcurven irgend welcher gegebenen Curve betrachten. Unter der Fusspunktcurve bezeichnet man bekanntlich den geometrischen Ort der Fusspunkte aller Normalen, die man von einem festen Punkte z. B. vom Coordinatenanfangspunkte aus auf die Tangenten der gegebenen Curve fällen kann. Bei einer Ellipse z. B. legt sich die Fusspunktcurve als ein an 4 Stellen ausgebauchtes Oval um



dieselbe herum, wie es nebenstehende Figur andeuten mag. Wir behaupten nun, dass der Process, vermöge dessen aus der vorgelegten Curve die Fusspunktcurve wird, eine Berührungstransformation darstellt. Zum Beweise gehen wir von den Tangenten der vorgelegten Curve aus, deren einzelne durch $ux+vy+1=0$ gegeben sein mögen. Die Coordinaten des Fusspunktes

Des vom Coordinatenanfangspunkte auf diese Tangente gefällten Lotes sind dann:

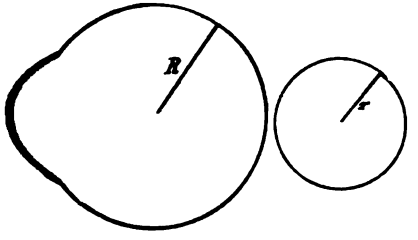
$X = -\frac{u}{u^2+v^2}$, $Y = -\frac{v}{u^2+v^2}$. Wir denken uns nun die anfängliche Curve durch eine Gleichung zwischen u und v gegeben und gehen damit hin zu einer Hilfscurve über, die aus der gegebenen durch die Substitution $u = -\xi$, $v = -\eta$ entsteht. Diese Substitution stellt einfach die Polarenverwandtschaft an dem Einheitskreise $\xi^2+\eta^2 = 1$ dar. Die neue Curve ξ, η wird einfach Punktcoordinaten aufweisen, die den Liniencoordinaten u, v der Ausgangscurve entgegengesetzt gleich sind.

Wir erhalten dann aus unseren letzten Formeln die neue Beziehung:

$X = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}$, $Y = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$ der Fusspunktcurve zu der transformierten Curve. Diese zweite Transformation stellt aber ersichtlich eine Inversion der $\xi\eta$-Curve an demselben Kreise $\xi^2+\eta^2 = 1$ dar. Indem daher der Uebergang von unserer vorgegebenen Curve zu der Fusspunktcurve sich als die Aufeinanderfolge der genannten einfachen Umformungen darstellt, die ihrerseits als Berührungstransformationen uns bekannt sind, ist er gewiss ebenfalls eine Berührungstransformation. Zugleich bemerken wir, dass unsere so gewonnene Transformation eindeutig ist, ist sie ja doch aus 2 eindeutigen Transformationen zusammengesetzt. Wir entnehmen aus unserem Beispiel dafür das folgende allgemeine Princip: Um ein

Deutige Berührungstransformationen beispielsweise herzustellen braucht man nur eine beliebige dualistische Transformation mit einer beliebigen Cremona-Transformation zu verbinden. – Eine allgemeine Theorie der eindeutigen Berührungstransformationen scheint noch nicht entwickelt zu sein. –

Nun gehen wir zu einem ganz anderen Beispiele über, wie es die Theorie der Zahnräder darbietet*). Denken wir uns zunächst einmal 2 sich von aussen oder von innen berührende Kreise, deren Mittelpunkte wir festhalten wollen. Eine gleichförmige Drehung des Kreises R wird vermöge der Reibung eine gleichmässige Drehung des zweiten Kreises zur Folge haben. Doch lässt sich in dieser Weise ersichtlich keine Kraft übertragen, da bei einigermassen grossem Widerstande die Kreise nicht mehr auf einander abrollen, sondern aufeinandergleiten werden. Daher versieht man beide Kreise an ihrer Peripherie mit Zahnkränzen, deren einzelne Zähne in allbekannter Weise ineinandergreifen. Das allgemeine Gesetz für die Herstellung einer solchen Verzahnung ist dann einfach dieses, dass die beiden Zahnkränze bei der gleichförmigen Drehung der beiden Kreisräder da, wo sie sich treffen, stets



*) Wir könnten überhaupt die Theorie der „Rouletten und Glissetten" heranziehen!

einander berühren müssen. Die Zähne, welche gerade einander berühren, gleiten dabei, allgemein zu reden, aufeinander. Um die Verhältnisse leichter übersehen zu können, wollen wir annehmen, dass der eine Kreis, etwa der Kreis R fest bleibe, während der andere um denselben herumrollt. Offenbar ist die relative Bewegung beider Kreise genau dieselbe wie bei unserer früheren Anordnung. (Natürlich könnten wir uns den zweiten Kreis r festgelegt und den Kreis R auf ihm abrollend denken, in dem der Kreis R um den Mittelpunkt des Kreises r herumläuft). Es ist einem Jeden von Ihnen bekannt, dass bei dieser Bewegung ein Punkt der Ebene des rollenden Kreises eine Epicycloide beschreibt und zwar eine gemeine, gestreckte oder verschlungene Epicycloide, je nachdem dieser Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises, innerhalb oder ausserhalb derselben gelegen ist. Wie wir hier einen Punkt in seinen aufeinanderfolgenden Lagen bei der Bewegung betrachten, ebenso können wir auch eine beliebige Curve oder ein Stück einer Curve, welches mit dem rollenden Kreise fest verbunden ist, in den aufeinander folgenden Lagen verfolgen. Wir finden, dass bei der Bewegung der ausgewählten Curve eine bestimmte zweite Curve umhüllt wird. Wir behaupten nun, dass die Beziehung zwischen den beiden Curven eine Berührungstransformation darstellt nämlich diejenige Berührungstransformation, die aus

den Punkten der rollenden Ebene die erwähnten Epicycloiden macht.
Um diese Behauptung nachzuweisen, haben wir nur zu zeigen, dass aus zwei sich berührenden Curven bei der Bewegung als Umhüllungsgebilde wieder zwei sich berührende Curven entstehen. Dieses folgt unmittelbar daraus, dass in dem Augenblicke, in dem das Berührungselement der ersten Curven die Enveloppe der ersten Curve berührt, dasselbe zugleich die Enveloppe der anderen Curve tangiert, weil es sich um einen Moment handelt, in welchem das Berührungselement vermöge der instantanen Drehung in sich selbst verschoben wird. Die Normale des Elementes geht dann durch das instantane Drehcentrum, d. h. den instantanen Berührungspunkt der beiden anfänglichen Kreise hindurch. – Haben wir aber diese Verhältnisse einmal klar erkannt, so können wir abgesehen von praktischen Rücksichten, die man etwa in dem Sinne zu nehmen hat, dass die Zähne der Räder bei der Bewegung nicht mit einander collidiren, den Grundsatz der ganzen Verzahnungslehre in dem folgenden Satze aussprechen: Man nehme den einen Zahnkranz willkürlich an und construiere den anderen Zahnkranz als diejenige Curve, welche dem ersten Zahnkranze bei der Berührungstransformation entspricht. Diese Construction gilt selbstverständlich nur für diejenigen Theile der Zahnkränze, welche bei den Zahneingriffen zur Wirkung kommen und nicht für die anderen Theile, die einzig der Ungleichung zu genügen haben, dass die Zahnkränze bei

der Bewegung niemals collidieren sollen. (Bei den vorliegenden Modellen sind in dem Modell A die Zähne des einen Rades, des kreisförmige Lappen, dieselben greifen in die Einschnitzungen des anderen Rades ein; in dem Modell B dagegen bestehen die Zähne, soweit sie wirksam sind, d.h. soweit sie nicht nach aussen oder innen durch concentrische Kreise abgestutzt sind, immer aus einem geradlinigen radial verlaufenden Stücke und dann aus einem ausschliessenden Curvenzweige, der bei näherer Betrachtung sich als Stück einer Epicycloide ergiebt.)

A.

B.

Das letzte Beispiel entlehnen wir der Astronomie bez. der Mechanik. Wir meinen die Theorie der Variation der Constanten. Wir werden hier nur die mathematische Seite der Sache zur Sprache bringen, um nicht zu weit ausholen zu müssen. Betreffs einer näheren Ausführung vergleiche man dann meine Vorlesung über Mechanik II. (1891) o Tisserand, Méc. Céleste I. Leider wird bei Tisserand, wie in Jacob Dynamik, der allgemeine Begriff der Berührungstransformati keineswegs vorangestellt, sondern alle Entwickelungen ad Durchgeführt. Wir haben im Raum von $n+2$ Dimensionen m den Variabelen $z, t, x_1, x_2 \ldots x_n$ irgendwelche partielle Differenz algleichung, in der z selbst nicht vorkommt:

$$F\left(t, x_1 \ldots x_n, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0.$$ Unsere Aufgabe sei, die charak

kanonischen Strafen dieser Differentialgleichung zu bestimmen, so weit sie von $t, x_1, \ldots x_n$ abhängig sind (d.h. unter Beiseitelassung des z). Wir haben hier $n+2$ Variable vor uns, doch übertragen sich die Verhältnisse, die wir für 3 Variable abgeleitet haben, ganz analog auf diesen allgemeinen Fall. Wir setzen $\frac{\partial z}{\partial t} = \pi$, $\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1$, $\ldots$ $\frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$. Dann lauten die Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen, indem wir das z bei Seite lassen:

$$dt : dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n : d\pi : dp_1 : \ldots : dp_n = \frac{\partial F}{\partial \pi} : \frac{\partial F}{\partial p_1} : \frac{\partial F}{\partial p_2} : \ldots \frac{\partial F}{\partial p_n} : -\frac{\partial F}{\partial t} : -\frac{\partial F}{\partial x_1} : \ldots : \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

Die hierdurch definierten charakteristischen Streifen geben uns dann die Bahnkurven des mechanischen Problems. Die Gleichung $F = 0$ ist die sogenannte Hamilton'sche partielle Differentialgleichung. — Nun liegen die Verhältnisse in der himmlischen Mechanik so, dass man eine partielle Differentialgleichung der folgenden Gestalt hat: $V = F - f + \varepsilon f'$, worüber ε eine sehr kleine Grösse bezeichnet. $f = 0$ stellt hier die sogenannte „ursprüngliche" Differentialgleichung, $\varepsilon f'$ das „Störungsglied" dar. die Lösungsgleichung $F = 0$ wird man dann, wenn die gestörte Differentialgleichung nennen. Es hat nun in den hier vorliegenden Fällen keine Schwierigkeit, die „ursprüngliche" Gleichung $f = 0$ zu integrieren und insbesondere die charakteristischen Streifen des ungestörten Problems, d.h. seine Bahnkurven zu bestimmen. Der grundlegende Gedanke ist darauf hin, dass die charakteristischen Streifen des gestörten Problems $F = 0$ von den Bahnkurven des ungestörten Problems $f = 0$ in ihrem Verlaufe gewiss nicht so sehr verschieden

sein werden. Man denkt sich nun zuerst die einzelne Bahncurve des ungestörten Problems berechnet u. durch gewisse Constante $\alpha_1 \ldots \alpha_n, \beta_1 \ldots \beta_n$ und C festgelegt, d.h. durch die Angabe festgelegt, dass gewisse $2n+1$ Funktionen der $t, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n$ die constanten Werte $C, \alpha_1 \ldots \alpha_n, \beta_1 \ldots \beta_n$ haben. Diese Funktionen der Coordinaten werden dann beim gestörten Problem sich zwar mit der Zeit ändern, aber doch nur sehr langsam, und es werden sich ihre Aenderungen besonders bequem durch Näherungsmethoden berechnen lassen. Ferner führe man diese $2n+1$ Funktionen, die kurzweg selbst mit $C, \alpha_1 \ldots \alpha_n, \beta_1 \ldots \beta_n$ bezeichnet werden, statt der $t, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n$ als neue Veränderliche ein. — Hierin besteht die Methode der Variation der Constanten. — Nun behaupten wir, dass die Einführung der Variablen α_i, β_i, C bei geschickter Auswahl derselben gerade eine Berührungstransformation darstellt.

Um dies nachzuweisen, denken wir uns für die Gleichung $f=1$ ein vollständiges Integral (im Sinne von Lagrange) gefunden, d.h. ein Integral mit $2n+1$ Constanten. Dasselbe sei gegeben durch die Gleichung $z = \varphi(t, x_1 \ldots x_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n) + C$. Die letzte Constante C tritt hier additiv hinzu, weil in unserer ursprünglichen Differentialgleichung die Variable z selbst nicht explicite auftritt. Wir setzen dann zur Bestimmung der charakteristischen Streifen zuvörderst: $\frac{\partial z}{\partial t} = \pi, \frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1 \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$. Diese Grössen bestimmen uns die Tangentialebene, die sich an die Fläche $z = \varphi + C$ anschmiegt. Zur vollen Bestimmung der Streifen werden wir von der Fläche $z = \varphi + C$ durch Aenderung der Constanten zu Nachbar-

z. B. $\frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \cdot d\alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial b} \, db = 0$. Indem wir zwischen den Incrementen u. db dann ein bestimmtes Verhältniss annehmen, erhalten wir im Sammt das folgende Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} &= -\beta_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= -\beta_2 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n} &= -\beta_n \end{aligned}\right\}$$

, wo die $\beta_1 \ldots \beta_n$ irgend welche neue Constanten sind.

Diese Gleichungen verbunden mit den anderen

$$z = \varphi + b, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \pi, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1 \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$$

stellt uns dann die charakteristischen Streifen dar: Hiermit sind dann die b, α, β als gewisse Funktionen der Grössen z, x_i und p eingeführt (– die Grössen t u. π lassen wir bei der Aufzählung der Variablen weiterhin bei Seite –), und diese Funktionen, die also für unser ungestörtes Problem constant sind, wollen wir als die neuen Veränderlichen einführen. Wir verfolgen dieses hier gar nicht weiter, sondern beweisen nur, dass diese Einführung der neuen Variablen b, α_i, β_i in der That eine Berührungstransformation darstellt. Die Sache ist äusserst einfach. Wenn wir nämlich $z - \varphi - b = 0$ als die aequatio directrix auffassen, so haben wir einfach eine derartige Berührungstransformation vor uns, wie gestern im speciellen Falle dreier Variablen, indem ohne weiteres klar ist, dass vermöge unserer For-

meln: $dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 \ldots - p_n dx_n = \varrho(dC - \beta_1 d\alpha_1 \ldots \beta_n d\alpha_n)$ wird. Die durch die „Variation der Constanten" gebotene Einführung neuer Veränderlicher ist einfach ein Beispiel einer durch eine aequatio directrix gegebenen Berührungstransformation.

Wir fügen noch die allgemeine Schlussbemerkung hinzu: Die Berührungstransformationen treten in der geschilderten Weise von Alters her in der Mechanik auf, das Unvollkommene war nur, dass ihre Eigenschaften nicht rein in abstracto entwickelt wurden, sondern jedesmal nur ad hoc in Verbindung mit einer Gleichung $F = 0$. Es sieht daher in den älteren Darstellungen, denen sich auch Tisserand anschliesst, so aus, als handele es sich um einen besonderen für die vorliegende Gleichung zurechtgemachten Kunstgriff. Hier hat erst Lie's geometrische Betrachtungsweise Klarheit verschafft.–

Wir wollen jetzt noch Einiges von der Invariantentheorie [Mo. 6. III. 1] der Berührungstransformationen kennen lernen. Wir fragen zunächst nach solchen Eigenschaften der geometrischen Figuren, die bei beliebiger analytischer Berührungstransformation invariant sind. Es sind hier 2 in Betracht kommende Arbeiten von Lie zu nennen, die in den Ann. 8. (1874 „Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen") sowie in den Verhandlungen von Christiania (1872) veröffentlicht sind. Letztere Arbeit, die den Titel führt: Kurzes Résumé mehrerer neuer Theorien, pflegt

Die gegenwärtige wohl ein Fragment von 1872 zu nennen. Ich führe hier nur einige einzelne Resultate an:

1) Was zunächst eine vorliegende Gleichung $f(xyzpq)=0$ betrifft, so haben wir schon gelegentlich erwähnt, dass dieselbe Reihen von Invarianten gegenüber beliebigen Berührungstransformationen darbietet, dass es vielmehr möglich ist, eine jede solche Gleichung in jede andere derselben Art, z. B. in die einfachste Gleichung $z=0$ durch eine zweckmässige Berührungstransformation überzuführen. In der That ergibt eine nähere Discussion der allgemeinen Formeln für Berührungstransformationen, wie wir sie früher aufgestellt haben, dass man die Function Z gleich einer beliebigen Function $f(xyzpq)$ setzen kann, worauf man noch X, Y, P, Q entsprechend zu bestimmen hat. Dadurch aber wird dann $f=0$ in $Z=0$ verwandelt.

2) Wir können hier noch eine weitergehende Frage aufwerfen, deren Bedeutung auf der Hand liegt. Wenn die Gleichung $f=0$ in die Gleichung $f'=0$ durch eine Berührungstransformation übergeht, so werden offenbar aus den Integralflächen der ersten Gleichung wieder die Integralflächen der zweiten Gleichung hervorgehen, weil dann eine Integralfläche eine solche Vereinigung von Elementen der Gleichung ist, bei welcher jedes Element mit allen Nachbarelementen vereinigt liegt. Das eben Gesagte gilt nun bei einer Berührungstransformation gleichzeitig für jede partielle Differentialgleichung $f=0$.

Dem entgegen wird es allgemeinere Transformationen geben, die nur für die einzelne Gleichung $f=0$ diese Eigenschaft haben und deshalb als Berührungstransformationen in Bezug auf $f=0$ bezeichnet werden sollen. Beispielsweise wird eine Elementen-Transformation, welche die Gleichung $z=0$ in sich überführt, wenn wir verlangen, dass jedes Integral von $z=0$ in ein Integral von $z=0$ übergehen soll, z. B. alle Elemente, die sich an eine Curve auf der Ebene $z=0$ anschmiegen, in solche Elemente, die sich an irgend eine andere Curve auf $z=0$ anschmiegen, verwandelt werden sollen, keineswegs eine Berührungstransformation des Gesammtraumes $x\,y\,z\,p\,q$ zu sein brauchen, sondern nur innerhalb der Ebene $z=0$ den Charakter einer Berührungstransformation besitzen müssen. Wir heben diese Thatsache gerade besonders hervor, weil sich bezüglich derselben in Jacobi's Dynamik unrichtige Angaben finden. Sei B' eine solche Transformation, welche aus den Integralen von $z=0$ wieder Integrale von $z=0$ macht, B eine beliebige Berührungstransformation. Dann wird die allgemeinste Transformation, welche $z=0$ in der Art in eine andere Differentialgleichung verwandelt, dass Integrale in Integrale übergehen, offenbar $B'B$ sein.

9). Wir fragen uns weiter, was hat etwa ein System von gegebenen Ausdrücken $f(x\,y\,z\,p\,q)$, $\varphi(x\,y\,z\,p\,q)$ u. s. w. für Invarianten bei beliebiger Berührungstransformation. Diese Frage gerade behandelt die ausführlich in Anm. 8. und findet, dass es hierbei immer auf

die Betrachtung der Klammerausdrücke (f, φ) etc ankommt. Auf die Einzelheiten können wir hier nicht weiter eingehen.

3). Endlich müssen wir noch von jener besonderen Art von Gleichungen zweiter Ordnung sprechen, die wir bereits vor Weihnachten erwähnten, die Monge-Ampère'schen Gleichungen. Dieselben haben, wie wir lernten, die Form:

$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0$, woselbst A, B, C, D, E irgend welche Funktionen von $xyzpq$ und r, s, t, wie bekannt, die zweiten Differentialquotienten bezeichnen. Leider fehlt es uns jetzt an Zeit, um auf die interessante geometrische Theorie dieser Gleichungen eingehen zu können. Es sei zum eingehenderen Studium auf die neueste Darstellung bei Darboux, Bd. III. p. 263 ff. verwiesen, woselbst man z. B. findet, dass die Monge-Ampère'schen Gleichungen gleichfalls ihre charakteristischen Streifen haben u. s. w. [nur dass Darboux nicht so explicit von den Lie'schen Auffassungsweisen Gebrauch macht, wie wir dies als wünschenswert betrachten müssen.] Ampère hat insbesondere nach solchen Fällen gefragt, in denen diese Gleichung erste Integrale hat. Hierunter wird eine Formel verstanden: $u(xyzpq) = f(v(xyzpq))$, woselbst u und v irgend welche bestimmte Funktionen von $xyzpq$, f aber eine willkürliche Funktion von v bezeichnet. Diese Formel stellt ersichtlich unbegrenzt viele partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung dar, und man kann sich leicht durch Differentiiren überzeugen, dass

deren Integralflächen allemal einer Monge-Ampère'schen Gleichung genügen. Umgekehrt nun haben sich nach Ampères Vorgange die Analytiker insbesondere damit beschäftigt, zu untersuchen, wann eine Monge-Ampère'sche Gleichung überhaupt derartige erste Integrale zulässt. In diese Theorie greift dann Lie ein, indem er den Begriff der Berührungstransformation auf die Monge-Ampère'sche Gleichung überträgt. So gut man die einzelne partielle Differentialgleichung 1. Ordnung auf die Form $x=0$ bringen kann, ebenso wird sich erwarten lassen, dass es auch für die einzelne Monge-Ampère'sche Gleichung eine einfache Normalform geben wird. Ich will die Resultate, die das genannte Lie'sche Résumé gibt, hier kurz anführen, der Beweis derselben ist wohl nie veröffentlicht worden:

a) Man kann durch eine geeignete Berührungstransformation jede Monge-Ampère'sche Gleichung linear machen, d.h. auf die einfache Form bringen:

$$A'r + B's + C't + G' = 0.$$

b) Hat nun die Gleichung erste Integrale $u = f(v)$, so kann man jenachdem die Normalform $r=0$ oder $s=0$ erzielen. In beiden Fällen sind die Integralflächen sofort anzugeben. Für $r=0$ sind dieselben gegeben durch $z = Y_0(y) + x\,Y_2(y)$, wobei Y_1 u. Y_2 beliebige Funktionen von y bezeichnen; man übersieht sofort, dass für dieselben die zweite Ableitung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ wird. Ebenso

werden die Integralflächen für $\delta = 0$ durch $z = X(x) + Y(y)$ gegeben, wo, selbst X eine beliebige Function von x und Y eine beliebige Function von y bezeichnet. Hier sind z. B. im letzten Falle $z = X(x)$ und $z = Y(y)$ zweierlei Integrale; wir müssen nun x und x', bez. z und y an Stelle der obigen u, v gesetzt denken, was für uns keine Schwierigkeiten haben kann, da wir doch gerade sind, $Z = 0$, resp. $X = 0$ als partielle Differentialgleichungen erster Ordnung anzusehen.

Solchermaßen wird überhaupt die Theorie der höheren Differentialgleichungen aus der consequenten Anwendung der Berührungstransformationen ihren Nutzen ziehen. Es ist eine interessante Frage, ob es nicht entsprechend den Berührungstransformationen welche $X\,Y\,Z\,P\,Q$ durch $x\,y\,z\,p\,q$ ausdrücken, auch Osculations-Transformationen gibt, d. h. Transformationen, welche $X\,Y\,Z\,P\,Q$ $X\,Y\,J$ durch $x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t$ ausdrücken. Beecklund hat in Annalen 9 [1875] sowie schon vorher [1874 in Bd. I der Jahresschrift von Hirst] gezeigt, daß diese Frage zu verneinen ist, d. h. daß alle Osculationstransformationen auf die bereits bekannten Berührungstransformationen zurückkommen.

Nun wird man anstatt allgemeiner analytischer Berührungstransformationen ausschließlich algebraische, speciell eindeutige oder birationale Berührungstransformationen betrachten können. Für diese werden dann Gleichungen $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ mit algebraischen Coefficienten wesentlich Gegenstand der Un-

teresses sein, d.h. solche Gleichungen, die man in dem Gesammtraume betrachtet. Die Frage wird sein, welche besondere, algebraische Invariantentheorie diese algebraischen Transformationen gegenüber der Invariantentheorie aller Berührungstransformationen darbieten. Kann nun die in Rede stehenden algebraischen Gleichungen, wie wir wissen, mit Ebenen auch als Curven schreiben: $f(x_1 x_2 x_3 x_4 | u_1 u_2 u_3 u_4) = 0$, mit der Bedingung $u_p = 0$. Die Gleichung $f = 0$ wird in den x homogen vom α^{ten}, in den u homogen vom β^{ten} Grade sein. Insbesondere wird man also fragen können, welche invarianten Eigenschaften einer solchen algebraischen Gleichung gegenüber beliebigen birationalen Berührungstransformationen darbietet. Noch wichtiger für das Studium der transcendenten Functionen, die durch eine algebraische Gleichung $f = 0$ definirt werden, muss es jedoch sein, diejenigen Invarianten einer solchen Gleichung zu definiren, welche Dieselbe gegenüber solchen algebraischen Transformationen der x_i und u_i darbietet, die nicht für den Gesammtraum, aber wohl für die Elemente von $f = 0$ eindeutig sind und dabei für diese Elemente den Charakter der Berührungstransformation haben.

Bei Lie werden die Berührungstransformationen nur unter analytischem Gesichtspunkte entwickelt, für algebraische Transformationen hat er kein specielles Interesse. Wir können sagen: Es wird darauf ankommen, die schärferen Untersuchungen

Der Algebraiker über eindeutige Transformationen (Nöther) in Verbindung zu bringen mit den allgemeinen Auffassungen, wie sie Lie entwickelt, (Berührungstransformation). –

Nun wollen wir zum Schlusse der gegenwärtigen Vorlesung noch einige recapitulirende Bemerkungen, mit den weiteren Perspectiven, die wir in Aussicht nehmen, anknüpfen. Wir haben in diesem Winter die verschiedenen Arten von Coordinaten und Raumelementen, die man benutzt, und die verschiedenen Arten von Transformationen, die existiren, betrachtet, (ohne übrigens diese beiden Dinge immer streng von einander zu trennen). Hierdurch haben wir denn auch denjenigen Begriff bereits zu erwähnen Gelegenheit gehabt, den in seiner ausführlichen Behandlung die Vorlesung des Sommersemesters zum Gegenstande haben soll, den Begriff der Gruppe. Es wird sich in Summa zunächst darum handeln, den Grundgedanken des Erlanger Programmes zur allgemeinen Geltung zu bringen, demzufolge durch jede Gruppe von Transformationen eine besondere Art von Invariantentheorie oder Geometrie bedingt wird. Wir werden zwischen continuirlichen und discontinuirlichen Gruppen unterscheiden. Da wird es insbesondere unsere Aufgabe sein, die Lie'sche Gruppentheorie kennen zu lernen, welche Lie seit 1872 entwickelt hat, und in der es alle überhaupt existirenden con-

linearlichen Gruppen aufzuzählen gilt.

Nun möchte ich zuletzt noch hervorheben, dass unsere bisherigen Betrachtungen und Transformationen keineswegs auf Vollständigkeit Anspruch machen wollen. Es gibt noch manche andere Klasse von Transformationen, die sich in den Arbeiten der Analytiker über Differentialgleichungen, über Potentiale, Integrale u.s.w. zerstreut finden, die bisher niemals systematisch zusammengestellt wurden. Ich habe das in diesem Semester nur unterlassen, weil keine Zeit mehr war. Um so lieber will ich die Forderung bezeichnen, die im Sinne der gegenwärtigen Vorlesung betreffs aller dieser Transformationen aufzustellen ist: Es wird darauf ankommen, alle diese Entwickelungen ins Geometrische zu übersetzen, sie dadurch besser zu verstehen und von dem geometrischen Verständnisse aus womöglich wieder die Analysis zu fördern.

Einleitung in die höhere Geometrie, II.

Vorlesung,

gehalten im Sommersemester 1893

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von Fr. Schilling.

—

GÖTTINGEN 1893.

Autographie und Druck von Baumann & Cie., Cassel.

Vorwort.

Aeussere Gründe haben mich verhindert, die Vorlesung II über höhere Geometrie so zu führen, wie dies geplant war. Konnte ich dieselbe doch erst nach Schluss der Pfingstferien beginnen, während ich andererseits genötigt war, bereits am 1. August zu schliessen. So habe ich die in Betracht kommenden Entwicklungen vielfach nur in ganz allgemeinen Umrissen skizzieren können. Immerhin wird die charakteristische Tendenz hervortreten, die ganze Theorie der Transformationsgruppen zu umfassen, d. h. continuirliche und discontinuirliche Transformationsgruppen nebeneinander zu betrachten. Wenn meine Darstellung in dieser Hinsicht anregend wirken kann, und also überhaupt einigermassen beitragen kann, die zwischen den verschiedenen Disciplinen der Mathematik errichteten trennenden Schranken zurückzuschieben, so wird trotz aller Unvollkommenheiten, die sie im Einzelnen bietet, ihr Hauptzweck erreicht sein.

Göttingen, Anfang August 1893.

F. Klein.

Inhalt.

Seite

Einleitung:

Allgemeines über Gruppen 1
Geometrische Gruppen insbesondere 17
Ihre Bedeutung für die Systematik der Geometrie 27
Sonstige Anwendungen derselben 44
Historische Bemerkungen 52

I. Teil: Continuirliche Transformationsgruppen.

1. Ueber vollständige Systeme partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Definition etc. der vollständigen Systeme 54
Die Reciprocität zu den totalen Systemen 71
Infinitesimale Raumtransformation und zugehörige eingliedrige Gruppen . . 75
Mehrgliedrige Gruppen. Die Bedeutung des Klammerausdrucks 88

2. Allgemeiner Ueberblick über Lie's Theorie der endlichen Gruppen.

Grundbegriffe, infinitesimale Transformationen, Beispiele 98
Heranziehen der Klammerausdrücke 111
Aufzählung aller Gruppen, zunächst bei $n = 1$ 114
Die projectiven Gruppen bei $n = 1$ 132
Die allgemeinen Gruppen bei $n = 2$ 136
Die projectiven Gruppen bei $n = 2$ 149
Begriffsbestimmung der algebraischen Gruppen 155
Specielle Fragen bei projectiven Gruppen 157
Von der Zusammensetzung der Gruppen 161
Die Zerlegung der Gruppen und deren Bedeutung in der Theorie der Differentialgleichungen 169
Die Relationen für die Klammerausdrücke sind ausreichend 177

3. Anwendungen der continuirlichen endlichen Gruppen.

Gewöhnliche Invariantentheorie 193
Allgemeine complexe Zahlen 202

Helmholtz' Raumproblem.

Einleitende Erörterungen 215
Specielleres über Monodromie 225
Lie's Arbeiten von 1890 234
Meine eigenen Ausführungen in Ann. 37 240

Seite

Differentialinvarianten.

Vorbemerkung zur allgemeinen Invariantentheorie 245
Aufstellung der Differentialinvarianten 257

Bericht über Vessiot.

Algebraische Gruppen projectiver Umformungen bei n = 1 265
Aufstellung zugehöriger Differentialgleichungen und deren Integration . . 280
Analoge Theorie der allgemeinen linearen Differentialgleichungen 293

II. Teil: Discontinuirliche Gruppen.

Einleitung 302

Discontinuirliche Gruppen der Elementargeometrie.

Einfachste Gruppen der Ebene 304
Zugehörige Fundamentalbereiche 312
Allerlei Erweiterungen 321
Die Gruppen der regulären Körper 328
Krystallographisch brauchbare Fälle 332
Functionentheoretische Gruppen 334
Das allgemeine krystallographische Problem 342

Discontinuirliche Gruppen der projectiven Geometrie.

Endliche Gruppen bei n = 1 348
Desgleichen bei n > 1 354
Zahlentheoretische Gruppen bei n = 1 362
Desgleichen bei n = 2 369
Allgemeinste Gruppen bei n = 1 378

Schlussbemerkungen 385-388

[Mo. 29. V. 1893]

Bereits in der vorigen Vorlesung war eine vollständige Disposition vorgesehen; ihr gemäß wird es die Aufgabe dieser Fortsetzung der „Höheren Geometrie" sein, den beiden ersten Teilen, der allgemeinen Coordinatenbestimmung und der Lehre von den Transformationen, die im letzten Semester erledigt wurden, jetzt als dritten Teil,

die Gruppentheorie

zur Seite zu stellen.

In der Einleitung wollen wir zunächst den Gruppenbegriff betrachten und seine Bedeutung für die verschiedenen Teile der Mathematik darlegen. Was ist überhaupt eine Gruppe? Es handelt sich da, allgemein gesprochen, um den Inbegriff gewisser

Operationen, die wir mit S, T, U u. s.w. bezeichnen mögen. Die Zusammenstellung zweier Buchstaben, sowie ST, soll bedeuten, dass man die betreffenden Operationen nacheinander anwenden soll. Nun pflegen die einen Mathematiker die Verbindung ST so zu lesen, dass man erst S und dann T, die anderen, dass man erst T und dann S anwenden soll. Natürlich kommt dies ja nur auf eine Verabredung hinaus, die man nach Belieben treffen kann. Wenn man aber das Objekt A, auf welches die beiden Operationen angewandt werden sollen, hinzufügt, dann gilt aus logischen Gründen jedenfalls die folgende Forderung: Liest man die Zusammensetzung ST von links nach rechts, dann müssen wir bei Anwendung der Operation auf irgend ein Objekt A die Operation hinter das Objekt schreiben. (Also AS, AST etc.) Wenn wir aber das Symbol ST von rechts nach links lesen, so werden wir die symbolische Bezeichnung der Operationen vor das Objekt setzen. (SA, TSA.)

Wir wollen für unsere späteren Betrachtungen uns für die erste der genannten Schreibweisen erklären und demgemäss stets die Zusammensetzung mehrerer Operationen von links nach rechts lesen. Doch dies nur beiläufig. Nun entsteht vor allem die wichtige Frage, wann wir von einem Inbegriff von Operationen sagen, dass derselbe eine Gruppe bilde.

Hierzu ist notwendig, dass mit irgend zwei vorkommenden Operationen S u. T immer auch deren Zusammensetzung ST u. TS in der Gesammtheit enthalten ist, d.h. in Worten: Wir nennen einen Inbegriff von Operationen eine Gruppe, wenn mit irgend 2 Operationen immer auch deren Combination in dem gegebenen Inbegriff vorkommt, so dass letzterer gleichsam ein sich abgeschlossenes Gange bildet. Hierin ist von selbst als Folgerung eingeschlossen, dass mit jeder Operation S auch ihre beliebige Wiederholung S^2, S^3, S^r in der Gruppe vorhanden ist.

Wir werden nun sogleich nach Beispielen fragen, um den abstrakterklärten Begriff der Gruppe von Operationen in concreter Weise näher zu erläutern. Das älteste Auftreten derselben bezieht sich auf Buchstabenvertauschungen oder Substitutionen im engerem Sinne. Gegeben sind die Buchstaben $a, b, c \ldots n$, es handelt sich um sämmtliche, bestimmt definirte Vertauschungen, welche dieselben mit einander zulassen. Dieser Gruppenbegriff ist bereits im vorigen Jahrhundert (um 1770) gleichzeitig von Lagrange und Vandermonde angewandt worden, und seit jener Zeit spielt derselbe in der Theorie der algebraischen Gleichungen eine grosse Rolle. Man braucht in dieser Hinsicht nur an den Namen Galois zu erinnern.

Ja, man hat die Gruppentheorie infolge dessen gerade zu als einen Anhang der Algebra betrachtet, doch gewiss mit Unrecht. Denn der Gruppenbegriff greift weit hierüber hinaus in fast allen anderen mathematischen Disciplinen Platz.

Demgemäss haben wir weiterhin die Transformationsgruppen zu nennen, die in der Analysis u. der Zahlentheorie immerfort zur Geltung kommen. Z.B. bildet die Gesammtheit aller linearen Substitutionen von beliebig vielen Variabeln mit nicht verschwindender Determinante, wie jene allgemein in der Formel $x_i' = \sum_1^n a_{ik} x_k$, $|a_{ik}| \gtrless 0$ gegeben wird, eine Gruppe, in dem irgend zwei derartige Substitutionen mit einander combinirt stets wieder eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante geben. Aus dem Inbegriff aller jener linearen Substitutionen können wir nun gern andere Gesammtheiten herausgreifen, die für sich wieder eine Gruppe bilden; z.B. alle Substitutionen mit ganzzahligen Coefficienten a_{ik}. Während die Gruppe der allgemeinen Substitutionen in der Analysis (der linearen Invariantentheorie) zur Anwendung kommt, gebraucht man die Gruppe der ganzzahligen Substitutionen vornehmlich in der Zahlentheorie.

Was wir soeben in analytischen Gewande

vorgefühlt haben, läßt sich nun unmittelbar auch geometrisch auffassen. Dementsprechend trifft uns drittens der geometrische Gruppenbegriff entgegen als die Gesammtheit geometrischer Operationen, die beliebig miteinander combinirt, stets wieder eine Operation derselben Gesammtheit geben. Ein einfaches Beispiel dieser Art, welches wir sogleich noch wiederholt heranziehen wollen, bietet der Inbegriff der ∞^6 Bewegungen des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes dar; als Objekt derselben gilt dann eben der Raum selbst. Ebensowohl könnten wir auch die ∞^{15} Collineationen oder andres dergleichen herausziehen, die gleichfalls eine Gruppe in dem erklärten Sinne bilden. War auch von Alters her es stets die Grundlage geometrischer Betrachtungen, daß die Bewegungen eine 6fach ∞ Gruppe bilden, so ist es insbesondere das Verdienst von C. Jordan in den Jahren 1860–70 diesen Umstand als solchen dargelegt und überhaupt die umfassende Bedeutung des Gruppenbegriffs weit über die nächste Anwendung in der Algebra hinaus nachdrücklich hervorgehoben zu haben. (In seinem Buche von 1870 („Substitutions et équations algébriques") hat C. Jordan freilich jenen Begriff ausschließlich nach seiner Bedeutung für die Algebra behandelt; man hat daher dasselbe, so wichtig es

sonst ist, keineswegs als ein Lehrbuch der allgemeinen Gruppentheorie zu betrachten.

Wir wollen uns nun weiter über gewisse begriffliche Festsetzungen verständigen. Zunächst bietet sich in dem Betracht der Unterschied zwischen einer unendlichen und einer endlichen Gruppe dar. Während die letztere nur eine endliche Anzahl einzelner Operationen umfasst, gehören zu ersterer eben ∞ viele verschiedene Operationen.* Nun ergeben sich für endliche Gruppen leicht einige Sätze, die wir, so einfach sie sind, doch entwickeln wollen. Wie in jeder Gruppe, so sind auch in einer endlichen Gruppe mit deren jedem Operation S die beliebigen Wiederholungen S^2 S^3 S^ν derselben enthalten.

Da nun aber nur eine endliche Anzahl verschiedener Operationen vorhanden sein soll, so muss notwendig in der genannten Aufeinanderfolge einmal $S^{n+\alpha} = S^\alpha$ sein, d.h. $S^n = 1$, woselbst wir mit 1 im Sinne unseres Schreibweise die identische Operation bezeichnen. Aus $S^n = 1$ folgt dann sofort $S^{n-1} = S^{-1}$, d.h. die inverse Operation. Die hierin liegenden Sätze sprechen sich wie folgt aus:

Unter den Operationen einer endlichen

---

* Wir gebrauchen die Worte „endlich" und „unendlich" hier aber in ihrem unmittelbarsten Sinne; später werden wir in dieser Hinsicht eine andere Bedeutung treffen.

Gruppe befindet sich immer die Identität. Zu jeder Operation S gehört ferner ein kleinster Index der Zahl, dass $S^n = 1$ ist. Diese Zahl n nennt man die Periode von S. Endlich: Mit S zusammen befindet sich immer auch die inverse Operation S^{-1} auf.

Diese Sätze brauchen bei einer unendlichen Gruppe keineswegs zu gelten, so dass sie ausschliesslich sich als Folgerungen der Endlichkeit einer Gruppe darstellen. Z. B. enthält das folgende Beispiel einer unendlichen Gruppe

$S_1) \; x' = x + 1$

$S_2) \; x' = x + 2$

$S_3) \; x' = x + 3$ u. so fort, allgemein $S_n: x' = x + n$ (für $n = 1, 2, 3 \ldots$) weder die Identität noch die inverse Operation. Wollen wir Letzteres bei einer ∞ Gruppe haben, so müssen wir es ausdrücklich in die Voraussetzungen aufnehmen. Dieses wollen wir nun in Zukunft stets thun und zwar aus folgendem Grunde: Wir werden doch die Operationen nicht an und für sich in abstracto betrachten, sondern sie auf bestimmte Objecte anwenden. Ist nun $A' = (A) S$, so nennen wir A' aequivalent zu A in Bezug auf die Gruppe. Für unsere späteren Betrachtungen ist es aber wünschenswerth dass

Begriff der Aequivalenz stets so zu gebrauchen, dass er eine gegenseitige Beziehung zweier Objecte aus-drückt. Es folgt aber aus der 2ten Gleichung $A = (A') S^{-1}$. Soll also A aequivalent zu A' in Be-zug auf unsere Gruppe sein, so muss letztere not-wendig auch die Operation S^{-1} enthalten. Und dies ist der Grund zu unserer obigen Festsetzung. Weil S und S^{-1} ist in der That ja auch die Folge, bei als die Aufeinanderfolge beider in der Grup-pe enthalten.

Haben wir so den allgemeinen Gruppen-begriff näher umgrenzt, so gilt es noch eine Reihe von Hülfsbegriffen einzuführen, die wir stets an dem Beispiel der 6 fach ∞ Bewegungsgruppe näher erläutern wollen, um uns sogleich rang-ometrische Gruppen zu gewöhnen.

Es bietet sich zunächst der Begriff der Un-tergruppe dar, unter derselben versteht man, wie in der Bezeichnung selbst liegt, einen Teil der Ge-sammtgruppe der in sich bereits Gruppeneigen-schaft hat. In der Gesammtheit der Bewegungs-gruppe bilden z. B die ∞^3 Drehungen um einen festen Punkt, die ∞^2 Schraubungen um eine feste Gerade (deren jede sich aus einer Drehung um

dieselbe und einer Verschiebung längs derselben zusammensetzen lässt) jedesmal eine Untergruppe. Dasselbe gilt von der Gesammtheit aller Drehungen, die einen regulären Körper mit sich selbst zur Deckung bringen, so geht bekanntlich das Ikosaëder durch eine Gruppe von 60 Drehungen in sich selbst über. Wir entnehmen diesen Beispielen das allgemeine Prinzip: Alle Bewegungen, welche einen einzelnen starren Figur (wie den einzelnen Punkt, die einzelne Gerade, das Ikosaëder) mit sich selbst zur Deckung bringen, bilden eo ipso eine Untergruppe der Gesammtheit.

Als besonderen Fall der Untergruppe sind die cyclischen Untergruppen zu nennen; eine solche entsteht als Gesammtheit der Wiederholungen einer und derselben Operation $S, S^2, S^3 \ldots S^r \ldots$. Das einfachste Beispiel einer cyclischen Untergruppe bietet im Falle der Bewegung des Raumes diejenige dar, die durch Wiederholung der Drehung um eine feste Gerade durch einen aliquoten Teil von 2π statt findet. Natürlich ist diese Untergruppe eine endliche Gruppe, dem entgegen führt die Wiederholung der Operation, die in einer Drehung und Verschiebung in Bezug auf dieselbe Axe, d.h. in einer Schraubung um dieselbe be-

steht, jedenfalls zu einer ∞ cyclischen Untergruppe. Nun wollen wir in unserem Beispiel noch einen Schritt weitergehen, und eine unendlich kleine infinitesimale Drehung oder ∞ kleine Schraubung um eine Axe zu Grunde legen. (Das Wort unendlich klein im Sinne der gewöhnlichen Infinitesimalrechnung verstanden.) Ihre Wiederholung führt zu einer continuirlichen Gruppe, im Gegensatz zu einer discontinuirlichen Gruppe, wie sie die vorigen Beispiele geben, doch haben wir auch jetzt wieder eine cyclische Gruppe.

Haben wir die Definition der cyclischen Gruppe an die Wiederholung einer Operation angeknüpft, so liegt es nahe letztere als die erzeugende Operation zu benennen. Dementsprechend kann man bei einer allgemeinen Gruppe nach einer kleinsten Anzahl erzeugender Operationen fragen, d.h. nach einer kleinsten Anzahl von Operationen S, T u.s.w., aus welchen alle anderen durch Wiederholung und Combination in der Form $S^{\alpha} T^{\beta} S^{\alpha'} T^{\beta'} \ldots$ (wo $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen sind) her, vorgehen. Dieselben werden wir dann gleichfalls als erzeugende Operationen der Gruppe bezeichnen. Es giebt natürlich Gruppen, bei

denen die Anzahl der erzeugenden Operationen nicht auch endlich, sondern unendlich groß ist.

Jetzt kommen wir zu dem Begriff der gleichberechtigten Operationen. Um gleich ein Beispiel anzuführen, so werden wir gewisse Drehungen um 2 beliebige gerade Linien, etwa um die x - Axe und um eine andere Gerade g, aber von gleicher Winkelgröße, etwa beidemal durch den Winkel von 30°, als gleichberechtigte Operationen bezeichnen. Dem welches ist das allgemeine gruppentheoretische Princip, das diesem Begriffe zu Grunde liegt?

[Dr. 30. V 93.]

Wir nennen beide Drehungen unseres Beispieles gleichberechtigt, weil die geraden Linien, welche die Axen der ersteren bilden, einander im Sinne der elementaren Geometrie conform sind, d.h. durch eine Bewegung zur Deckung gebracht werden können. Nennen wir die Drehung um die x - Axe T, diejenige um die Gerade g T', so können wir deren Zusammensetzung T.u. T' leicht wie folgt aufstellen.

Wir wählen irgendeine Bewegung S aus, welche die z-Axe in die Gerade g überführt – es gibt natürlich sehr verschiedene solche Bewegungen. Nun bilden wir uns $S' T$, d.h. wir denken mit dem Gesammtraum R zunächst die inverse Bewegung ausgeführt, welche die Gerade g in die z-Axe übergehen läßt, und dann um die z-Axe die Drehung T ausgeführt. Darauf möge die direkte Bewegung S folgen, welche die z-Axe wieder in die Gerade g zurückführt. Wir behaupten, daß die Zusammensetzung $S^{-1} T S = T'$ ist d.h. dasselbe darstellt, als hätten wir allein um die Gerade g die betreffende Drehung T' ausgeführt. Durch die Operation S^{-1} möge aus unserem ursprünglichem Raum R der Raum R_1 entstanden sein, d.h. $R S^{-1} = R_1$; aus letzterem sei durch die Drehung um die z-Axe der Raum R_2 geworden, d.h. $R_1 T = R_2$. Unterwerfen wir dann die beiden nur durch die Drehung um die z-Axe durch den Winkel von 30° verschiedenen Räume R_1 u. R_2 der Operation S, so geht aus dem ersten natürlich wieder unser ursprünglicher Raum R hervor, aus letzterem ein neuer Raum, der sich von R nur um dieselbe Drehung von

30° um die Gerade g unterscheidet, wie unmittelbar evident ist. dies aber besagt, daß $R_2 S = R S'$; $T S = R T'$ ist, was zu zeigen war. Kurz gesagt: Die Operation $S^{-1} T S$ ist gleich T', weil $\mathfrak{x}$ Räume, welche längs der $\mathfrak{x}$-Axe einen Winkel von 30° einschließen, durch die Operation S gerade in $\mathfrak{x}$ solche Räume verwandelt werden, welche längs der geraden Linie g einen Winkel von 30° einschließen. Auf Grund dieses Beispiels definieren wir den Begriff gleichberechtigte Operationen nunmehr geradezu wie folgt: 2 Operationen T, T' einer Gruppe heißen innerhalb der Gruppe gleichberechtigt, wenn es eine Operation S innerhalb der Gruppe giebt, so daß $S^{-1} T S = T'$ ist. Man sagt in einem solchen Falle auch wohl, T' geht aus T durch Transformation vermöge S hervor. Ein particulärer Fall dieser Relation ist es, wenn $T' = T$ ist, d. h. wenn $S^{-1} T S = T$ oder $T S = S T$ ist. Alsdann nennt man die beiden Operationen T und S miteinander vertauschbar. Natürlich tritt letztere Eigenschaft nur in ganz besonderen Fällen ein.

Die obige Definition, die wir für einzelne Operationen T ausgesprochen haben, können wir

nun sofort auf Untergruppen übertragen. Betrachten wir in der Gleichung $S^{-1} T S = T'$ T als gemeinsames Symbol für alle Operationen einer Untergruppe, während S eine einzelne beliebige Operation der Gesammtgruppe bezeichnet, dann wird bewiesen, dass auch die Gesammtheit der Operationen T' eine Untergruppe bildet. Und diese beiden Untergruppen T und T' nennt man dann miteinander gleichberechtigt. Zum Beweise unserer Behauptung ist folgendes zu zeigen: Es seien T_1 T_2 T_3 die den Operationen T_1 T_2 T_3 entsprechenden Operationen, so dass $S^{-1} T_1 S = T_1'$, $S^{-1} T_2 S = T_2'$ und $S^{-1} T_3 S = T_3'$ ist. Ausserdem sei T_3 als durch Aufeinanderfolge der Operationen T_1 und T_2 entstanden vorausgesetzt, d.h. $T_1 T_2 = T_3$. Es ist nachzuweisen, dass auch T_3' durch Aufeinanderfolge der Operationen T_1' u. T_2' entstanden gedacht werden kann, d.h. dass $T_1' T_2' = T_3'$ ist. Wir setzen in die linke Seite dieser letzten Gleichung für T_1' u. T_2' ihre Werte ein und erhalten

$$S^{-1} T_1 \underbrace{S S^{-1}}_{1} T_2 S = \underbrace{S^{-1} T_1 T_2}_{T_3} S = S^{-1} T_3 S = T_3',$$

was zu beweisen war.

Um jedoch nicht nur diese abstrakten Sym-

bole vor Augen zu haben, wollen wir wieder ein anschauliches Beispiel aus der Gesammtheit der ∞^6 Bewegungen auswählen. So stellen uns stets sämmtliche Bewegungen, welche congruente geometrische Gebilde beziehungsweise ungeändert lassen, immer gleichberechtigte Untergruppen vor.

Als specielle Beispiele stellen wir die sämtlichen Drehungen um einen festen Punkt P mit den sämmtlichen Drehungen um einen anderen festen Punkt O zusammen, ferner die Drehungen oder die Verschiebungen oder, allgemein die Ebenenbewegungen, welche jedesmal eine von 2 geraden Linien ungeändert lassen, endlich die 12 Drehungen, welche je eines zweier regulärer Tetraeder mit sich selbst zur Deckung bringen. Allemal sind die einander gegenübergestellten Untergruppen gleichberechtigt. Es ist das genau so nachzuweisen, wie oben die Gleichberechtigung zweier Drehungen gleicher Amplitude um zwei verschiedene Gerade.

Endlich haben wir noch als wichtigsten Begriff den der ausgezeichneten Untergruppe oder der invarianten Untergruppe zu erklären.

Eine gegebene Untergruppe heißt innerhalb

der Hauptgruppe ausgezeichnet, wenn sie nur mit mit sich selbst gleichberechtigt ist, so daß sie gewissermaßen nicht ihresgleichen hat, sondern einzig in ihrer Art dasteht. Zugleich heißt eine solche Untergruppe eine „invariante", weil dieselbe bei Transformation durch ein beliebiges S ungeändert bleibt. Denn gemäß der obigen Erklärung ist im Falle einer ausgezeichneten Untergruppe stets $S^{-1} T_\alpha S = T_\beta$, woselbst T_α und T_β beide der Untergruppe als Operation angehören müssen.

Ein Beispiel einer ausgezeichneten Untergruppe giebt innerhalb der Gesammtheit der 6fach ∞ vielen Bewegungen die 3fache Gruppe der Translationen (Parallelverschiebungen), wie sie durch die folgende Substitutionsformeln für beliebige Werte $\alpha\beta\gamma$ gegeben werden: $x' = x + \alpha$, $y' = y + \beta$, $z' = z + \gamma$. Sei nämlich T irgendeine Translation des Raumes. Dieselbe wollen wir durch eine beliebige Drehung S transformiren, d.h. wir haben die zusammengesetzte Operation $S^{-1} T S$ zu bilden, die aus der Aufeinanderfolge einer Drehung, der Parallelverschiebung und der inversen Drehung besteht. Daß wir solcherweise wieder nur eine Parallelverschiebung als Resultat bekommen,

ist von selbst klar; um diese Thatsache aber gerade handelte es sich. — Wenn irgendeine Gruppe vorgelegt ist, so ist stets eine Hauptfrage, ob in ihr ausgezeichnete Untergruppen enthalten sind. Ist dies der Fall, so nennt man die Hauptgruppe eine zusammengesetzte, andernfalls eine einfache Gruppe. So ist die 6fach ∞ Gruppe der Bewegungen eine zusammengesetzte Gruppe, weil eben eine ausgezeichnete Untergruppe, wie wir gesehen haben, darin enthalten ist.

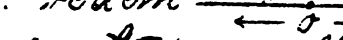
Uebrigens wollen wir noch eine kleine Bemerkung hier hinzufügen. Je zwei Operationen in der Gruppe der Translationen sind offenbar miteinander vertauschbar, was übrigens mit dem Begriff der ausgezeichneten Untergruppe gar nichts zu schaffen hat. Eine aus lauter vertauschbaren Operationen bestehende Gruppe pflegt man eine Abel'sche Gruppe zu nennen.

Wir gehen nun zu dem zweiten Abschnitt dieser Einleitung über, indem wir die besonderen Gruppen etwas näher betrachten wollen, die unserer Vorlesung zu Grunde liegen werden. In ihr wird es sich stets um geometrische Gruppen handeln, d.h. um Gruppen, die sich auf ein continuirliches

Substrat bezeichnen. Die Operationen sind dann Transformationen oder Transformationen einer continuierlichen Mannigfaltigkeit.

Gerade in Rücksicht hierauf haben wir vorhin das Beispiel der 6 fach ∞ Bewegungsgruppe zur Veranschaulichung der allgemeinen Betrachtungen ausgewählt. Nun kann natürlich die Gruppe selbst wohl immer eine continuierliche oder discontinuierliche sein.

Wir müssen nun vorerst allgemein vom Begriff der „Continuums" sprechen. Derselbe ist in neuerer Zeit wiederholt von Weierstraß, Dedekind und insbesondere Georg Cantor in eingehenden Untersuchungen behandelt worden. In den Arbeiten des letzteren vor allem sind gewisse Begriffsbestimmungen gegeben worden, die heranzulage jeder Mathematiker kennen muß. Es seien genannt die Abhandlungen von G. Cantor in den Annalen 15, 17, 20, 21, die zusammen gefaßt auch in Acta Bd II. veröffentlicht sind. Dieselben tragen den gemeinsamen Titel: Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. Wir wollen uns hier auf einige wenige Bemerkungen beschränken: Wir legen zu Grunde das eindimensio-

nale Continuum, wie es durch die Punkte der geraden Linie vorgestellt wird, die wir uns als x Axe gegeben denken. Jedem  rationalen wie irrationalen Werte der Abscisse gehört ein Punkt des Continuums zu und umgekehrt. Dem gegenüber stellen wir eine zweite, lineare Mannigfaltigkeit, die wir aus der continuirlichen Punktreihe erhalten, wenn wir sämmtliche irrationalen Punkte aus derselben fortnehmen, d.h sämmtl. rationale Punkte mit irrationaler Abscisse. Für die Gesammtheit der übrig bleibenden rationalen Punkte hat Cantor den Begriff, überall dicht' eingeführt, der besagt, dass in jedem noch so kleinen Intervall doch immer noch ∞ viele solcher Punkte liegen. Aber die letzte Mannigfaltigkeit, sagt' Cantor, ist nicht perfect (nicht vollendet).

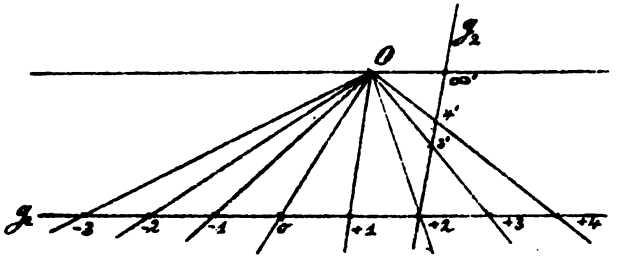
Um diese Bezeichnung zu verstehen, müssen wir den Begriff des Grenzpunktes einer Punktreihe herausziehen. Wir haben uns zu denken, dass eine gewisse Aufeinanderfolge unendlich vieler Punkte vorliegt, die immer mehr auf einen bestimmten, eben den Grenzpunkt, convergiren. Die Mannigfaltigkeit der rationalen Punkte wird nun nicht perfect genannt, weil sie nicht die Eigenschaft hat, wie

[illegible] Grenzhem[illegible] [illegible] Betrachten wir z. B. $\sqrt{2} = 1 \ldots$ als Grenzwert der ∞ Reihe von ra[illegible] [illegible] $x = 1$, $x = 1 \ldots$, $x = 1{,}41$, $x = 1{,}414$ [illegible] [illegible] alle diese rationalen [illegible] der genannten Mannigfaltigkeit un[illegible] [illegible] irrationale Grenzpunkt $\sqrt{2}$ [illegible] [illegible] anderen [illegible] heranziehen, der [illegible] [illegible] vorstellt. Wir resumiren: [illegible] welche auf der geraden Linie [illegible] überall dicht liegt [illegible]

[illegible] der Linie eine [illegible] Mannigfaltigkeit [illegible] Punkte [illegible] Diese liegen [illegible] doch haben sie ei[illegible] [illegible] Um die [illegible] wir diese [illegible] innerhalb der [illegible] aus durch die [illegible] Rechtsschlüsse; [illegible] wird dabei

der Parallelstrahl zu letzterem zugeordnet sein.

Wir denken nochmals das Strahlbüschel durch eine beliebige zweite, nicht zur ersten gerade parallele Gerade g_2 geschnitten. Richten wir dann unser Augenmerk auf die in der Nähe des dem Parallel-



strahl zugehörigen Schnittpunktes ∞' auf g_2 gelegenen weiteren Schnittpunkte, so bemerken wir, dass dieselben sich in unendlicher Zahl beiderseits an den Punkt ∞' heran drängen. Eine solche Stelle ∞' nennt man dem entsprechend eine Häufungsstelle der Mannigfaltigkeit, (ist die Punktmannigfaltigkeit überall dicht, so ist natürlich jeder Punkt eine Häufungsstelle.)

Die ganzzahligen Punkte einer geraden Linie geben uns ein Beispiel dafür, dass eine unendliche Punktmannigfaltigkeit keineswegs überall dicht zu sein braucht, aber sie besitzt eine Häufungsstelle.

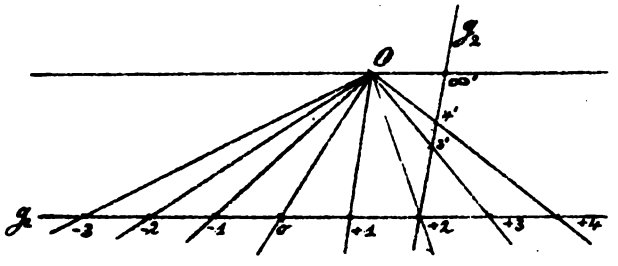
Die Häufungsstelle selbst braucht übrigens der Punktmannigfaltigkeit nicht anzugehören, aber sie

das Continuum, dass ein jeder ihrer Grenzwerthe ihr selbst angehört. Betrachten wir z.B. $\sqrt{2} = 1,414$ als Grenzwerth der ∞ Reihe von rationalen Punkten $x = 1$; $x = 1,4$; $x = 1,41$; $x = 1,414$ u.s.w., so gehören zwar alle diese rationalen Punkte der genannten Mannigfaltigkeit an, aber nicht mehr der irrationale Grenzpunkt $\sqrt{2}$ selbst. Ebenso können wir jeden anderen unendlichen Decimalbruch heranziehen, der eine irrationale Zahl vorstellt. Wir resumiren: Eine Punctmenge, welche auf der geraden Linie (oder auf einem Theile derselben) überall dicht liegt, braucht keineswegs perfect zu sein.

Nehmen wir auf der geraden Linie eine andere bemerkenswerthe Mannigfaltigkeit, nämlich die Reihe der ganzzahligen Punkte $\ldots\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$. Diese liegen offenbar nicht überall dicht, doch haben sie eine andere merkwürdige Eigenschaft. Um die, so deutlich zu erkennen, projicieren wir diese ganze Punktreihe von einem ausserhalb der Geraden g gelegenen Punkte O aus durch die ganzzahligen Strahlen eines Strahlbüschels; dem Punkte ∞ unserer Geraden wird dabei

der Parallelstrahl zu letzterem zugeordnet sein.

Wir denken nochmals das Strahlbüschel durch eine beliebige zweite, nicht zur ersten geraden parallele Gerade g_2 geschnitten. Richten wir dann unser Augenmerk auf die in der Nähe des dem Parallel-



strahl zugehörigen Schnittpunktes ∞' auf g_2 gelegenen weiteren Schnittpunkte, so bemerken wir, dass dieselben sich in unendlicher Zahl beiderseits an den Punkt ∞' heran drängen. Eine solche Stelle ∞' nennt man dem entsprechend eine Häufungsstelle der Mannigfaltigkeit, (ist die Punktmannigfaltigkeit überall dicht, so ist natürlich jeder Punkt eine Häufungsstelle.)

Die ganzzahligen Punkte einer geraden Linie geben uns ein Beispiel dafür, dass eine unendliche Punktmannigfaltigkeit keineswegs überall dicht zu sein braucht, aber sicher eine Häufungsstelle besitzt.

Die Häufungsstelle selbst braucht übrigens der Punktmannigfaltigkeit nicht anzugehören, aber sie

kann ihr angehören. Im ersten Falle wird die Punktmannigfaltigkeit wieder nicht perfect, im letzten Falle perfect heißen.

[Gö. 31 V. 93.]

Wir kehren nun zu der Einteilung der Gruppen in continuirliche Gruppen, discontinuirliche Gruppen und gemischte Gruppen (oder complexe Gruppen nach Lie) zurück. Eine continuirliche Gruppe enthält eine continuirliche Schaar von Operationen, eine solche wird beispielsweise durch die ∞^6 Bewegungen des Raumes vorgestellt. Eine discontinuirliche Gruppe dagegen besteht aus lauter gezählten Operationen, hier sind als Beispiel etwa die Drehungen der regulären Körper zu nennen.

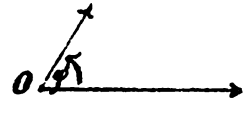
Eine gemischte Gruppe endlich ist aus einer gezählten Zahl continuirlicher Schaaren von Operationen zusammengesetzt. Wollen wir auch für diesen ein Beispiel anführen, so brauchen wir nur zu den ∞^6 Bewegungen des Raumes diejenigen Operationen, welche eine geometrische Figur in ihr Spiegelbild überführen, hinzuzunehmen. Letztere wollen wir kurz als die Operationen 2. Art bezeichnen, dieselben bilden gleichfalls eine 6 fach

unendliche Mannigfaltigkeit, welche von der Mannigfaltigkeit der Bewegungen völlig getrennt ist.

Lassen in der That die Bewegungen und Spiegelungen des Raumes zusammen eine Gruppe bilden; folgt einfach daraus, dass 2 Bewegungen oder 2 Spiegelungen nacheinander ausgeführt allemal eine, dass eine Bewegung oder eine Bewegung und eine Operation 2ter Art nacheinander angewandt allemal eine Operation 2ter Art ergeben.

Die genischten Gruppen sind als die allgemeinen, als diejenigen, welche die continuirlichen und die discontinuirlichen Gruppen umfassen, schliesslich die wichtigsten; anderseits sind die Beispiele genischter Gruppen mit denen wir zunächst zu thun haben, so einfach, dass eine besondere Theorie für sie nicht nöthig ist. Wir werden uns daher vornehmlich mit jenen anderen beiden Gruppenarten beschäftigen.

Doch wollen wir sogleich der grösseren Klarheit wegen noch einige Beispiele den vorstehenden Bemerkungen anreihen. Wir gehen aus von einer beliebigen Drehung in der Ebene durch den Winkel φ um den Punkt O, dieselbe wollen wir mit S bezeichnen. Dann betrachten wir die cyclische Gruppe, die aus den



Wiederholungen dieser Drehung S besteht, wie sie symbolisch in ihren einzelnen Operationen durch $\ldots S^{-2}, S^{-1}, 1, S, S^2, \ldots S^n \ldots$ gegeben wird. Wir haben dann die zwei Fälle zu unterscheiden, dass φ mit π commensurabel, etwa gleich $\frac{2m\pi}{n}$, wenn m und n zu einander teilerfremd seien, ist, oder dass dies nicht der Fall ist.

Im ersteren Falle wird dann offenbar unsere Gruppe nur aus der endlichen Zahl der Drehungen durch die Winkel $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \ldots \frac{n-1}{n}2\pi$ bestehen. Ist aber der Winkel φ incommensurabel mit π, so werden wir niemals zu einer vollen Umdrehung gelangen, so oft wir auch die betreffende Drehung nacheinander ausführen mögen. Doch bekommen wir in diesem Falle aus einem Anfangsstrahl beliebig viele neue Strahlen, die überall dicht das Strahlbüschel in O ausfüllen. Unsere Gruppe enthält demnach unendlich viele voneinander verschiedene Operationen, unter diesen insbesondere auch ∞ kleine Operationen; d. h. Drehungen durch einen Winkel, viel, der kleiner als jeder beliebig vorgegebene Winkel ist.

Gleichwohl ist diese Gruppe nicht continuierlich, sondern discontinuierlich. Denn die aequivalenten Strahlen liegen im Büschel zwar überall dicht, aber

bilden keine perfecte Mannigfaltigkeit. Sie verhalten sich ganz analog, wie die rationalen Punkte der Zahlenreihe.

Wir müssen daher wohl auseinanderhalten, daß nicht nur die continuirlichen, sondern auch die discontinuirlichen Gruppen unter Umständen mit ∞ kleinen Operationen zu thun haben, doch haben wir erstenfalls den Begriff des ∞Kleinen im gewöhnlichen Sinne der Differentialrechnung, im letzten Falle im arithmetischen Sinne zu verstehen. Hier nagt also die Zahlentheorie in die Geometrie hinein; Mathematiker, die ausschließlich geometrisch denken, wie Lie, werden dadurch veranlaßt, solche Vorkommnisse überhaupt bei Seite zu lassen. Daß auch sprungweise ein Uebergang zum ∞Kleines stattfinden kann, ist etwas, was den gewöhnlichen geometrischen Continuitätsvorstellungen völlig fern liegt. Wir müssen das jedoch mitnehmen, werden aber der Deutlichkeit halber mit Poincaré zwischen eigentlich discontinuirlichen und uneigentlich discontinuirlichen Gruppen unterscheiden; jene enthalten keine ∞kleinen Operationen, die dagegen letzteren angehören.

Ein Beispiel der eigentlich discontinuir-

lichen Gruppen geben die Substitutionen $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, woselbst $\alpha\beta\gamma\delta$ ganze Zahlen mit der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ bezeichnen. Man überzeugt sich leicht, dass natürlich keine unendlich kleinen Substitutionen in dieser Gruppe enthalten sein können. Denn wenn wir verlangen, dass für jedes x das x' nur um ∞ wenig verschieden sein soll, so komme ich durchaus darauf, dass es sich um die identische Operation handelt.*) Unsere obige Gruppe ist überdies eine unendliche, denn es giebt doch ∞ viele Zusammenstellungen ganzer Zahlen $\alpha\beta\gamma\delta$, deren Determinante gleich 1 ist. Anderseits sind mit $x = 0$ alle Punkte $\frac{\beta}{\delta}$ aequivalent, wo β u. δ ganze Zahlen sind, für welche sich die Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ auflösen lässt, dies aber besagt nach den Grundsätzen der Zahlentheorie nicht mehr und nicht weniger, als dass β u. δ relativ prim sind. Es kommt dies darauf hinaus, was sehr merkwürdig ist, dass mit $x = 0$ alle rationalen Punkte der x-Axe aequivalent sind. Wir haben hier daher ein Beispiel, dass

*) In der That sollte $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ eine von der Identität verschiedene unendlich kleine Substitution sein, so müssen α und δ einander ungefähr gleiche, sehr grosse Zahlen, β u. γ sehr kleine Zahlen sein, was aber der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ widerspricht.

bei einer eigentlich discontinuirlichen Gruppe die aequivalenten Punkte trotzdem überall dicht liegen. Uebrigens gilt das in unserem Beispiele nur für die reellen Werte von x, für die complexen Werte von x ist es ganz anders, wie in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen ausführlich nachgewiesen wird.

Als drittes Beispiel wählen wir die ganz einfache Gruppe, die aus den Operationen $x' = x + n$ besteht, indem wir in alle ganzen Zahlen durchlaufen lassen. Dem Punkt $x = 0$ entsprechen hier alle Punkte mit ganzzahliger Abscisse, die dann an dem Unendlichkeitspunkt sich ∞ zusammendrängen. Unser Beispiel zeigt, daß bei einer unendlichen eigentlich discontinuirlichen Gruppe die aequivalenten Punkte zwar nicht etwa überall dicht zu liegen brauchen, aber dann jedenfalls eine Häufungsstelle haben. —

Jetzt wollen wir dazu übergehen zu betrachten, <u>wie diese verschiedenen geometrischen Gruppen in den verschiedenen Gebieten der Mathematik zur Geltung kommen</u>: Hier handelt es sich gewöhnlich um Geometrie im engeren Sinne. Und für sie eine Antwort auf die genannte Frage zu geben,

lichen Gruppen geben die Substitutionen $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, wo selbst $\alpha\beta\gamma\delta$ ganze Zahlen mit der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ bezeichnen. Man überzeugt sich leicht, dass natürlich keine unendlich kleinen Substitutionen in dieser Gruppe enthalten sein können. Denn wenn wir verlangen, dass für jedes x das x' nur um ∞ wenig verschieden sein soll, so kommt es durchaus darauf, dass es sich um die identische Operation handelt.*) Unsere obige Gruppe ist überdies eine unendliche, denn es giebt doch ∞ viele Zusammenstellungen ganzer Zahlen $\alpha\beta\gamma\delta$, deren Determinante gleich 1 ist. Andererseits sind mit $x = \infty$ alle Punkte $\frac{\beta}{\delta}$ äquivalent, wo β u. δ ganze Zahlen sind, für welche sich die Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ auflösen lässt, dies aber besagt nach den Grundsätzen der Zahlentheorie nicht mehr und nicht weniger, als dass β u. δ relativ prim sind. Es kommt dies darauf hinaus, was sehr merkwürdig ist, dass mit $x = \infty$ alle rationalen Punkte der x-Axe äquivalent sind. Wir haben hier daher ein Beispiel, dass

*) In der That sollte $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ eine von der Identität verschiedene unendlich kleine Substitution sein, so müssen α und δ einander ungefähr gleiche, sehr grosse Zahlen, β u. γ sehr kleine Zahlen sein, was aber der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ widerspricht.

bei einer eigentlich discontinuirlichen Gruppe die aequivalenten Punkte trotzdem überall dicht liegen. Uebrigens gilt das in unserem Beispiele nur für die reellen Werte von x, für die complexen Werte von x ist es ganz anders, wie in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen ausführlich nachgewiesen wird.

Als drittes Beispiel wählen wir die ganz einfache Gruppe, die aus den Operationen $x' = x + n$ besteht, indem wir in alle ganzen Zahlen durchlaufen lassen. Dem Punkt $x = 0$ entsprechen hier alle Punkte mit ganzzahliger Abscisse, die dann an dem Unendlichkeitspunkt sich ∞ zusammendrängen. Unser Beispiel zeigt, daß bei einer unendlichen eigentlich discontinuirlichen Gruppe die aequivalenten Punkte zwar nicht etwa überall dicht zu liegen brauchen, aber dann jedenfalls eine Häufungsstelle haben. —

Jetzt wollen wir dazu übergehen zu betrachten, <u>wie diese verschiedenen geometrischen Gruppen in den verschiedenen Gebieten der Mathematik zur Geltung kommen</u>: Hier handelt es sich gewöhnlich um Geometrie im engeren Sinne. Und für sie eine Antwort auf die genannte Frage zu geben,

ist gerade der Grundgedanke meines Erlanger Programms, der sich dahin präzisieren läßt zu versuchen, wie die geometrischen Gruppen dazu dienen einen systematischen Ueberblick über die verschiedenen Behandlungsweisen der Geometrie zu geben. Ich habe im letzten Wintersemester habe wir ja beständig diesen Gedanken berührt, jetzt gilt es noch eine zusammenfassende Darstellung dieser Verhältnisse zu geben.

Zunächst werden wir uns zu fragen haben, worin eigentlich für den hier in Betracht kommenden Standpunkt das Wesen der Geometrie beruht. Da haben wir vor allem den Gegensatz zwischen Geometrie und Topographie zu constatieren. Man kann denselben wohl nicht besser charakterisieren, als wenn ich einen Satz anführe, der von dem verstorbenen Prof. Höppner in Königsberg gesprächsweise angeführt zu werden pflegte, wenn es sich darum handelte, den hier in Betracht kommenden Unterschied der Geometrie hervorzuheben.

Höppner sagte: In jedem Dreieck liegt der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises von dem des umbeschriebenen Kreises 3 mm. nach Osten entfernt. Er habe sich davon durch Versuche überzeugt.

Natürlich mag ja in einem einzelnen Falle Ein

bestimmter Lage des vorliegenden Dreiecks jener Satz als topographische Wahrheit seine Richtigkeit haben; jedoch wird bei einem geometrischen Satz gewiss nicht allgemein von der Lage eines Dreiecks gegen die Himmelsrichtungen oder von bestimmten Entfernungen irgend welcher Punkte die Rede sein können. Geometrie unterscheidet sich eben dadurch von Topographie, dass nur solche Eigenschaften des Raumes geometrisch heissen, welche bei einer gewissen Gruppe von Operationen ungeändert bleiben. Welches ist nun jene Gruppe? Natürlich gehören zu ihr die ∞^6 Bewegungen des Raumes, doch auch die ∞^6 Operationen 2ter Art, die wir soeben schon nannten. Denn 2 Figuren, die einander spiegelbildlich gleich sind, kann ich nur insofern überhaupt von einander unterscheiden, als ich sie zu einer dritten Figur, etwa den unendlichen Körper in Beziehung setze. (vergl. Ampères Regel betr. die Ablenkung der Magnetnadel durch den electrischen Strom).

Man kann wohl sagen, dass zwei symetrische Figuren nicht zur Deckung zu bringen sind, doch welche von beiden man im besonderen Falle meint, lässt sich in abstracto absolut nicht angeben. Zu

jenen Operationen kommen nun weiter noch die Aehnlichkeitstransformationen, ihnen gemäss sind zwei geometrische Figuren völlig aequivalent, die einander ähnlich sind; es gibt in der Geometrie keine absolute Grösse*). Aus diesem Grunde kann auch ein bestimmter Abstand, wie 3 mm. im obigen Beispiele, nicht vorkommen. Insgesammt besteht daher unsere geometrische Gruppe aus ∞^7 Transformationen, die wir die Hauptgruppe nennen wollen. Dieselbe ist durch das Hinzutreten der Operationen 2ter Art zur gemischten Gruppe geworden. Unser Resultat ist dann dieses, dass die Geometrie nicht ein Studium der Mannigfaltigkeit der Punkte $x\,y\,z$ unseres Raumesschlechtweg ist, sondern ein Studium der zu der Hauptgruppe der räumlichen Transformationen gehörenden Invariantentheorie.

Wie gehen wir nun von dem Inbegriff der elementaren Geometrie zur projectiven Geometrie über? In ihr unterscheidet man, wie wir wissen, die geometrischen Eigenschaften der Figuren als reine projective oder aber als metrische, und letz-

*) nämlich in der Euklidischen Geometrie, im Gegensatz zu der Nicht-Euklidischen

tere faßt man als projective Beziehungen zu dem sogenannten Kugelkreise auf. Nun handelt es sich um die Frage, von der ich bei meinem Erlanger Programm ausging: Was ist eigentlich der innere Kern dieser Auffassung, worin liegt seine Berechtigung begründet? In gewissen mathematischen Kreisen hatte man sich damals und ist auch noch heute so sehr an die projective Auffassung gewöhnt, daß man dieselbe geradezu als die einzig "Wissenschaftliche" hinstellt. Jeder elementare Beweis, jede metrische Betrachtung sei nun dann zufriedenstellend, wenn in ihnen der Kugelkreis, Doppelverhältnisse u. dergl. ausschließlich zur Anwendung kommen. Doch ist dieses gewiß nicht richtig gedacht, wie gerade das Erlanger Programm nachzuweisen sich zur Aufgabe stellt.

In der projectiven Geometrie liegt an Stelle der Hauptgruppe die umfassendere Gruppe aller Collineationen zu Grunde, d. h. ∞^{15} Operationen, deren Invariantentheorie wird dann studirt. In dem wir hierin das Wesen der projectiven Geometrie erkennen, sprechen wir zugleich aus, daß es ∞ viele Arten gibt, die elementare Geometrie zu erweitern, sofern man nämlich statt

der 1 fach ∞ Hauptgruppe irgend eine andere Transformationsgruppe adjungiren will, welche die Hauptgruppe umschließt, und daß alle diese Arten unter sich und mit der elementaren Geometrie selbst als gleichberechtigt zu gelten haben.

Fr. 1 II 93.]

Die bereits erwähnte Einordnung der metrischen Eigenschaften der Figuren in das System der projectiven Geometrie mit Hülfe des Kugelkreises läßt eine doppelte Auffassung zu. Durch die Festhaltung dieses Gebildes geht ja aus der G_{15}, d.h. der 15 fach ∞ Gruppe der projectiven Geometrie, die G_7 unserer Hauptgruppe, hervor.

Nun kann man entweder zu der letzteren d.h. zur elementaren Geometrie von der projectiven Geometrie herabsteigen, indem man eben nur die Collineationen zu Grunde legt, welche den Kugelkreis festlassen, oder aber man behält die G_{15} bei, fügt jetzt jedoch den Kugelkreis den vorliegenden Figuren hinzu und behandelt dann nicht blos die projectiven Eigenschaften der Figuren an sich, sondern die simultanen Eigenschaften der gegebenen Figuren und des

Kugelkreises.

Das Wesen der Sache ist jedenfalls, dass die Hauptgruppe G_7 in der G_{15} als Untergruppe enthalten ist. Und so oft ein derartiges Vorkommniss vorliegt, bleibt stets eine derartige doppelte Wahl offen, wie man die Geometrie der Untergruppe (die Invariantentheorie der Untergruppe) in Beziehung zu der allgemeinen Geometrie (zur Invariantentheorie der allgemeinen Gruppe) auffassen will.

Nun können wir noch in der projectiven Geometrie selbst eine Abstufung eintreten lassen, je nachdem wir entweder nur reelle Collineationen betrachten oder auch complexe oder imaginäre Collineationen hinzunehmen.

Die Mannigfaltigkeit der letzteren ist jagerade doppelt so gross, als die der ersten, wir haben es im letzteren Falle eben mit einer G_{30} zu thun, sofern wir die Mannigfaltigkeit einer complexen Variablen eine zweifach unendliche nennen. Wir theilen dementsprechend die projective Geometrie ein in die Invariantentheorie der reellen Collineationen und in eine solche der complexen Collineationen. Um

nun von der allgemeinsten projectiven Geometrie bei der auch complexe Collineationen als gleichwerthig betrachtet werden, herabzusteigen zu jener, bei der nur reelle Collineationen in Betracht gezogen werden, wird man wieder ein Gebilde einführen, welches die der G_{30} auf die G_{15} reducirt, wenn es festgehalten wird. Also solches bietet sich die Gesammtheit der reellen Punkte dar, wie vorhin bei dem Abstieg zur elementaren Geometrie der Kugelkreis.

Das Entscheidende, wonach wir innerhalb der projectiven Geometrie gliedern, ist, wie Sie sehen, immer die Gruppe. Welche Art von Raumelement wir im übrigen zu Grunde legen, ob den Punkt, die Ebene oder die gerade Linie, macht für den Charakter der geometrischen Betrachtungen nur einen sekundären Unterschied.

Wir wollen jetzt unsere Gruppe noch so erweitern, daß wir auch die dualistischen Transformationen hinzunehmen. In Punktcoordinaten allein kann man natürlich die dualistische Transformation nicht darstellen, da ja dem einzelnen Punkt eine Ebene d.h. eine 2fach ∞ Mannigfaltigkeit einzelner Punkte zu-

geordnet ist. Wir müssen entweder den Punkten die Ebenen als neue Raumelemente hinzufügen, oder aber wir führen die geraden Linien als Raumelement ein. Denn eine gerade Linie geht durch alle genannten Transformationen stets wieder in eine gerade Linie über. In meinem Programm habe ich an dieser Stelle das von Dedekind herrührende Wort „Körper" gebraucht; unter demselben soll jedesmal die Gesammtheit aller Elemente, die vermöge einer vorgelegten Gruppe auseinander hervorgehen, verstanden werden. So wird z. B. die Gesammtheit aller Punkte in Bezug auf die Gruppe der Collineationen einen Körper bilden. Nehmen wir jedoch zu letzteren die dualistischen Transformationen hinzu, so werden die Punkte für sich allein keinen Körper mehr bilden, sondern erst mit der Gesammtheit aller Ebenen, anderseits wird die Gesammtheit aller geraden Linien einen Körper bilden. Das allgemeine Princip ist dann: Um die Transformationen einer Gruppe analytisch darzustellen, ist die eine Voraussetzung selbstverständlich festzuhalten, dass die Raumelemente, welche man der Coordinatenbestimmung

zu Grunde legen will, den Transformationen der Gruppe gegenüber einen Körper bilden.

Speciell werden nun auch vereinigte Punkte u. Ebenen für die Gesammtheit der linearen u. dualistischen Transformationen einen Körper bilden, d.h. Punkte x und Ebenen u, welche die Bedingung $u_x = 0$ erfüllen. diese Vereinigung von Punkt und Ebene ist aber identisch mit dem Lie'schen Flächenelement, das wir umhs. mogendurch die Coordinaten $x\,y\,z\,p\,q$ bestimmten. Daher werden wir für unsere erweiterte Gruppe auch diese Flächenelemente als Raumelemente gelten lassen können, was damit stimmt, dass alle Operationen der erweiterten Gruppe Berührungsformationen sind. Soviel zunächst über das Wesen der projectiven Geometrie. —

Wir wollen jetzt den Gedanken der gestrigen Vorlesung wieder aufgreifen, dass die Entwicklung der elementaren Geometrie zur projectiven Geometrie nicht die einzige Erweiterung der ersteren ist, sondern dass letztere noch auf manche andere Weise vorgenommen werden kann. Wir haben in diesem Sinne an Betrachtungen zu erinnern, die gleichfalls be-

reits im vorigen Semester uns beschäftigt haben. Da war zunächst die conforme Geometrie des Raumes oder die Geometrie der reciprosken Radien. Bei ihr handelt es sich um eine G_{10}, die aus der Hauptgruppe G_7 durch Hinzunahme der Inversionen entsteht.

Wir wissen ferner bereits, daß die einfache analytische Darstellung der conformen Geometrie oder ihrer G_{10} sich unter Zugrundelegung homogener pentasphärischer Punkt-Coordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5$ mit der Bedingung $R(x) = 0$ ergibt.

Es handelt sich einfach um diejenigen linearen Substitutionen dieser x, welche die Gleichung $R = 0$ in sich selbst überführen. Das Gebilde, welches durch eine beliebige lineare Gleichung unserer x_i vorgestellt wird, war die Kugel. Aus einer solchen geht durch eine beliebige Substitution der Gruppe stets wieder eine Kugel hervor. Ebenso natürlich geht jeder Punkt wieder in einen Punkt über. D.h. die Gesamtheit der Kugeln wie die Gesamtheit der Punkte bildet gegenüber den Transformationen der Gruppe einen Körper. Dementsprechend können wir

die Punkte oder auch die Kugeln als Raumelemente zur Darstellung unserer Gruppe zu Grunde legen. In letzterem Falle würden wir die Kugelcoordinaten u_i einzuführen haben, die in der Kugelgleichung $u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots u_5 x_5 = 0$ als Koëfficienten auftreten, in genau analoger Weise, wie wir sonst Ebenencoordinaten einführen und bei der Gruppe aller Collineationen zu Grunde legen können. In der conformen Geometrie bilden die Ebenen des Raumes keinen Körper, da ja aus einer Ebene im allgemeinen eine Kugel entsteht, wir können daher in der conformen Geometrie auch keine Ebenencoordinaten brauchen. Wir sagen ausdrücklich: Insofern wir die Kugel als Raumelement einführen, erscheint die conforme Geometrie insbesondere als die niedere Kugelgeometrie.

Letzterer reiht sich dann weiter an die höhere Kugelgeometrie oder die Lie'sche Kugelgeometrie; ihr liegt, wie wir im vorigen Semester lernten, eine Gruppe von ∞^{15} Transformationen zu Grunde. Für sie bilden nun aber die Punkte keinen Körper mehr, in dem

z. B. durch eine Parallelbransformation, die durch $x' = x + c$ charakterisirt ist, ein Punkt (d.h. eine Nullkugel) in eine eigentliche Kugel über geführt wird. Dagegen bilden einen Körper die Gesammtheit aller Kugeln. Wir können daher unsere Gruppe darstellen, indem wir die Kugeln als Raumelement einführen. Doch auch die Lie'schen Flächenelemente $xyzpq$ bilden hier einen Körper. Demnach wird man unsere Gruppe auch in Coordinaten dieser Flächenelemente wiedergeben können, wo dann die Transformationen der Gruppe als besondere Fälle von Berührungstransformationen erscheinen. (Vielleicht liegt es darin, dass die Punkte hier keinen Körper bilden, begründet, dass die höhere Kugelgeometrie bisher so wenig Anklang gefunden hat, so dass eine systematische Bearbeitung der höheren Kugelgeometrie, so wünschenswerth dieselbe ist, noch immer aussteht.)

Nun gehen wir noch einen Schritt in der Erweiterung unser Gruppe vorwärts, indem wir die Geometrie aller Punktbransformationen betrachten. Wir haben dann die Haupt-

Gruppe G_7 der elementaren Geometrie zunächst zur G_{15} der projectiven Geometrie, dann zu der weit umfassenden Gruppe aller Punkttransformationen ausgedehnt. (Wenn anders wie hier, was nicht nothwendig wäre, gerade die projective Geometrie als Zwischenstufe gelten lassen wollen.) Die genannte Geometrie erweist sich, wie wir wissen, besonders nützlich beim Studium der Differentialausdrücke (Pfaff'sche Ausdrücke bei ihr kann man sich dann jenachdem noch beschränken blos auf rationale Punkttransformationen d. h. Cremonatransformationen oder auf algebraische Punkttransformationen oder wenigstens auf analytische Punkttransformationen. Wie unsere Hauptgruppe G_7 ∞^7 verschiedene Operationen enthielt, ebenso die G_{15} ∞^{15} Operationen, so umfasst die Gruppe aller Punkttransformationen ∞^∞ Operationen. Hier ist Anlass, die bezügliche Lie'sche Terminologie zu erwähnen. Die bezeichnete eine Gruppe, die eine endliche Zahl Parameter besitzt, trotzdem ja in Wirklichkeit ∞ viele Operationen vorhanden sind, als eine endliche Gruppe (im Gegensatz zu unserem früheren naiven Sprachgebrauch

eine solche Gruppe endlich zu nennen, die nur aus einer endlichen Zahl einzelner Operationen besteht und spricht von einer ∞ Gruppe erst dann, wenn ∞ viele Parameter vorliegen. In diesem Lie'schen Sinne unterscheidet sich daher die Geometrie aller Punktbransformationen von den vorhin aufgeführten Geometrieen dadurch, daß eine unendliche Gruppe von Punktbransformationen zu Grunde gelegt ist, während es sich früher immer nur um eine endliche Gruppe gehandelt hatte.

Schließlich führen wir noch den letzten Schritt aus und erheben uns zur Geometrie aller Berührungstransformationen. Das ist die allgemeinste Geometrie, die wir in vorigem Semester erreicht haben. Auch ihr liegt natürlich eine ∞ Gruppe zu Grunde, eine Gruppe, welche die vorige wieder umfaßt. Die Punkte des Raumes wie die Ebenen oder Kugeln bilden jedoch jetzt keinen Körper mehr, daher gelingt es nicht, Punktcoordinaten u.s.w. zur Darstellung der Gruppe zu Grunde zu legen, vielmehr müssen wir die Lie'schen Flächenelemente $x\,y\,z\,p\,q$ als Raumelemente wählen. Dann wissen Sie, handelt es sich

um die Gesammtheit aller Transformationen der $xyxpq$, die den Differentialausdruck $dx - pdx - qdy$ in ein Multiplum seiner selbst überführen.

Nun wollen wir jedoch auch umgekehrt von der Geometrie aller Berührungstransformationen einmal bis zur gewöhnlichen Geometrie herabsteigen, indem wir uns fragen, welches Gebilde wir jedesmal zu adjungieren haben, um den Standpunkt der nächst niedrigeren Gruppe zu gewinnen. Hat man sich mit der Gruppe aller Berührungsformationen vertraut gemacht, so wird man zunächst das Gebilde der Mannigfaltigkeit aller Raumpunkte adjungieren. Dadurch wird die Gruppe aller Berührungstransformationen im Prinzip auf die Gruppe aller Punkttransformationen reduciert.

Sodann adjungiert man die Ebenen des Raumes. Hiermit sind allein diejenigen Punkttransformationen zugelassen, welche aus Ebenen wieder Ebenen machen, diese aber bilden die Gruppe der Collineationen, so daß wir den Standpunkt der projectiven Geometrie erreicht haben. Nun wissen wir bereits, wie wir

von da durch weitere Adjunction des Kugelkreises zur Hauptgruppe G_7 und damit zur gewöhnlichen Geometrie gelangen.

Zusammenfassend ist unser Resultat: Wollen wir vom Standpunkte der Gruppe aller Berührungstransformationen die elementare Geometrie wiederfinden, so müssen wir diejenigen simultanen Eigenschaften betrachten, welche die gerade vorgelegten geometrischen Gebilde gemein haben einerseits mit der Mannigfaltigkeit aller Punkte, dann mit der Mannigfaltigkeit aller Ebenen, endlich mit dem Kugelkreise.

F. 2 II 93.

Die gestrigen Betrachtungen wollen wir jetzt kurz zu Ende führen, indem wir noch darauf hinweisen, daß wir für die Behandlung einer Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen dieselben Unterschiede wie soeben in R_3 einbreden lassen können. Dabei tritt noch eine principielle Vereinfachung ein.

Für unseren Raum als M_3 ist von vornherein eine Gruppe gegeben, eben die Hauptgruppe G_7. Wir können wohl an ihre Stelle eine wei-

tere Gruppe heben lassen, aber nicht eine engere Gruppe, wenn wir wollen, dass unsere Sätze einen geometrischen Inhalt haben. Wenn wir aber eine beliebig vorgegebene Mannigfaltigkeit der Untersuchung unterwerfen, so haben wir den Vorteil, dass keinerlei Hauptgruppe von Transformationen a priori vorgezeichnet ist, dass wir vielmehr eine ganz beliebige Gruppe adjungieren können und deren Invariantentheorie studieren. Doch wollen wir im Einzelnen hierauf näher nicht mehr eingehen.

Vielmehr wenden wir uns dazu, die Fruchtbarkeit der geometrischen Transformationsgruppen auch für andere Zweige der Mathematik zu zeigen. Dies wird uns natürlich hier nur an Beispielen auszuführen möglich sein.

Fragen wir zunächst nach der Theorie der continuierlichen Transformationsgruppen, so ist in erster Linie die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen zu erwähnen. Nehmen wir zunächst ein Beispiel. Man beschäftigt sich z. B. damit auf einer Fläche Hauptkangentencurven geodätische Linien u. s. w. zu bestimmen. Da ist es bekannt, dass für eine Rotationsfläche sich

die jene Curven definirenden Differentialglei-
chungen durch einfache Quadratur integrie-
ren lassen; das Gleiche ist der Fall wenn die
vorliegende Fläche durch gewöhnliche Schraubung
einer Curve längs einer geradlinigen Axe entstan-
den gedacht werden kann. In den Gebrauch hat
nun Lie bereits 1869 die Aufmerksamkeit auf das
hier eigentlich zu Grunde liegende Princip ge-
lenkt. Ausgehend von dem genannten einfachen
Beispielen hat Lie nämlich bemerkt, dass sich ü-
berhaupt immer Integrationsvereinfachungen
einstellen, wenn man bei irgendeinem System
von Differentialgleichungen eine continuirliche
Gruppe von Transformationen kennt, durch wel-
che das Differentialgleichungssystem in sich über-
geht. Dies ist im Einzelnen natürlich eine sehr
ausgedehnte Theorie, indem die Differentialglei-
chungen wie die Transformationsgruppen sehr
verschieden gewählt werden können. Als Ein-
führung in dieses Gebiet dient am besten das
Buch von Lie - Scheffers (1891), Vorlesungen über
Differentialgleichungen mit bekannten infinite-
simalen Transformationen. Dies Werk gibt aller-
dings nur erst eine Einleitung der Theorie, trotz-

den worden in ihm bereits alle die einzelnen Thatsachen, welche von Euler her in den Lehrbüchern bei den Differentialgleichungen unvermittelt hinter einander aufgeführt worden, (wie die Fälle, in denen die Trennung der Variablen auszuführen ist oder solche bei denen die Integration mittels des Euler'schen Multiplicators gelingt u.s.w.) in eine grosse, geordnete Theorie verbunden. — Soviel über Differentialgleichungen. Allgemein werden wir sagen dürfen: Wenn wir Functionen mehrerer Variablen betrachten, so werden wir überhaupt die continuirlichen Transformationsgruppen gebrauchen können, um dieselben in Klassen einzuteilen. So haben wir dafür continuirlich Transformationsgruppen ein weites Gebiet der Anwendung.

Gehen wir nun zu den discontinuirlichen Transformationsgruppen über, so können wir da gleichfalls ein dreifaches Anwendungsgebiet erwähnen die Algebra, die Zahlentheorie und die Functionentheorie im engeren Sinne.

Was die Algebra betrifft, so darf ich mich hier besonders auf meine Vorlesungen über das Icosaëder beziehen, woselbst die endlichen Grup-

pen linearer Substitution benutzt werden, um für die Theorie der algebraischen Gleichungen Normalformen aufzustellen. Hier haben wir es dann mit endlichen Gruppen linearer Substitutionen im ursprünglichen Sinne zu thun. Weiter ausgebildet sind diese Gedanken in meinen Vorlesungen über Algebra vom W. S. 91/92.

Was nun weiter die Zahlentheorie betrifft, so will ich mich auch hier auf das einfachste Beispiel beschränken, welches ich vor Pfingsten in meinen Vorträgen über Zahlentheorie erwähnt habe. Wir haben damals die Gruppe der Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, wosebbst $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen mit der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ und ω eine complexe Variable sein sollen, benutzt, um die Lehre von der Aequivalenz der linearen quadratischen Formen zu untersuchen.

Ueberhaupt wird man in der Theorie der Formen, soweit es sich um zahlentheoretische Fragen handelt, immer diejenigen Gruppen heranziehen, die von den ganzzahligen linearen Substitionen der Veränderlichkeiten gebildet werden.

Nun kämen wir zur Functionentheorie; bei ihrer Besprechung wollen wir uns auf den Fall einer unabhängigen Variablen beschränken.

Hier kommen gleichfalls Gruppen linearer Substitutionen zur Anwendung, und zwar werden diese sich entweder auf die abhängige oder auf die unabhängige Variable beziehen, wie wir sogleich näher sehen wollen. Was zunächst den ersten Punkt betrifft, so sei als einfachstes Beispiel ein Integral $J = \int R(z)\,dz$, wo R eine rationale Function bezeichnet, vorgelegt. Wenn wir nun das Integral um irgend einen der Unendlichkeitspunkte der Function $R(z)$ in der z-Ebene herumführen, so wächst das Integralum eine Constante; es wird der neue Werth des Integrals $J' = J + C_\nu$, d. h. J eine erleidet lineare Substitution. Indem dieses nur für alle singulären Stellen in der z-Ebene gilt, so gewinnen wir, indem wir die Umläufe um die verschiedenen singulären Punkte beliebig wiederholen und combiniren in den Aenderungen, welche das Integral J bei Umlaufung der singulären Stellen erleidet, ein sehr einfaches Beispiel einer discontinuirlichen Gruppe.

Ein weiteres Beispiel wird uns die Theorie der linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten bieten:

$$\frac{d^n s}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} s}{dz^{n-1}} + \cdots\cdots + p_0 \cdot s = 0$$

Als singuläre Stellen einer solchen Differentialgleichung bezeichnet man ja die Unendlichkeitsstellen der Coefficienten $p_1 p_2 \ldots\ldots p_n$. Zunächst wissen wir, wird unsere Differentialgleichung uns n verschiedene von einander linear unabhängige Particularlösungen $s_1, s_2 \ldots\ldots s_n$ liefern, die in der Nähe des Ausgangspunktes unseres Weges sich in convergirende Potenzreihen entwickeln lassen.

Aus ihnen folgt die allgemeinste Lösung als lineare Verbindung $S = c_1 s_1 + c_2 s_2 \ldots + c_n s_n$, worin die Coefficienten c willkürliche Parameter darstellen. Was geschieht nun mit den Particularlösungen s_i, wenn wir mit Schleifen um die singulären Punkte herumgehen? Wir erhalten offenbar jedesmal ein neues System linear unabhängiger Particularlösungen s'_ν $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ die sich jedoch folgermaßen darstellen lassen müssen

$$\left.\begin{aligned}
s'_1 &= \alpha_{11} s_1 + \ldots + \alpha_{1n} s_n \\
s'_2 &= \alpha_{21} s_1 + \ldots + \alpha_{2n} s_n \\
&\cdots \\
s'_n &= \alpha_{n1} s_1 + \ldots + \alpha_{nn} s_n
\end{aligned}\right\} \text{wo die } \alpha \text{ irgend welche Constante sind.}$$

Dieses Gleichungssystem liefert dann folgenden Fundamentalsatz in der Theorie der linearen Differentialgleichungen: Wenn x um einen singulären Punkt herum einen geschlossenen Weg beschreibt, so erleiden dabei die n Particularlösungen $s_1 \ldots s_n$, die wir herausgegriffen haben, eine lineare Substitution. — Die Substitutionen nun welche solcherweise zu den verschiedenen geschlossenen Wegen gehören, die man unterscheiden muß, ergeugen wiederholt und combinirt wieder eine Gruppe, und diese Gruppe von Transformationen, die man geometrisch im Raume der $s_1, s_2 \ldots s_n$ als eine Gruppe von Collineationen denken kann, ist natürlich für das Studium der J. Function ganz fundamental.

In beiden Beispielen wird die betreffende Gruppe discontinuirliche, da sie ja aus einer endlichen Zahl ergengender Substitutionen sich aufbauen. Doch können sie im einzelnen Falle je nachdem eigentlich oder uneigentlich discontinuirlich sein. Letzteres wird z. B. immer bei einem Integral unseres ersten Beispiels der Fall sein, welches mehr als 2 incommensurable Perioden enthält, einfach nach dem

Satze, dass man aus 3 linear unabhängigen complexen Grössen durch lineare Zusammensetzung mit beliebigen ganzzahligen Coefficienten stets ∞ kleine Grössen erhalten kann.

Nun gibt es zweitens in der Functionentheorie auch Fälle, in denen die unabhängige Variable z eine Gruppe von Substitutionen erleidet. Beschränken wir uns auf eindeutige Functionen $s = f(z)$, so kommen wir auf sehr bekannte Functionsklassen. Das einfachste Beispiel liefern uns die einfach und doppelt periodischen Functionen, sodann die Modulfunctionen, bei denen die Variable z die ganzzahligen Substitutionen $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ erleidet. Endlich aber überhaupt die automorphen Functionen. Nun ist sofort klar, dass hier bei den eindeutigen Functionen mit linearen Substitutionen von z selbstverständlich nur solche Substitutionsgruppen in Betracht kommen können, welche eigentlich discontinuirlich sind. Denn andernfalls würden in der Nähe eines jeden Punktes in der z-Ebene ∞ viele aequivalente Punkte liegen, was nicht möglich ist.

Ich habe im Vorstehenden diese kleine Aufzählung derjenigen Gebiete, in denen geometrische Transformationsgruppen zur Anwendung kommen, gegeben, um es von vornherein über jeden Zweifel erhaben sein zu lassen, dass geometrische Gruppen ein wichtiger Gegenstand der Mathematik sind. In Anbetracht dessen verlangen wir hier und verlangten Lie und ich im Jahre 1872 in den Schlussbemerkungen meines Erlanger Programms ausdrücklich eine Gruppentheorie, d.h. eine rationelle Aufzählung und Classification aller geometrischen Gruppen, die es überhaupt gibt.

Jene Forderung hat sich nun seitdem in der Weise entwickelt, dass Lie die continuirlichen Gruppen behandelt hat, während ich mich selbst den discontinuirlichen Gruppen zugewandt habe. Lie hat demgemäss von 1874 beginnend in der That für die continuirlichen Gruppen eine zusammenhängende Theorie geschaffen, die ja zum Teil bereits in den beiden vorliegenden Bänden des Buches von Lie-Engel systematisch bearbeitet ist: Die Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen oder die

Lie'sche Gruppentheorie.

Was ferner meine eigenen Arbeiten über die diskontinuierlichen Gruppen angeht, so wissen Sie, daß diese durch Poincaré seit 1881 einen wesentlichen Aufschwung genommen haben. Die drei Werke, die Vorlesungen über das Ikosaëder, die Vorlesungen über Modulfunktionen u. die Vorlesungen über automorphe Funktionen, welch letztere Herr Dr Fricke jetzt gerade bearbeitet, sollen den Inbegriff dessen bringen, was wir zur Zeit von diskontinuierlichen geometrischen Gruppen wissen. Dabei tritt freilich deren Bedeutung für andere Gebiete der Mathematik sehr in den Vordergrund.

An der genannten Zweiteilung wollen wir auch in gegenwärtiger Vorlesung festhalten. Daher werden wir zuerst eine Theorie der Lie'schen continuierlichen Gruppen geben u. dann die Theorie der diskontinuierlichen Gruppen entwickeln, wobei wir hier ausdrücklich den geometrischen Inhalt als solchen zur Geltung zu bringen suchen. Alle die schönen Anwendungen also, über die ich mich andeutungsweise schon äußerte, treten in dieser Vorlesung dann natürlich zurück. – Doch ist diese Zweiteilung nur eine Vorstufe, wir werden zusam

menfassend schliesslich eine Theorie der gemischten Gruppen gebrauchen. Es wird überhaupt weiterhin darauf ankommen die beiden Entwickelungsreihen miteinander zu verschmelzen und beispielsweise in der Theorie der Differentialgleichungen eine Auffassung zur Geltung zu bringen, welche gleichzeitig über die Theorie der continuirlichen und discontinuirlichen Gruppen verfügt.

Mo. 5 II 93.

Wir beginnen heute mit der

Theorie der continuirlichen Gruppen und schicken ihr zunächst einen Excurs über lineare partielle Differentialgleichungen I. Ordnung voraus. Wir werden in ihr insbesondere zu erläutern haben, was man unter einem vollständigen System solcher Differentialgleichungen versteht. Dabei werden wir uns durchaus der geometrischen Darstellung bedienen, indem wir uns an die Ideen von Lie anschliessen, wie sie sich in dem ersten Bande des genannten Buches von Lie - Engel pag. 88 ff. entwickelt finden. Betrachten wir zunächst den Fall dreier Variablen x_1, x_2, x_3, die

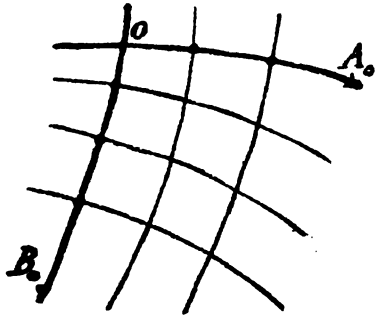
wir als rechtwinkliche Coordinaten des gewöhnlichen Raumes deuten wollen. Es sei nun die partielle Differentialgleichung $A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ vorgegeben, die wir abkürzend mit $A(f) = 0$ bezeichnen wollen. Was diese Gleichung bedeutet und was es für Functionen $f = \text{Const.}$ sind, welche ihr genügen, haben wir bereits im vorigen Semester kennen gelernt. Dem einzelnen Raumpunkt $x_1 x_2 x_3$ wird durch die genannte Gleichung eine Fortschreitungsrichtung $dx_1 : dx_2 : dx_3$ zugeordnet, welch' letztere durch die Proportion $dx_1 : dx_2 : dx_3 = A_1 : A_2 : A_3$ gegeben wird. Und die Differentialgleichung selbst besagt dann dass die Tangentialebene der Fläche $f = C$ eben diese Fortschreitungsrichtung enthalten soll. Man erhält demnach folgendermaßen die Integration der Differentialgleichung. Man integrire generell das System gewöhnlicher Differentialgleichungen $dx_1 : dx_2 : dx_3 = A_1 : A_2 : A_3$, d.h. man suche die Curven auf, welche durch Aneinanderreihung dieser Fortschreitungsrichtungen entstehen. Diese Curven nennt man nach Monge die Charakteristiken unserer partiellen Differentialgleichung. Nun ist klar, dass jede Integralfläche

che der letzteren Gleichung von ∞ vielen Charakteristiken überspannen ist. dies besagt umgekehrt, dass man die allgemeinste Integralfläche erhält, wenn man irgend wie einfach ∞ viele Charakteristiken zusammenfasst. Analytisch stellt sich dieses Ergebniss so dar dass man ausgeht von irgend 2 unabhängigen Lösungen $f_1 = c_1$ und $f_2 = c_2$ der partiellen Differentialgleichung. Jede derselben stellt eine Schaar von Integralflächen dar und je zwei Flächen aus beiden Schaaren combinirt liefern als Schnittcurve eine Charakteristik, so dass die Gleichung $f_1 = c_1$ und $f_2 = c_2$ zusammengenommen uns die Gesammtheit der 2fach ∞ vielen Charakteristiken ergiebt. Andererseits ist dann die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung eine beliebige Function $F(f_1, f_2)$ dieser Particularlösungen $f_1 = c_1$ u. $f_2 = c_2$, d.h. $F(f_1 f_2) = \text{Const.}$ ist die allgemeinste Integralfläche. In der That wird dieselbe ja von einfach ∞ vielen Charakteristiken gebildet.

Dies ist ja sehr einfach, wir gehen nun weiter, indem wir zwei Gleichungen $A(f) = 0$ u. $B(f) = 0$ neben einander betrachten, die sichen

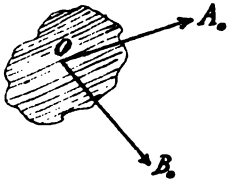
ebenso schreiben: $A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$
und $B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ und die Frage untersuchen, wann diese Ueben eine gemeinsame Lösung $f = Const$ besitzen werden. Wir werden sogleich geometrisch so schließen können: Soll $f = Const$ eine Integralfläche von $A(f) = 0$ wie von $B(f) = 0$ sein so muß dieselbe von Charakteristiken sowohl der ersten wie der zweiten Gleichung überspannen sein. Und diese Charakteristiken müssen also im Raume in einer besonderen Weise gruppirt sein. Von einem einzelnen Punkte O des Raumes mögen die beiden Charakteristiken A_0 und B_0 auslaufen, welche entsprechend der Gleichung $A = 0$ oder $B = 0$ angehören. Wir werden dann die durch O laufende Integralfläche auf 2 Weisen erzeugt denken können.

Entweder wir lassen von den einzelnen Punkten der Charakteristik A_0 die zugehörigen Charakteristiken B auslaufen oder aber von den einzelnen Punkten der Charakteristik B die zugehörigen Charakteristiken A. Im allgemeinen werden für 2 vorgegebene partielle



Differentialgleichungen die so von der einen oder der anderen Schaar Characteristiken gebildeten Flächen sich keineswegs decken. Dass beide Flächen sich identisch erweisen, ist eben das Characteristische für das Vorhandensein einer gemeinsamen Lösung der beiden Gleichungen $A = 0$ u. $B = 0$.

Dies Resultat wollen wir nun sogleich analytisch formulieren. Durch den Raumpunkt O und die Fortschreitungsrichtungen der von ihm auslaufenden Characteristiken A_0 u. B_0 ist allemal ein Flächenelement bestimmt. Eine gemeinsame Lösung der beiden vorliegenden Differentialgleichungen erfordert, dass diese Flächenelemente sich zu einer Fläche zusammenfügen lassen; dies besagt nur mit anderen Worten, dasselbe wie der obige Satz. Die allgemeinste Fortschreitungsrichtung des Büschels in O wird nun durch die folgenden Gleichungen gegeben:



$$\rho\, dx_1 = \lambda A_1 + \mu B_1$$
$$\rho\, dx_2 = \lambda A_2 + \mu B_2$$
$$\rho\, dx_3 = \lambda A_3 + \mu B_3,$$

woselbst ρ ein Proportionalitätsfactor und das Verhältniss $\lambda : \mu$ einen Parameter bezeichnet. Aus ihnen erhal-

den wir durch Nullsetzen ihrer Determinante

$$\begin{vmatrix} dx_1 & A_1 & B_1 \\ dx_2 & A_2 & B_2 \\ dx_3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung, welche jedem Raumpunkt sein Flächenelement zuordnet.

Nun muss man verlangen, dass es eine Flächenschaar $f = \text{const}$ giebt, an deren einzelnen Flächen sich die Flächenelemente anschliessen. Die letzte Gleichung ist aber nichts anderes als eine Pfaff'sche Gleichung. Wir werden daher die gewünschte Anordnung der Flächenelemente haben, wenn wir verlangen, dass unsere Pfaffsche Gleichung unbeschränkt integrabel ist, d. h. dass ihre linke Seite bis auf einen unbekannten Multiplicator M ein exactes Differential df darstellt. Wir können demgemäss die Entscheidung, ob $A = 0$ und $B = 0$ eine gemeinsame Lösung besitzen oder nicht, aus der Theorie des Pfaff'schen Problems entnehmen. Doch wollen wir einen anderen Weg einschlagen, der ohne weiteres verallgemeinerungsfähig ist, und den wir späterhin doch benutzen müssen.

Es handelt sich um einen Ansatz von Jacobi und Clebsch. Die bezügliche Arbeit Jacobis

ist aus seinem Nachlass in Crelle Bd. 60 veröffentlicht, die dort gegebene Theorie ist dann von Clebsch 1865 in Crelle Bd. 65 erweitert worden. In der letzt genannten Abhandlung ist auch der Ausdruck „vollständiges System von Differentialgleichungen" eingeführt, den wir bald noch sehr oft gebrauchen werden. Betreffs unserer speciellen Aufgabe sagt man nun folgendermassen: Sind $A=0$ und $B=0$ zwei lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, dann kann man eine neue lineare partielle Differentialgleichung aufstellen, die eine Folge der gegebenen ist, und der also die gemeinsame Lösung gleichfalls genügen muss.

Diese neue Gleichung erhält man, indem man den Ausdruck $A(B(f)) - B(A(f))$, den wir abkürzend mit $(A,B)(f)$ bezeichnen wollen, bildet und ihn gleich o setzt, also $(A,B)=0$.

Wir wollen jenen Ausdruck in extenso ausführen, da er für uns noch sehr oft in Anwendung kommen wird.

Derselbe ist gleich:

$$\left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial B_1}{\partial x_2} + A_3\frac{\partial B_1}{\partial x_3}\right) - \left(B_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + B_2\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + B_3\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right)$$

oder indem man für A und B ihre Werte einsetzt und

bemerkt, daß die 18 zweiten Differentialquotienten, die sich bei Ausführung der angegebenen partiellen Differentiationen ergeben, sich glücklicherweise gerade wegheben, so bleibt zweckmäßig geordnet:

$$(AB) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left[\left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial x_1} - B_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\right) + \left(A_2\frac{\partial B_1}{\partial x_2} - B_2\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\right.$$
$$\left. + \left(A_3\frac{\partial B_1}{\partial x_3} - B_3\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right)\right]$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_2}\left[\left(A_1\frac{\partial B_2}{\partial x_1} - B_1\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right) + \left(A_2\frac{\partial B_2}{\partial x_2} - B_2\frac{\partial A_2}{\partial x_2}\right)\right.$$
$$\left. + \left(A_3\frac{\partial B_2}{\partial x_3} - B_3\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\right].$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_3}\left[\left(A_1\frac{\partial B_3}{\partial x_1} - B_1\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) + \left(A_2\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - B_2\frac{\partial A_3}{\partial x_2}\right)\right.$$
$$\left. + \left(A_3\frac{\partial B_3}{\partial x_3} - B_3\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)\right].$$

Wenn nun unsere beiden Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ gemeinsame Lösungen haben sollen, so ergibt sich unmittelbar als notwendige Bedingung hierfür, daß der Klammerausdruck (A, B) sich linear aus A und B zusammensetzt, d.h. daß $(A, B) = \lambda_0 A + \mu_0 B$ ist unter λ_0 und μ_0

vigend welche Funktionen von x, x_2 x_3 verstanden. Die Richtigkeit dieses Satzes ist sofort aus der geometrischen Betrachtung, die wir angestellt haben, zu erkennen. Denn von dem beliebigen Raumpunkte O gehen ja die Fortschreitungsrichtungen A_0 und B_0 aus, und beide zusammen bestimmen das lineare Büschel aller Fortschreitungsrichtungen auf der gemeinsamen Integralfläche von $A = 0$ und $B = 0$, und da diese Integralfläche auch der Gleichung $(A, B) = 0$ zu genügen hat, so muss die durch letztere für den gewählten Raumpunkt gegebene Fortschreitungsrichtung gleichfalls dem linearen Büschel angehören. Dies aber besagt gerade der obige Satz.

Nun wollen wir jedoch andererseits zeigen, <u>dass die genannte Bedingung zugleich eine hinreichende ist, um umgekehrt auf das Vorhandensein einer gemeinsamen Lösung der Gleichungen schliessen zu können</u>. Um dies zu zeigen, leiten wir zunächst eine wichtige Eigenschaft des Klammerausdrucks (A, B) selbst ab. Anstatt von den Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ auszugehen, hätten wir doch auch

die linearen Verbindungen beider $A = \alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B} = 0$ und $B = \gamma\mathfrak{A} + \delta\mathfrak{B} = 0$ zu Grunde legen und deren Klammerausdruck (A, B) bilden können.

Wie verhalten sich dann die Klammerausdrücke $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und (A, B) zueinander? Um dies zu erkennen, werden, werden wir auch den zweiten Ausdruck (A, B) berechnen müssen. Es ergibt sich in symbolischer Schreibweise:

$$(A, B) = (\alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B}, \gamma\mathfrak{A} + \delta\mathfrak{B}) = (\alpha\mathfrak{A}, \gamma\mathfrak{A}) + (\alpha\mathfrak{A}, \delta\mathfrak{B}) + (\beta\mathfrak{B}, \gamma\mathfrak{A}) + (\beta\mathfrak{B}, \delta\mathfrak{B}).$$

Nun ist ferner:

$$(\alpha\mathfrak{A}, \gamma\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\left\{\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\right)\mathfrak{A}_1 + \left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x_2} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}\right)\mathfrak{A}_2 + \left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x_3} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x_3}\right)\mathfrak{A}_3\right\}$$ d.h. ein Nullplum von $\mathfrak{A}$. und

$$(\alpha\mathfrak{A}, \delta\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\alpha\delta - \mathfrak{A}\delta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\mathfrak{B}_1 + \frac{\partial\alpha}{\partial x_2}\mathfrak{B}_2 + \frac{\partial\alpha}{\partial x_3}\mathfrak{B}_3\right) + \mathfrak{B}\alpha\left(\frac{\partial\delta}{\partial x_1}\mathfrak{A}_1 + \frac{\partial\delta}{\partial x_2}\mathfrak{A}_2 + \frac{\partial\delta}{\partial x_3}\mathfrak{A}_3\right);$$ analog berechnen sich Klammerausdrücke $(\beta\mathfrak{B}, \gamma\mathfrak{A})$ und $(\beta\mathfrak{B}, \delta\mathfrak{B})$. Wir entnehmen diesen Formeln sogleich den Satz: <u>Wenn der Klammerausdruck $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ eine lineare Verbindung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist, und es bezeichnen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ irgend 2 lineare Verbin-</u>

dungen von A und B, so ist auch der Klammerausdruck $(A\,B)$ eine lineare Verbindung von A und B und darum von A und B selbst.

Von dieser Eigenschaft des Klammerausdrucks wollen wir nun Gebrauch machen, um unseren in Aussicht gestellten Beweis zu erbringen.

Wir wollen zunächst die beiden gegebenen Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ „auflösen", d. h. durch diejenigen ihrer linearen Kombinationen ersetzen, welche nur je 2 partielle Differentialquotienten enthalten.

$$A = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1} - P\,\frac{\partial f}{\partial x_3} \quad \text{und}$$

$$B = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_2} - Q\,\frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Für diese beiden Gleichungen wollen wir dann den Klammerausdruck (A, B) bilden.

Fr. 6 VI 93.

Derselbe wird, wie die einfache Berechnung zeigt, gegeben durch: $\frac{\partial f}{\partial x_3}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2} + P\,\frac{\partial Q}{\partial x_3} - Q\,\frac{\partial P}{\partial x_3}\right)$. Soll dieses (A, B) eine lineare Verbindung von A und B selbst darstellen, so muß notwendig, da (A, B) nur ein Glied mit $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ enthält,

r Factor desselben:

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2} + P\frac{\partial Q}{\partial x_3} - Q\frac{\partial P}{\partial x_3} \equiv 0 \text{ sein, d.h.}$$

$$\frac{\partial P}{x_2} - Q\frac{\partial P}{\partial x_3} = \frac{\partial R}{\partial x_1} - P\frac{\partial Q}{\partial x_3}.$$

n behaupte ich, diese Gleichung stellt in der
l die hinreichende Bedingung dafür dar,
s unsere partiellen Differentialgleichungen
e gemeinsame Lösung f = Const haben. Wir
gen dies wohl am einfachsten, wenn wir wie
: die zugehörige Pfaffsche Differentialgleichung
rachten, die jetzt wie folgt lautet:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & 1 & 0 \\ dx_2 & 0 & 1 \\ dx_3 & -P & -Q \end{vmatrix} = \text{oder } dx_3 + P\,dx_1 + Q\,dx_2 = 0.$$

Für ihre unbeschränkte Integrabilität kann
doch die hinreichende Bedingung: dass
$= \frac{dQ}{dx_1}$ sein muss. Setzen wir aber für die
llen Differentialquotienten $\frac{dP}{dx_2} = \frac{\partial P}{\partial x_2} +$

$\frac{\partial P}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dx_2}$ und $\frac{dQ}{dx_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dx_1}$ ein
d beachten das gemäss der Gleichung dx_3
$dx_1 + Q\,dx_2 = 0$ gerade $\frac{dx_2}{dx_2} = -Q$ und $\frac{dx_3}{dx_1} = -P$ zu

gelegen ist, so geht die Gleichung $\frac{dP}{dx_2} = \frac{dQ}{dx_1}$ in die obige Gleichung $\frac{\partial P}{\partial x_2} - Q\frac{\partial P}{\partial x_3}\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_1} - P\frac{\partial Q}{\partial x_3}$ über.

Wir haben daher als Resultat unserer Betrachtung: Indem wir gerade auf das Verschwinden des Klammerausdrucks kommen, wenn wir verlangen, dass das zugehörige Pfaff'sche Problem unbeschränkt integrabel sei, bedeutet das Verschwinden unseres Klammerausdrucks umgekehrt in der That das Vorhandensein einer gemeinsamen Lösung unserer beiden partiellen Differentialgleichungen.

Haben wir nun bisher den Fall zweier partiellen Differentialgleichungen mit 3 Variablen behandelt und die einzelnen Zwischenrechnungen, soweit es nötig war, wirklich ausgeführt, so wollen wir jetzt dazu übergehen, die analogen Betrachtungen allgemein für n Variable anzustellen. Doch wollen wir die Ausrechnung, die übrigens im Princip sich um nichts schwieriger gestaltet als soeben, jetzt nicht mehr im Einzelnen angeben, vielmehr betreffs derselben auf die Darstellung bei Lie-Engel I pag. 99 ff. verweisen. Man findet

dieselben ja auch in den neueren Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, jedoch wird sie hier in weniger geometrischer Weise gegeben.

Es mögen die linear unabhängigen Differentialgleichungen vorliegen $A(f) = 0$

$B(f) = 0$

$C(f) = 0$ u. so fort,

woselbst $A(f)$, $B(f)$ u. s. w. nur die Abkürzung für $A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots A_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$, ... bezeichnen.

Wir stellen uns wieder die Aufgabe zu untersuchen, wann die gegebenen Gleichungen gemeinsame Lösungen f besitzen werden. Da werden wir uns wieder neue Gleichungen ableiten, indem wir die Klammerausdrücke für je 2 der gegebenen Gleichungen bilden: $(A, B)(f) = 0$, $(A, C)(f) = 0$ u. so fort. Eine Function f, welche die ursprünglichen Gleichungen befriedigt, genügt dann auch diesen sämmtlichen abgeleiteten Gleichungen.

Nun sind 2 Fälle möglich, je nachdem die abgeleiteten Gleichungen einfach lineare Combinationen der gegebenen sind oder nicht. d. h. je nachdem ein Gleichungssystem:

$$(A, B) = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C + \ldots$$
$$(A, C) = \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

besteht oder nicht. Wenn dieses Gleichungssystem gilt, dann sagt man, es sei ein vollständiges System partieller Differentialgleichungen vorgegeben. Diese Bezeichnung ist insofern ohne weiteres verständlich, als letzteres System durch die Bildung der Klammerausdrücke sich nicht mehr erweitern läßt. Wenn aber andererseits mehrere der abgeleiteten Gleichungen sich nicht als lineare Combinationen der gegebenen ergeben, so wird man dieselben zu den letzteren einfach hinzunehmen können, da sie ja gleichfalls durch jede gemeinsame Lösung der gegebenen Gleichungen befriedigt werden müssen.

Auf das so erweiterte System partieller Differentialgleichungen wende man dasselbe Verfahren nochmals an, indem man wieder die Klammerausdrücke von je zweien bildet und gleich Null setzt und so fort, bis man schließlich ein vollständiges System partieller Differentialgleichungen erhält. In Anbetracht dessen dass u

Gleichungen, die linear unabhängig sind,

$$A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots\dots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$M_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots\dots + M_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

an und für sich ein vollständiges System bilden, weil doch jede $(n+1)^{te}$ Gleichung aus ihren beiden Seiten linear zusammengesetzt werden kann, wird die Erweiterung eines vorgelegten Systems von Differentialgleichungen durch Hinzunahme der abgeleiteten Gleichungen, die nicht linear abhängig sind, nach einer endlichen Anzahl von Schritten immer zu einem vollständigen System führen müssen.

Wir werden auf Grund dieses Satzes nun annehmen, dass von vornherein ein vollständiges System gegeben sei, das aus den folgenden g Gleichungen bestehen möge:

$$A'(f) = 0, \; A''(f) = 0 \dots\dots \; A^{g}(f) = 0.$$

Einer jeden unserer Gleichungen ordnet jetzt einem beliebigen Raumpunkte x_i unseres R_n eine bestimmte Fortschreitungsrichtung zu. Die g

Fortschreitungsrichtungen $A_1' A_1'' \ldots A_1^q$ zusammen liegen dann natürlich in einem Bündel, welches eine lineare Mannigfaltigkeit von $q-1$ Dimensionen darstellt und durch folgendes Gleichungssystem gegeben wird:

$$\varrho \cdot dx_1 = \lambda' A_1' + \lambda'' A_1'' + \ldots\ldots + \lambda^q A_1^q$$
$$\varrho \cdot dx_2 = \lambda' A_2' + \lambda'' A_2'' + \ldots\ldots + \lambda^q A_2^q$$
$$\vdots$$
$$\varrho \cdot dx_n = \lambda' A_n' + \lambda'' A_n'' + \ldots\ldots + \lambda^q A_n^q.$$

Hierbei bezeichnen $\lambda_1' \lambda_1'' \ldots \lambda^q$ beliebige Parameter u. ϱ den Proportionalitätsfactor. Dieses Gleichungssystem können wir ersetzen durch Nullsetzen des rechteckigen Determinantenschemas:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & A_1' & \ldots\ldots & A_1^q \\ dx_2 & A_2' & \ldots\ldots & A_2^q \\ \vdots & & & \\ dx_n & A_n' & \ldots\ldots & A_n^q \end{vmatrix} = 0$$

Diese Matrix stellt uns eben das System der $n-q$ totalen Differentialgleichungen 1. Ordnung vor, welches aequivalent ist mit den durch Elimination der Parameter λ aus dem angeführten

den System sich ergebenden Gleichungen. Nun ist der Hauptsatz, dass dieses System von $n-q$ totalen Differentialgleichungen, welches dem gegebenen vollständigen Systeme partieller Differentialgleichungen zugeordnet ist, dann u. nur dann unbeschränkt integrirbar ist, wenn die letzteren ein vollständiges System bilden.

Diesen Satz könnten wir gerade so beweisen wie soeben im Falle dreier Variablen, doch wollen wir darauf nicht weiter eingehen. Wir wollen ihn dafür desto genauer erläutern. Was meinen wir mit der Bezeichnung unbeschränkt integrirbar geometrisch? Durch unsere totalen Differentialgleichungen wird jedem Raumpunkte des R_n ein solches Bündel von Fortschreitungsrichtungen zugeordnet, welches $q-1$ Dimensionen besitzt. Unter unbeschränkter Integrirbarkeit eines Systems von $n-q$ totalen Differentialgleichungen haben wir nun zu verstehen, dass der Raum R_n sich in ∞^{n-q} Mannigfaltigkeiten q^{ter} Dimension gelegen lässt, derart, dass die Fortschreitungsrichtungen welche von einem Punkte zu den Nachbarpunkten der diesen und enthaltenden Mannigfaltigkeit führen, gerade jenes Bündel bilden

u. demgemäss die Integralen unserer totalen Differentialgleichungen durch Angabe der Mannigfaltigkeiten q^{ter} Dimension erschöpft ist.

Wir wollen diesen vielleicht in der Allgemeinheit etwas schwer verständlichen Satz sogleich an dem Beispiel des R_3 uns völlig nahe führen.

1, Es sei in R_3 zunächst eine partielle Differentialgleichung ($q = 1$) gegeben. Dann bekommen wir $n - q - 2$ totale Differentialgleichungen und diese sind von selbst unbeschränkt integrirbar, indem sich doch der R_3 in ∞^2 Curven (M_1) der Art zerlegen läßt, daß die Tangenten der einzelnen Curven immer gerade die totalen Differentialgleichungen befriedigen.

2) Ferner seien im R_3 2 partielle Differentialgleichungen ($q = 2$) gegeben, dann haben wir $n - q = 1$ totale Differentialgleichung. Diese ordnet jedem Raumpunkt ein eindimensionales Büschel von Fortschreitungsrichtungen, ein Flächenelement zu, und die Bedingung der unbeschränkten Integrabilität drückt sich dann aus, daß der R_3 sich zerlegt in $\infty^1 M_2$, d.h. in ∞ viele Flächen, der Art, daß diese von

den Flächenelementen völlig überdeckt werden, d.h. dass die Flächentangenten und keine anderen Fortschreitungsrichtungen der totalen Differentialgleichung genügen.

Der allgemeine Satz ist um nichts komplicirter, es kommt nur darauf an, dass man sich an geometrisches Denken im Raum von n Dimensionen gewöhnt. Dies ist auch soweit unerlässlich, wenn man die Lie'schen Entwickelungen nach ihrer inneren Bedeutung verstehen will.

Im allgemeinen Falle wird also der ganze R_n in ∞^{n-q} M_q zerlegt; diese M_q wollen wir als die charakteristischen Mannigfaltigkeiten des vorgelegten vollständigen Systems von q partiellen Differentialgleichungen bezeichnen.

Wir wollen nun von der geometrischen Eigenart dieser charakteristischen M_q sprechen. Man kann die einzelnen Fortschreitungsrichtungen A', A'', A''' u.s.f. von dem gewählten Raumpunkt aus beliebig weit auswachsen lassen; die entstehenden Curven des R_2 nennen wir entsprechend die Charakteristiken der Differentialgleichung A' resp. A'' u.s.w. Offenbar ergibt sich das wirkliche

Resultat, dass eine jede charakteristische Mannigfaltigkeit M_q überspannen ist einerseits von lauter Charakteristiken der Differentialgleichung A', anderseits von lauter Charakteristiken der Differentialgleichung A'' u. so fort, endlich von lauter Charakteristiken der Differentialgleichung A^q.

Wir können sagen, dass man überhaupt gerade darin die Eigenart eines vollständigen Systems erkennen muss, dass es solche Mannigfaltigkeiten M_q gibt, wie sie hier geschildert sind.

Nun suchen wir aber doch für unsere partielle Differentialgleichungen nicht Mannigfaltigkeiten M_q, sondern Gleichungen f. Const, die erstere befriedigen. Für jeden Werth der Constante stellt die Gleichung f. Const eine Mannigfaltigkeit von n-1 Dimensionen dar. Wie werden wir dann eine solche M_{n-1} herstellen, wenn wir über die charakteristischen Mannigfaltigkeiten verfügen? Die letzteren mögen durch die Gleichungen:

$f_1 = c_1$, $f_2 = c_2$, ... $f_{n-q} = c_{n-q}$ gegeben sein, wo, selbst c_1 beliebige Constante bezeichnen. Die allgemeinste M_{n-1}, die unsere partiellen Differentialgleichungen befriedigt, wird dann gegeben

sein, indem wir eine willkürliche Funktion $F(f_1 f_2 f_3 \dots f_{n-q})$ = 0 setzen. Denn diese stellt doch geometrisch betrachtet eine M_{n-1} dar, welche aus lauter charakteristischen Mannigfaltigkeiten M_q zusammengesetzt ist. Analytisch aber bezeichnet man den hiermit erkannten Sachverhalt dadurch, daß man sagt, unsere partiellen Differentialgleichungen haben $n-q$ unabhängige Lösungen $f_1 f_2 \dots f_{n-q}$, und aus ihnen setzt sich die allgemeine Lösung in der Gestalt $F(f_1 \dots f_q)$ zusammen.

[8 II 93] Diese im Vorstehenden gegebenen Erläuterungen über vollständige Systeme linearer Differentialgleichungen wollen wir nun in Beziehung setzen mit der Lie'schen Gruppentheorie. Zu dem Zweck führen wir, um uns der Lie'schen Berechnungsweise zu bedienen, eine Buchstabenvertauschung ein, indem wir fernerhin statt $X(f)$ setzen: $X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Dieser Ausdruck $X(f)$ gleich 0 gesetzt liefert uns aber eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Doch Lie betrachtet den Ausdruck $X(f)$ selbst

und sieht in ihm <u>das Symbol einer infinitesimalen Transformation</u>, nämlich derjenigen Transformation, deren Anwendung die Coordinaten $x_1, x_2 \dots x_n$ um die folgenden Incremente vermehrt.

$$\delta x_1 = \xi_1 \delta t$$
$$\delta x_2 = \xi_2 \delta t$$
$$\delta x_3 = \xi_3 \delta t$$
$$\vdots$$
$$\delta x_n = \xi_n \delta t.$$

Wie leicht zu übersehen, wächst eine beliebige Function $f(x_1 \dots x_n)$ vermöge dieser infinitesimalen Transformation gerade um $Xf \delta t$ und hierin liegt eben die Berechtigung ausgesprochen $X(f)$ als das Symbol einer ∞ kleinen Transformation zu betrachten.

Doch was hat die partielle Differentialgleichung $X(f) = 0$ mit dieser unendlich kleinen Transformation zu thun? Der Zusammenhang beider spricht sich zunächst dann aus, dass <u>die Lösungen der Differentialgleichungen diejenigen Funktionen darstellen, welche bei der infinitesimalen Transformation invariant sind</u>. Man kann jedoch noch mehr sagen. Denken wir uns auf einen beliebigen Raumpunkt x_n die infinite

simple Transformation $X(f)$ angewandt, so geht derselbe in einen neuen Punkt über. Auf diesen wenden wir wiederum dieselbe Transformation an u. so fort; der ausgezählte Raumpunkt wird solcherweise eine bestimmte Bahncurve in Rn beschreiben. Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf die Gesammtheit aller Raumpunkte, so erkennen wir, dass der ganze Raum sich demnach in lauter neben einander herlaufende Bahncurven der infinitesimalen Transformation anordnen lässt. Und diese Bahncurven sind mit den Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen $X(f) = 0$ identisch, wie sofort zu sehen.

Die nächste Frage wird nun sein, wie die endlichen Transformationen lauten, die durch ∞ malige Wiederholung der ∞ kleinen Transformation zu Stande kommen. Wir behaupten, dass dieselben durch die folgende Formel gegeben werden:

$$f_1 = f + \frac{t}{1} Xf + \frac{t^2}{1.2} X.Xf + \frac{t^3}{1.2.3} XXXf + \dots$$

in der t einen Parameter bezeichnet.

Aus ihr gewinnt man die Transformationsformeln der Coordinaten $x_1 \dots x_n$ selbst, indem man

letztere der Reihe nach statt f in diese Gleichung einsetzt und auf der linken Seite entsprechend $x_1' \ldots x_n'$ für f, schreibt. Bevor wir die Richtigkeit unserer Formel nachweisen, wollen wir die folgende Bemerkung hinzufügen. Wie in der Functionentheorie die Potenzreihenentwicklung einer analytischen Function nur innerhalb eines bestimmten Gebiets um einen ausgewählten Punkt herumconvergirt, so gilt natürlich auch die vorstehende Formel nur insofern, als wir den Parameter t klein genug wählen, damit die Convergenz der Reihe gesichert ist, d.h. wir beschränken uns auf Transformationen, die in der Nähe der Identität liegen, jedenfalls nicht soweit ausgedehnt gedacht sind, dass die Potenzreihe zu convergiren aufhört. (Kann es doch z.B. sehr wohl sein, dass bei hinreichender Wiederholung der Transformation ein Raumpunkt eine geschlossene Jahncurve beschreibt und daher an seine Ausgangslage zurückgelangt etc. etc.)

Die andere Auffassung, dass wir es mit einer Function von t zu thun haben, die wir über den Convergenzbereich der anfänglichen Potenzreihe analytisch fortsetzen können, die

schieben wir zurück und halten uns vor später darauf zurückzukommen, wo wir dann vielleicht nur algebraische Transformationen oder lineare Transformationen betrachten.

Unter dieser Voraussetzung wollen wir uns nun übergengen, daß in der That unsere Formel die aus der unendlich kleinen Transformation durch ∞ Wiederholung entstandenen endlichen Transformationen darstellt. Wir haben offenbar eine einfach ∞ Schaar von Transformationen vor uns, indem unsere Formel den Parameter t enthält. Diese Schaar enthält nun gewiß auch die ∞ kleine Transformation, die wir erhalten, wenn wir für t einsetzen δt, wobei wir uns dann auf die beiden ersten Glieder der rechten Seite beschränken können. Es kommt nun darauf an zu zeigen, daß diese Schaar von Transformationen zugleich eine Gruppe darstellt. Zu dem Zweck gehen wir von den beiden Transformationen aus:

$$X^{(t)}: \quad f_1 = f + \frac{t}{1} \cdot Xf + \frac{t^2}{1.2} \cdot XXf + \dots$$

und $X^{(t')}: \quad f_2 = f_1 + \frac{t'}{1} \cdot Xf_1 + \frac{t'^2}{1.2} \cdot XXf_1 + \dots$

Diese beiden Transformationen wollen wir nun

zusammensetzen; wir erhalten:

$$f_2 = f + \frac{t}{1} \cdot X^c(f) + \frac{t^2}{1.2.} \cdot X^c X^c(f) + \dots$$

$$+ \frac{t'}{1} \cdot X^c(f) + \frac{tt'}{1} \cdot X^c X^c(f) + \dots$$

$$+ \qquad\qquad + \frac{t'^2}{2} \cdot X^c X^c(f) + \dots$$

$$+ \dots$$

oder

$$f_2 = f + \frac{t+t'}{1} \cdot X^c(f) + \frac{(t+t')^2}{1.2.} X^c X^c(f) + \dots.$$

Hieraus folgt dann sofort, <u>dass unsere Schaar von Transformationen</u> eine Gruppe bildet (denn die Operation t ergibt mit der Operation t' zusammengesetzt eine Operation $t+t'$, die gleichfalls der Schaar angehört.) Hieraus ist dann zugleich ersichtlich, dass alle endlichen Transformationen sich aus der ∞ kleinen durch unendliche Wiederholung zusammensetzen lassen; wir haben daher eine <u>cyclische</u> Gruppe, deren ergengende Operation eben jene ∞ kleine Transformation ist.

Zugleich folgt die <u>Vertauschbarkeit je zweier Operationen</u>, in der wir eine Bestätigung zu

erblicken haben, daß wir es mit einer cyclischen Gruppe zu thun haben.

Man wird den Sachverhalt noch besser verstehen, wenn man sich überlegt, daß jede infinitesimale Transformation sich auf eine bestimmte einfache Normalform bringen läßt. Wir beschränken uns auf 3 Variable x, x_1, x_2. Wir wollen nun annehmen, wir haben unsere Charakteristiken durch die Integrale $f_1 = C_1$ und $f_2 = C_2$ der partiellen Differentialgleichung vollständig bestimmt. Dann wollen wir die folgende Punkttransformation machen:

$f_1 = x$, $f_2 = y$, $f_3(x, x_1, x_2) = z$, woselbst f_3 eine beliebige Function der Coordinaten x, x_1, x_2 sein möge. Die Grössen x, y, z deuten wir hernach in einem zweiten Raume als gewöhnliche rechtwinklige Raumcoordinaten. Die Incremente derselben bei Ausführung der infinitesimalen Transformation sind dann:

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = \delta t . X(f_3) = \delta t\, \varphi(x y z)$$

Dies besagt, daß die Charakteristiken d. h. die Bahncurven der Transformationen sämmtlich in gerade Linien verwandelt sind, welche der z-Axe parallel laufen. Setzen wir noch

$d\bar{h} = \frac{dz}{f(xyz)}$ oder $\bar{h} = \int \frac{dz}{f(xyz)}$, woselbst wir das Integral immer ausführen können, da in ihm x und y als Constante gelten und schreiben der Gleichförmigkeit in der Bezeichnung wegen X, Y für x, y, so haben wir für die Incremente der neuen Coordinaten X, Y, h die Gleichungen:

$$\delta X = 0, \quad \delta Y = 0, \quad \delta \bar{h} = \delta t.$$

Und nun ist die Verschiebung $\delta \bar{h}$ für alle Raumpunkte dieselbe geworden. Zusammenfassend gewinnen wir den Satz: Man kann für jede einzelne infinitesimale Transformation Punktcoordinaten $X Y h$ so einführen, dass die Transformation die Gestalt annimmt: $\delta X = 0, \delta Y = 0, \delta \bar{h} = \delta t$, d. h. dass bei gewöhnlicher Interpretation der $X Y h$ eine Verschiebung des Gesammtraumes parallel der h-Axe vorliegt. Die zugehörigen endlichen Transformationen lauten dann wie folgt:

$$X' = X,$$
$$Y' = Y$$
$$h' = h + t.$$

Dass diese einfache Transformationsschaar eine Gruppe bildet, deren Operation zu je zweien

vertauschbar sind und durch ∞ Wiederholung der infinitesimalen Transformation erzeugt gedacht werden kann, ist dann selbstverständlich. Die analogen Betrachtungen gelten natürlich im Raum von n Dimensionen.

Die vorstehende Ueberführung der Gruppe für die Coordinaten x, x_1, x_2 in die Gruppe für die Coordinaten X, Y, Z giebt uns noch Anlass eine neue Bezeichnung kennen zu lernen: Man nennt allgemein 2 Gruppen, wie speciell 2 Transformationen, die durch Einführung neuer Coordinaten in einander übergehen, mit einander ähnlich. Den soeben angeführten Satz können wir daher auch dahin formuliren: Die eingliedrige Gruppe, welche aus einer beliebigen infinitesimalen Transformation durch Wiederholung erwächst, ist ähnlich mit einer gewöhnlichen Translationsgruppe.

Haben wir gesehen, wie durch unendliche Wiederholung einer ∞ kleinen Transformation endliche Transformationen entstehen, so müssen wir uns jetzt umgekehrt auch darüber klar werden, dass wir jede endliche Transformation aus einer unendlich kleinen Transfor-

mation entstehen kann denken können. Es sei die Transformation gegeben, welche aus der beliebigen Function f die neue Function f_1 macht. Wir machen dann den Ansatz:

$$f_1 = f\frac{t}{1}\cdot \mathfrak{K}(f)\frac{t^2}{1.2}\mathfrak{K}\mathfrak{K}(f)+\frac{t^3}{1.2.3}\mathfrak{K}\mathfrak{K}\mathfrak{K}(f)+\ldots$$

in dem uns das Symbol $\mathfrak{K}(f)$ vorläufig noch unbekannt ist. Wir setzen ferner den Parameter $t=1$, was auf dasselbe hinauskommt, als hätten wir ihn in das Symbol $\mathfrak{K}$ hineingenommen. Es gilt nun, den Ausdruck $\mathfrak{K}(f)$ selbst zu berechnen, d.h. die obige Reihe gleichsam zu convertieren. Es ist dies ganz die analoge Aufgabe, als die andere, die Exponentialreihe $e^x = 1+y = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$ in die logarithmische Reihe für $x = \log(1+y)$ entwickelt nach Potenzen von y umzusetzen.

Wir schreiben:

$$\begin{aligned}
f_1 &= f+\frac{1}{1}\mathfrak{K}(f)+\frac{1}{1.2}\mathfrak{K}\mathfrak{K}(f)+\frac{1}{1.2.3}\mathfrak{K}\mathfrak{K}\mathfrak{K}(f)+\ldots\\
f_2 &= f_1+\frac{1}{1}\mathfrak{K}(f_1)+\frac{1}{1.2}\mathfrak{K}\mathfrak{K}(f_1)+\frac{1}{1.2.3}\mathfrak{K}\mathfrak{K}\mathfrak{K}(f_1)+\ldots\\
f_3 &= f_2+\frac{1}{1}\mathfrak{K}(f_2)+\frac{1}{1.2}\mathfrak{K}\mathfrak{K}(f_2)+\frac{1}{1.2.3}\mathfrak{K}\mathfrak{K}\mathfrak{K}(f_2)+\ldots
\end{aligned}$$

oder indem man auf den rechten Seiten der Gleichungen allemal f einführt:

$$\begin{aligned}
f &= f\\
f_1 &= f+\frac{1}{1}\mathfrak{K}(f)+\frac{1}{1.2}\mathfrak{K}\mathfrak{K}(f)+\frac{1}{1.2.3}\mathfrak{K}\mathfrak{K}\mathfrak{K}(f)+\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$f_2 = f + \frac{2}{1} X(f) + \frac{4}{2} XX(f) + \frac{8}{1.2.3} XXX(f) \ldots$$
$$f_3 = f + \frac{3}{1} X(f) + \frac{9}{2} XX(f) + \frac{27}{1.2.3} XXX(f)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aus ihnen folgt, indem man ganz den Uebergang von der Exponentialreihe zur Logarithmenreihe nachmacht:

$$f_1 - f = X(f) + \tfrac{1}{2} XX(f) + \tfrac{1}{6} XXX(f) + \ldots$$
$$\frac{f_2 - 2f_1 + f}{2} = \tfrac{1}{2} XX(f) + \tfrac{1}{2} XXX(f) + \ldots$$
$$\text{und also } X(f) = f_1 - f - \frac{(f_2 - 2f_1 + f)}{2} + \frac{(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f)}{3} \ldots$$

Diese Reihe wird natürlich nur dann convergiren, wenn f_1 hinreichend nahe an f liegt. Durch diese Reihe finden wir also unseren Ausdruck $X(f)$; setzen wir insbesondere für f nacheinander ein $x_1, x_2 \ldots x_n$ so wird der Werth der Reihe entsprechend gleich $\xi_1 \ldots \xi_n$ zu setzen sein, welch letztere Ausdrücke nur die Coefficienten der gewohnten Form $X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ liefern. Haben wir so $X(f)$ bestimmt, so können wir dasselbe jetzt in unsere obige Reihe für f_1 einsetzen, und wir erhalten das Resultat: <u>Jede endliche Transformation, die in der Nähe der Identität liegt, wird entsprechend der von uns aufgestellten Formel von einer ∞ kleinen Transformation erzeugt.</u>

Aus diesem Satze folgt daher, dass die endlichen Transformationen mit Notwendigkeit an die ∞ kleinen gebunden sind. Von hieraus ist dann auch verständlich, dass Lie alle Untersuchungen über endliche Transformationen und ihre Gruppe an die ∞ kleinen Transformationen anknüpft.

Nun gehen wir wieder zu der partiellen Differentialgleichung $X(f) = 0$ zurück. Ihr halten wir die infinitesimale Transformation zugeordnet:

$$\delta x_1 = \xi_1 \delta t$$

$$\vdots$$

$$\delta x_n = \xi_n \delta t$$

Man sieht sofort, an diese Gleichung $X(f) = 0$ lassen sich noch sehr viele andere ∞ kleine Transformationen anknüpfen, die wir in den Gleichungen erhalten:

$$\delta x = \alpha \xi_1 \delta t$$
$$\delta x_n = \alpha \xi_n \delta t$$

$$\vdots$$

$\delta x_n = \alpha \xi_n \delta t$, woselbst α eine beliebige Function der Coordinaten $x_1 \dots x_n$ bezeichnen möge.

Der geometrische Charakter aller dieser

Transformationen spricht sich in dem Satze aus, dass wir mit den letzteren die sämmtlichen ∞ klei-nen Transformationen erschöpfen, bei denen die Raumpunkte auf den Charakteristiken der Glei-chung $X(f) = 0$ verschoben werden. Nun können wir doch von jeder dieser ∞ kleinen Transforma-tionen durch unendliche Wiederholung derselben zu endlichen Transformationen übergehen. Die Gesammtheit derselben erschöpft dann einfach alle endlichen Transformationen, bei denen die ein-zelnen Raumpunkte auf den Charakteristiken von $X(f) = 0$ verschoben werden. Sie bildet wieder eine Gruppe, die jedoch eine unendliche Gruppe im Lie'schen Sinne darstellt, da sie aus ∞ vie-len erzeugenden Operationen entstanden ist.

Dieser Satz ist am einfachsten einzusehen, wenn man um wieder nur vom R_3 zu sprechen, wie eben bereits geschah, die Charakteristiken in die vertikalen Linien eines Kugelraumes X, Y, z verwandelt, wo dann nur zu zeigen ist, dass eine endliche Transformation, bei welcher jeder Raumpunkt auf seiner vertikalen Geraden bleibt, von einer ∞ kleinen Transformation er-zeugt ist, bei welcher er ebenfalls auf seiner vertica-

len Geraden bleibt. Dies folgt in der That, wenn wir auf die endliche Transformation $X' = X, Y' = Y,$ $Z' = Z + \Phi(X Y h)$ die Reihe für $X^c(f)$ anwenden. Uebrigens aber wiederholen wir: Zu jeder Gleichung $Xf = 0$ gehört eine bestimmte unendliche Transformationsgruppe.

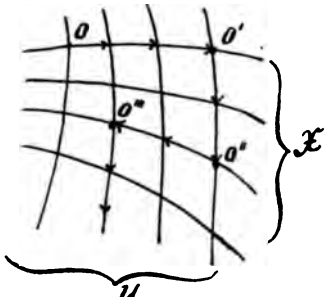
Fr. 9 II 93] Wir wollen nun weiter dazu übergehen, 2 Ausdrücke $X(f), Y(f)$ als Ausgangspunkt zu wählen. Wir nehmen sogleich wieder die lineare Verbindung beider hinzu $\alpha X + \beta Y$. Dann wird der Zuwachs einer beliebigen Funktion f bei der Anwendung der ∞ kleinen Transformation des Symbols $\alpha X + \beta Y$ gegeben durch die Gleichung:

$$df = \left\{ \alpha \left(\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots \right) + \beta \left(\eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots \right) \right\} dt.$$

Da α und β 2 willkürliche Funktionen bezeichnen, so giebt uns das Symbol $\alpha X + \beta Y$ unendlich viele ergengende Operationen, deren beliebige Wiederholung und Combination gewiss eine ∞ Gruppe ergengt. Was bedeutet es nun, wenn $X^c(f) = 0$ und $Y(f) = 0$ ein vollständiges System bilden, d. h. wenn $(X^c, Y) = K X + \lambda Y$ wird? Bleiben wir zu.

nächst im R_3, so wissen wir doch, dass dann derselbe sich in „charakteristische" Mannigfaltigkeiten 2er Dimensionen zerspaltet, deren jede von Charakteristiken x und y überspannen wird.

Durch Anwendung einer Operation αX^c bewegt sich dann ein beliebiger Raumpunkt O auf der zugehörigen Charakteristik x bis etwa bis zum Punkte O', durch die fernere Anwendung einer Operation βY bewegt sich O' weiter auf seiner Charakteristik y bis O'' u. so fort, wie es in der Figur angedeutet ist.



Dieses Ergebniss ist sogleich auf den Fall eines vollständigen Systems von q Gleichungen $X_1(f) = 0 \ldots X_q(f) = 0$ und n Variablen $x_1, \ldots x_n$ zu verallgemeinern: Von jedem Raumpunkte des R_n erstreckt sich eine charakteristische Mannigfaltigkeit M_q. Bilden wir uns wieder alle infinitesimalen Transformationen $\alpha_1 X_1(f) + \ldots + \alpha_q X_q(f)$, wo die $\alpha_1, \ldots \alpha_q$ beliebige Functionen der $x_1, \ldots x_n$ sind, so bekommen wir eine ∞ Gruppe continuirlicher Raumtransformationen, welche aber nicht

transitiv ist, d.h. der einzelne Raumpunkt M_0 nicht in beliebige Raumpunkte durch die Transformationen der Gruppe übergeführt werden, derselbe wird vielmehr immer nur auf der durch ihn hindurchgehenden M_0 verschoben.

Im Fall uns zwei Ausdrücke X_f und Y_f vorliegen und wir in R_3 uns bewegen, wird durch die Transformation $\alpha(X)$ der Raumpunkt in der Richtung der zugehörigen Charakteristik X verschoben, durch die Transformation $\beta(Y)$ in der Richtung der zugehörigen Charakteristik Y, entsprechend durch die Transformation $\alpha(X)+\beta(Y)$ in einer Richtung des durch die erstgenannten festgelegten Strahlbüschels. Umgekehrt wird durch $\alpha X + \beta Y$ die allgemeinste infinitesimale Transformation gegeben, welche in einer Richtung dieses Strahlbüschels verschiebt. Das Analoge gilt für den allgemeinen Fall des R_n.

Dies besagt aber, daß in unserer Gruppe keine anderen infinitesimalen Transformationen enthalten sind als die $\alpha_1 X_1 f + \dots \alpha_g X_g f$ selbst, d.h. daß keine anderen infinitesimalen Transformationen vorhanden sind als diejenigen, von denen wir bei der Erzeugung der

Gruppe ausgegangen sind.

Von dieser Auffassung aus ergiebt sich eine interessante Bedeutung der Klammerrelation $(XY) = KX - LY$. Wir führen nämlich die folgende Rechnung durch: Unter $X^{(t)}$ und $Y^{(t')}$ verstehen wir entsprechend die Gesammtheit der endlichen Transformationen, die aus den unendlich kleinen Transformation X und Y erzeugt werden, unter $X^{(-t)}$ und $Y^{(-t')}$ dagegen die zugehörigen inversen Operationen, so dass die folgenden Gleichungen gelten:

$$\text{für } X^{(t)}: \quad f' = f + \frac{t}{1} X(f) + \frac{t^2}{1.2} XX(f) + \frac{t^3}{1.2.3} XXX(f) + \dots$$

$$\text{für } Y^{(t')} \quad f' = f + \frac{t'}{1} Y(f) + \frac{t'^2}{1.2} YY(f) + \frac{t'^3}{1.2.3} YYY(f) + \dots$$

$$\text{für } X^{(-t)}: \quad f' = f - \frac{t}{1} X(f) + \frac{t^2}{1.2} XX(f) - \frac{t^3}{1.2.3} XXX(f) \pm \dots$$

$$\text{für } Y^{(-t')}: \quad f' = f - \frac{t'}{1} Y(f) + \frac{t'^2}{1.2} YY(f) - \frac{t'^3}{1.2.3} YYY(f) \pm \dots$$

Diese Operationen wollen wir nun hinter einander auf eine Function f anwenden, wie es das Symbol andeutet: $(f) X^{(t)} Y^{(t')} X^{(-t)} Y^{(-t')}$. Wären die einzelnen Operationen vertauschbar, so würde diese Com-

binationen natürlich die Identität ergeben.) Für beliebige Werte der Parameter t und t' stellt das betreffende Symbol dann eine Schaar von 2fach ∞ vielen Transformationen dar, die an sich zwar keine Gruppe bilden, wohl aber in der Gruppe enthalten ist, welche man durch die beliebige Wiederholung und Combination der Operation X und Y ergeben kann. Nun wollen wir die Reihenentwickelung für diese Schaar von Transformationen uns aufstellen.

Es ist zunächst:

für $X^{(t)}(f)$: $f_1 = f + \frac{t}{1} Xf + \frac{t^2}{1.2} XXf + \dots$

Wenden wir nun weiter auf f_1 die Operation $Y^{(t')}$ an, so erhalten wir:

$$f_2 = f_1 + \frac{t'}{1} Yf_1 + \frac{t'^2}{1.2} YYf_1 + \dots$$

oder indem man für f_1 seinen Wert setzt:

$$f_2 = f + \frac{t}{1} Xf + \frac{t^2}{1.2} XXf + \dots$$

$$+ \frac{t'}{1} Yf + \frac{tt'}{1} YXf + \dots$$

$$+ \frac{t'^2}{1.2} YYf + \dots$$

Auf f_2 wenden wir dann die Operation $X^{(-t)}$ an,

wir bekommen:

$$f_3 = f_2 - \frac{t}{1} \mathfrak{X}^c(f_2) + \frac{t^2}{1.2} \mathfrak{X}^c \mathfrak{X}^c(f_2) \mp \dots.$$

oder:

$$f_3 = f + \frac{t}{1} \mathfrak{X}^c(f) + \frac{t^2}{1.2} \mathfrak{X}^c \mathfrak{X}^c(f) + \dots.$$

$$+ \frac{t'}{1} \mathfrak{Y}(f) + \frac{tt'}{1.} \mathfrak{Y}\mathfrak{X}(f) + \dots$$

$$+ \frac{t'^2}{1.2} \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}(f) + \dots$$

$$- \frac{t}{1} \mathfrak{X}^c(f) - \frac{t^2}{1} \mathfrak{X}^c \mathfrak{X}^c(f) - \dots$$

$$- \frac{tt'}{1} \mathfrak{X}\mathfrak{Y}(f) - \dots$$

$$+ \frac{t^2}{2} \mathfrak{X}^c \mathfrak{X}^c(f) + \dots$$

oder

$$f_3 = f + \frac{t'}{1} \mathfrak{Y}(f) + \frac{tt'}{1} \cdot (\mathfrak{Y}\mathfrak{X}^c - \mathfrak{X}^c\mathfrak{Y})(f) + \frac{t'^2}{1.2} \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}(f) + \dots.$$

Auf f_3 wird endlich noch die Operation $\mathfrak{Y}^{(-t')}$ angewandt. Dann ergiebt sich:

$$f_4 = f_3 - \frac{t'}{1} \mathfrak{Y}(f_3) + \frac{t'^2}{1.2} \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}(f_3) \mp \dots.$$

$$= f + \frac{t'}{1} \mathfrak{Y}(f) + \frac{tt'}{1} (\mathfrak{Y}\mathfrak{X}^c - \mathfrak{X}^c\mathfrak{Y})(f) + \frac{t'^2}{1.2} \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}(f) + \dots$$

$$- \frac{t'}{1} \mathfrak{Y}(f) - \frac{t'^2}{1} \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}(f) - \dots$$

$$+ \frac{t'^2}{1.2} \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}(f) + \dots$$

oder:

$$f_4 = f + * + \frac{tt'}{1}(YX - XY)(f) + \dots$$

In solcher Weise lässt die Aufeinanderfolge der 4 Transformationen $X^{(t)} Y^{(t')} X^{(-t)} Y^{(-t')}$ aus seine Function f_4 entstehen, welche bis auf Glieder höherer Ordnung folgendermassen lautet:

$$f_4 = f + \frac{tt'}{1}(YX - XY)f.$$
$$+ \frac{t^2t'}{2}\big((YX - XY)X(f) - X(YX - XY)(f)\big)$$
$$+ \frac{tt'^2}{2}\big((YX - XY)Y(f) - Y(YX - XY)(f)\big)$$
$$+ \text{Glieder } 4^{\text{ter}} \text{ Ordnung} \dots.$$

In diesen Formeln sehen Sie für beliebige Werte von t und t' die 2fach ∞ Schaar von endlichen Transformationen vor sich. Um die ∞ kleinen Transformationen derselben zu haben, werden wir einfach t und t' als ∞ kleine Grössen, am einfachsten von der Ordnung $1/2$ betrachten, und uns dann natürlich auf die ersten beiden Glieder der rechten Seite beschränken, da alle anderen

unendlich klein von höherer Ordnung werden. Dann ergiebt sich:

$f_4 = f + \varepsilon (Yf - Xf)(f)$, wo ε eine kleine Grösse erster Ordnung ist

oder:

$$\delta f = \varepsilon (Yf - Xf)(f).$$

Diese ∞ kleine Transformation wird daher durch das Symbol $Yf - Xf$, d.h. durch den Klammerausdruck (Yf) gegeben. Hiermit haben wir den merkwürdigen und richtigen Satz abgeleitet, der sich durch die ganze Lie'sche Transformationstheorie hindurchzieht: Wenn man sich die Gruppe aus den unendlich kleinen Transformationen X u. Y bildet, dann findet sich in der Gruppe immer auch die ∞ kleine Transformation (Y,X).

Wir machen sogleich Gebrauch von diesem Resultat. Vorhin erkannten wir doch, dass im Falle eines vollen Systems X, Y eine Gruppe entsteht, welche nicht transitiv ist, sondern den Punkt nur auf einer hindurchgehenden Fläche verschiebt. Mögen nun umgekehrt X u. Y eine Gruppe erzeugen, die nicht transitiv ist, sondern

den Punkt nur auf einer Fläche verschiebt, so dass jede ∞ kleine Transformation der Gruppe sich in die Gestalt $\alpha X + \beta Y$ setzen lassen muss. Nun ist in der Gruppe des Weiteren die infinitesimale Transformation (XY) enthalten. Wir schliessen, dass dieses eine lineare Verbindung von X, Y sein muss, dass also ein vollständiges System vorliegt. Die durch den Klammerausdruck gegebene (XY) Richtung der Charakteristik eines beliebigen Raumelementes muss eben in dem linearen Büschel liegen, welches von den Fortschreitungsrichtungen der durch die Transformationen X u. Y bestimmten Charakteristiken angegeben wird.

Was wir hiermit für 2 Ausdrücke X u Y entwickelt haben, lässt sich natürlich sofort auf eine grössere Zahl solcher Ausdrücke übertragen. Wir betrachten wieder die Gruppe, welche durch die ∞ kleinen Transformationen, deren Symbole die gegebenen Ausdrücke sind, erzeugt wird, bilden uns ferner auch die Klammerausdrücke aus je zweien der gegebenen Ausdrücke und untersuchen insbesondere, welche Bewandtniss es mit den vollständigen Systemen hat.

Die Betrachtung und die Resultate, zu denen

kommt, sind ganz analog denen in R_3. Für kommt das eine Komponente hinzu, dass für je 3 Ausdrücke $X^\kappa Y^\lambda h^\mu$, die sogenannte Jacobische Identität gilt, nämlich die Relation:

$$(X^\kappa (Y^\lambda h^\mu)) + (Y^\lambda (h^\mu X^\kappa)) + (h^\mu (X^\kappa Y^\lambda)) \equiv 0.$$

Hier bedeutet das erste Glied $(X^\kappa (Y^\lambda h^\mu))$, dass man zunächst den Klammerausdruck von Y^λ u. h^μ und dann den Klammerausdruck von X^κ und den soeben gebildeten Klammerausdruck $(Y^\lambda h^\mu)$ bilden soll, analog das zweite und dritte Glied. Führt man das erste Glied in extenso aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(X^\kappa (Y^\lambda h^\mu)) &= X^\kappa (Y^\lambda h^\mu) - (Y^\lambda h^\mu) X^\kappa \\ &= X^\kappa (Y^\lambda h^\mu - h^\mu Y^\lambda) - (Y^\lambda h^\mu - h^\mu Y^\lambda) X^\kappa \\ &= X^\kappa Y^\lambda h^\mu - X^\kappa h^\mu Y^\lambda - Y^\lambda h^\mu X^\kappa + h^\mu Y^\lambda X^\kappa\end{aligned}$$

Wenn in gleicher Weise auch die beiden übrigen Glieder der identischen Gleichung in derselben Weise entwickelt werden, so erhält man linker Hand insgesamt 12 Glieder, die sich gerade wechsel-

seitig wegheben, so dass in der That die linke Seite identisch 0 wird. Hiermit sind wir mit dem einleitenden Kapitel zu Ende gekommen, dasselbe ist zwar wesentlich analytischen Charakters, indem wir zumeist mit Symbolen zu operiren hatten, ebenso wie auch die Lie'schen Bücher vorwiegend analytisch geschrieben sind, doch müssen wir festhalten, dass der ursprüngliche Ausgangspunkt dieser Theorieen ein geometrischer ist. Dieser geometrische Charakter wird erneut deutlicher hervortreten, wenn wir demnächst Gelegenheit nehmen, specielle Beispiele zu diesen allgemeinen Entwicklungen kennen zu lernen.

Di 13 VI 93 Heute beginnen wir mit einem allgemeinen <u>Ueberblick über die Lie'sche Gruppentheorie</u>.

Der erste Eintheilungsgrund, den wir zu Grunde legen, ist uns bereits geläufig; wir zerlegen die continuirlichen Gruppen in <u>endliche</u> und in <u>unendliche Gruppen</u>, d.h. in solche, welche eine endliche Zahl Parameter $a_1, a_2 \ldots a_r$ und solche, welche ∞ viele Parameter d.h. willkürliche Functionen enthalten. <u>In dem ersten Theile unserer</u> folgenden Entwicklung beschäftigen wir uns

zunächst ausschließlich mit den endlichen Gruppen. Eine einzelne Transformation einer solchen Gruppe möge durch das folgende Gleichungssystem gegeben sein:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \ldots x_n, a_1 \ldots a_r), \text{ für } i = 1, 2 \ldots n.$$

Fügen wir zu dieser eine zweite derartige Transformation hinzu:

$$x_i'' = f_i(x_1', x_2' \ldots x_n', b_1 \ldots b_r), \text{ für } i = 1, 2 \ldots n,$$ so

muss die Zusammensetzung beider in beliebiger Combination stets wieder eine Transformation der Gruppe geben, d. h. es muss wieder eine Substitution resultieren:

$$x_i'' = f_i(x_1 \ldots x_n, c_1 \ldots c_r)$$ und hier müssen gemäss der Lie'schen Definition der endlichen Gruppen die Parameter $c_1, c_2 \ldots c_n$ allein von den Grössen a und b abhängen.

(Halphen hat gelegentlich vorgeschlagen, auch solche Fälle zu betrachten, wo die c von den a, b und x abhängen, doch gehen wir darauf nicht weiter ein).

Der zweite Einteilungsgrund für unsere Gruppen liegt in der Unterscheidung von Punktransformationen und von Berührungstransformat.

tionen. Bleiben wir bei 3 Variabelen x, y, z, so werden ja die Berührungstransformationen durch Anwendung der 5 Variablen x, y, z, p, q charakterisirt sein. Dieselben sind dann der Art zu transformiren, dass der Differentialausdruck $dz - p\,dx - q\,dy$ bis auf einen Faktor in sich übergeht. Nun sieht man sofort, dass die Scheidung zwischen den Gruppen von Punkttransformationen und von Berührungstransformationen nur auf ein Anordnungsprincip des Stoffes hinauskommt. Denn die endlichen Gruppen von Berührungstransformationen des dreidimensionalen Raumes sind doch zugleich endliche Gruppen von Punkttransformationen des 5 dimensionalen Raumes und würden also bei 5 Variablen zur Aufzählung kommen, wenn wir uns eben durchaus auf Punkttransformationen beschränken wollen.

Wir wollen nun sogleich noch einige Bemerkungen über die endlichen Gruppen hinzufügen. Wir sagten schon früher, dass wir nur solche Gruppen behandeln wollen, welche die Identität unter ihren Transformationen enthalten. Die Identität möge dann insbesondere dargestellt sein, wenn wir den Parametern $a, a_1 \ldots a_r$

sämmtlich den Werth 0 ertheilen; also durch das Formelsystem:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \ldots x_n, 0, 0, 0 \ldots 0).$$

Lie führt des Weiteren dann gewisse Voraussetzungen ein, die darauf hinauskommen, dass die Funktionen f_i in der Umgebung der Stellen $0, 0 \ldots 0$ analytische Funktionen der a sind, und dass übrigens die Grössen a als unbeschränkt complexe Veränderliche angesehen werden sollen.

Unter diesen Annahmen werden wir die infinitesimalen Transformationen, welche in der vorliegenden Gruppe vorhanden sind, erhalten, indem wir eine Entwickelung der f_i nach Potenzen der a eintreten lassen und dann a_1 durch da_1, a_2 durch da_2 u. so fort a_r durch da_r ersetzen.

Es wird dann also:

$$dx_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_1}\right) da_1 + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_r}\right) da_r \text{ zu setzen}$$

sein. In den Differentialquotienten $\left(\frac{\partial f_i}{\partial a_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_r}\right)$ ist natürlich den Grössen $a_1 \ldots a_r$ der Werth 0 zu ertheilen, das Genannte ist nichts weiter als eine Anwendung der Mac Laurin'schen Reihe und.

wicklung. Die Aenderung δF einer beliebigen Funktion F vermöge der infinitesimalen Transformation ergibt uns sogleich die folgende Formel:

$$\delta F = da_1\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial a_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial a_1}\right)$$

$$+ da_2\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial a_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial a_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial a_2}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ da_r\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial a_r} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial a_r} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial a_r}\right)$$

Nun ist sofort einleuchtend, dass wir die Klammerausdrücke der letzten Formel mit den Symbolen $X_1^c(F)$, $X_2^c(F)$ u. s. w. bezeichnen können. Wir gewinnen hierdurch die einfache Darstellung des Zuwachses von F in der Gestalt:

$$\delta F = X_1^c(F)\,da_1 + X_2^c(F)\,da_2 + \ldots + X_r^c(F)\,da_r$$

Indem wir noch setzen:

$$da_1 = c_1\,dt,$$

$$da_2 = c_2\,dt,$$

$$\vdots$$

$da_r = c_r\,dt$, woselbst die c_i Constante sind, d. h. Grössen, welche nicht von den x ab,

hängen, übrigens aber beliebig gewählt werden können, werden wir schreiben:

$$\delta f = \left(\varepsilon_1 X_1^c(f) + \varepsilon_2 X_2^c(f) + \ldots + \varepsilon_r X_r^c(f)\right) dt.$$

Aus der vorstehenden Formel entnehmen wir dann die Folge: Eine n gliedrige Gruppe enthält r unabhängige infinitesimale Transformationen, deren Symbole wir mit $X_1^c, X_2^c, \ldots X_r^c$ bezeichnen. Aus diesen unabhängigen infinitesimalen Transformationen setzt sich die allgemeinste infinitesimale Transformation der Gruppe in folgender Gestalt zusammen: $\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2^c + \ldots + \varepsilon_r X_r^c$. Hier wollen wir noch ausdrücklich betonen, daß die ε_i Constante sind, d.h. Größen, welche die x_i nicht mehr enthalten, im Gegensatz zu dem, was wir in voriger Woche bei gewissen unendlichen Gruppen gesehen haben, wo wir die infinitesimale Transformation $\alpha_1 X_1^c + \alpha_2 X_2^c + \ldots \alpha_n X_n^c$ hatten unter α_1, α_2 beliebige Funktionen der x_i verstanden. Diese Betrachtungen sind ja sehr einfach und von selbst einleuchtend; die eigentliche Leistung von hier ruht auf dem Heranziehen des Klammerausdrucks, wie wir sehr bald sehen werden.

Doch wollen wir vorher uns die bis jetzt besprochenen Verhältnisse an speciellen Beispielen klar machen. Da ist zuerst zu nennen die Gruppe, welche Lie <u>die allgemeine lineare Gruppe</u> nennt. Dieselbe wird für die Ebene durch die Formeln gegeben:

$$x' = ax + by + c$$

$$y' = dx + ey + f.$$

Nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise wird man jede solche Transformation als <u>affine Umformung</u> der Ebene bezeichnen. Diese Gruppe ist, da sie 6 Parameter enthält, eine 6 gliedrige zu nennen. Gewiss auch hängt sie von den Parametern und zwar ausnahmslos analytisch ab. Desgleichen enthält sie die Identität: $x' = x$

$y' = y$, doch ergibt sich dieselbe nicht, wenn man alle Parameter, wie wir es verabredeten, gleich 0 setzt, sondern es muss $a = e = 1$, $b = c = d = f = 0$ sein.

Demgemäss werden wir besser schreiben:

$$x' = (a+1)x + by + c,$$

$$y' = dx + (e+1)y + f,$$

Äusserst einfach ist es jetzt, die infinitesimalen Transformationen zu bilden. Dieselben werden

gegeben durch die folgenden Formalgruppen:

$$1)\ \begin{matrix} dx = x\,da, \\ dy = 0 \end{matrix} \qquad 2)\ \begin{matrix} dx = y\,dz \\ dy = 0 \end{matrix} \qquad 3)\ \begin{matrix} dx = dc \\ dy = 0 \end{matrix}$$

$$4)\ \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = x\,dd^{*}) \end{matrix} \qquad 5)\ \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = y\,de \end{matrix} \qquad 6)\ \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = df. \end{matrix}$$

Eine beliebige Funktion F ändert sich bei diesen infinitesimalen Transformationen dann entsprechend um: $\left(x\frac{\partial F}{\partial x}\right).\,da$, $\left(y\,\frac{\partial F}{\partial x}\right)db$ u. s. w.

Demnach lauten die Symbole für die 6 infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{X}_1 = x\,\frac{\partial F}{\partial x},\quad \mathfrak{X}_2 = y\,\frac{\partial F}{\partial x},\quad \mathfrak{X}_3 = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\mathfrak{X}_4 = x\,\frac{\partial F}{\partial y},\quad \mathfrak{X}_5 = y\,\frac{\partial F}{\partial y},\quad \mathfrak{X}_6 = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Es giebt nun 2 besonders einfache Untergruppen dieser allgemein linearen Gruppen:

*) Die doppelte Bedeutung des Buchstaben d wird wohl zu keinen Missverständnissen Anlass geben.

Die erste wird gegeben, wenn man die Bedingung hinzunimmt, dass $(a+1)(e+1) - bd = 1$ sein soll. Den Ausdruck der linken Seite können wir die Determinante der Transformationen nennen. Man überzeugt sich leicht, dass 2 Transformationen, deren Determinanten gleich 1 sind, in der That sich wie, der zu einer Transformation zusammensetzen, deren Determinante gleich 1 ist. Diese Untergruppe nennt Lie die specielle lineare Gruppe.

Eine zweite Untergruppe bekommen wir, wenn wir die beiden Constanten c und f gleich 0 annehmen, so dass die Substitutionen in x, y homogene Form bekommen. Dementsprechend nennt Lie diese zweite Untergruppe die allgemeine homogene lineare Gruppe. Nimmt man ferner auch hier wieder die Bedingung hinzu, dass die Determinante der Transformationen gleich 1 sein soll, dann erhalten wir die specielle homogene lineare Gruppe. Man sieht ferner sofort, dass

die specielle lineare Gruppe 5 gliedrig,
die allgem homogene lineare Gruppe 4 gliedrig,
die specielle, homogene lineare Gruppe
endlich 3 gliedrig ist.

Nun wollen wir uns die infinitesimalen Trans.

formationen der Untergruppen bilden. Für die erstgenannte Untergruppe muss:

$(da + 1)\,de + 1)$-d.b. $dd = 1$ oder:

$da + de = 0$ sein (indem wir uns auf die Glieder erster Ordnung beschränken.) Dies besagt, dass wir nicht a allein um da ändern können, ohne zugleich e um $de = -da$ zu ändern.

Die betreffende infinitesimale Transformation wird daher gegeben durch die Formeln:

$$dx = x\,da$$
$$dy = y\,de$$
$$= -y\,da$$

und eine beliebige Function F erhält hierbei den Zuwachs: $\delta F = \left(x\frac{\partial F}{\partial x} - y\frac{\partial F}{\partial y}\right)dt$,

woselbst wir dt statt da der gleichmässigen Schreibweise wegen gewählt haben. Bei der speciellen linearen Gruppe bleiben daher nur noch 5 infinitesimale Transformationen übrig, indem die früheren Operationen X_1^c und X_5^c jetzt nur in der Verbindung $X_1^c - X_5^c$ auftreten.

Betrachten wir in gleicher Weise auch die homogene lineare Gruppe, so kommen einfach die Symbole X_3^c und X_4^c hier in Wegfall.

Wir haben noch eine letzte Gruppe anzuführen,

die mit den besprochenen in nächster Beziehung steht. Das ist, um gleich wieder die Lie'sche Benennung anzugeben) die projective Gruppe der ein-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

Dieselbe wird gegeben durch die Formel: $x' = \frac{(a+1)x+b}{d.x+(e+1)}$. Diese Gruppe enthält wieder 3 unabhängige Parameter, d.h. sie ist dreigliedrig und wir haben diese Parameter wieder so gewählt, dass die Identität durch $a = b = d = e = 0$ gegeben wird.

[So. 15 VI 93]

Wir werden nun die zugehörigen infinitesimalen Transformationen finden, indem wir die Parameter als Differentiale schreiben; wir erhalten dann:

$x' = ((1+\delta a).x + \delta b).(1+\delta d.x+\delta e)^{-1}$, oder, indem wir uns auf erste Potenzen der Differentiale in der Entwicklung beschränken:

$x' = x + \delta a.x + \delta b - \delta d.x^2 - \delta e\, x$ oder

$\delta x = (\delta a - \delta e).x + \delta b - \delta d.x^2$. Wir haben in der That die 3 infinitesimalen Transformationen.

1) $\delta x = \delta b$, 2) $\delta x = (\delta a - \delta e).x$, 3) $\delta x = -\delta d.x^2$

Die Symbole dieser unendlich kleinen Transformationen ergeben sich, wenn man bedenkt, dass der Zuwachs einer beliebigen Function $f(x) = \frac{df}{dx}\cdot\delta x = Xf.\delta t$ zu setzen ist, in der Form:

$$1)\ X_0^c(f) = \frac{df}{dx},\quad 2)\ X_1^c(f) = x\frac{df}{dx},\quad 3)\ X_2^c(f) = x^2\frac{df}{dx}.$$

Wir haben die Indices 0, 1, 2 auf der linken Seite gewählt dem Umstande entsprechend, dass rechts die 0te, 1te resp. 2te Potenz der Variabeln x als Coefficient auftritt. Man beachte übrigens ganz besonders, dass diese letzten Formeln in den x eben bis zum 2ten Grade ansteigen, d.h. dass der lineare Charakter verloren gegangen ist, was denen, die an homogene Schreibweise gewöhnt sind, auf den ersten Blick unbequem erscheinen mag. Es ist lehrreich, sich zu überzeugen, dass die endliche Gruppe, welche von $X_2^c f$ erzeugt wird, in der That linear ausfällt. Wir haben zu dem Zwecke zu schreiben:

$$x' = x + \frac{t}{1}.X_2^c x + \frac{t^2}{1.2}.X_2^c X_2^c(x) + \frac{t^3}{1.2.3}.X_2^c X_2^c X_2^c(x) + \ldots.$$

das ist aber:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{tx^2}{1} + \frac{t^2x^3}{1} + \frac{t^3x^4}{1} + \ldots. \\ &= x(1 + tx + t^2x^2 + t^3x^3 + \ldots.) \\ &= \frac{x}{1-tx} \end{aligned}$$

Wir wollen auch die entsprechenden Formeln für die projective Transformation in der Ebene kennen lernen. Dieselbe wird gewöhnlich durch die Formeln gegeben: $x' = \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}$

$y' = \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}$. Indem wir je. doch wieder die Identität erhalten wollen, wenn man sämmtliche Parameter verschwinden läßt, legen wir besser die folgende Form zu Grunde:

$$x' = \frac{(1+a).x+by+c}{a''x+b''y+(1+c'')'}$$

$$y' = \frac{a'x+(1+b')y+c'}{a''x+b''y+(1+c'')}.$$ Diese Formeln enthalten 8 wesentliche Parameter (da wir ja einen der 9 constant nehmen können).

Nun werden wir wieder die Parameter a, b, c u. s. w. durch ihre Differentiale $\delta a, \delta b, \delta c$ u. s. w. ersetzen und genau so verfahren wie oben für eine Variable. Nach geeigneter Ausrechnung erhält man dann die Symbole der zugehörigen 8 infinitesimalen Transformationen in der Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ x\frac{\partial f}{\partial x},\ y\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ x\frac{\partial f}{\partial y},\ y\frac{\partial f}{\partial y},\ x^2\frac{\partial f}{\partial x}+xy\frac{\partial f}{\partial y}$$

und $x y \frac{\partial f}{\partial y} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y}$.

Die vorstehenden Beispiele sind uns insbesondere ein Beleg dafür, daß zu einer r-gliedrigen endlichen Gruppe auch allemal r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen gehören. Umgekehrt wird man dann durch Wiederholung dieser infinitesimalen Transformationen die endlichen Transformationen der vorliegenden Gruppe erzeugt denken können, wie wir nicht weiter ausführen.

Nun kommt hinzu <u>die Betrachtung des Klammerausdrucks</u>; wir haben schon das vorige Mal gesagt, daß hierin gerade der Kernpunkt der Lie'schen Theorie ausgesprochen liegt.

Nehmen wir an, daß $X_i(f)$ und $X_k(f)$ 2 infinitesimale Transformationen der Gruppe sind, dann wissen wir von unseren früheren Entwicklungen, daß der Klammerausdruck $(X_i, X_k)(f)$, der sich aus beiden bilden läßt, gleichfalls eine infinitesimale Transformation der Gruppe ist und sich also als <u>eine lineare Verbindung der r gegebenen unabhängigen infinitesi-</u>

malen Transformationen X_σ' darstellen lassen muss: $(X_i', X_k') = \sum_1^r c_{ik\sigma} X_\sigma'$.

Den hierin ausgesprochenen Satz wollen wir als ersten Fundamentalsatz der Gruppentheorie bezeichnen. Es ist insbesondere zu betonen, dass die Coefficienten $c_{ik\sigma}$ hier Constante sind. Anders war es bei der Betrachtung des vollständigen Systems linearer partieller Differentialgleichungen, von denen irgend zwei durch die Gleichungen $X_i'(f) = 0$, $X_k'(f) = 0$ gegeben sein mögen. Auch hier mussten sich zwar die Klammerausdrücke $(X_i' X_k')$ aus den X_σ' linear zusammensetzen lassen in der Gestalt $(X_i' X_k') = \sum_1^r \gamma_{ik\tau} X_\sigma'$, aber die hier auftretenden Factoren $\gamma_{ik\sigma}$ brauchten keine numerischen Constanten zu sein, sondern konnten irgend welche Functionen der Coordinaten x_i sein. In der That haben wir gelernt, dass mit einem r-gliedrigen vollständigen System immer eine unendliche Gruppe verknüpft ist, aber keineswegs ohne weiteres eine endliche Gruppe.

Die obigen Constanten $c_{ik\sigma}$ sind nun noch an gewisse Bedingungen gebunden, welche

sich bei der Entwicklung der Jacobi'schen Iden, tität ergeben. Es findet doch letztere ihren Aus, druck in der Formel:

$$(X_i^r . (X_k X_e)) + (X_k^r (X_e X_i)) + (X_e^r (X_i X_k)) \equiv 0$$

Indem wir für die ersten Klammerausdrücke ihre Werte einsetzen, erhalten wir:

$$(X_i, \sum_s c_{kes} X_s^r) + (X_k^r, \sum_s c_{eis} X_s^r) + (X_e^r, \sum_s c_{iks} X_s^r) \equiv 0$$

oder, indem wir auch die zweiten Klammerausdrücke noch entwickeln, können wir schließlich unsere Iden, tität in der folgenden Doppelsumme darstellen:

$$\sum_s \sum_t (c_{kes} c_{ist} + c_{eis} c_{kst} + c_{iks} c_{est}) . X_t^r \equiv 0.$$

Da nun aber zwischen der X_t^r doch keine linea, re Gleichung bestehen kann, – denn sie sollen doch unabhängig voneinander sein –, so müssen die einzelnen Coefficienten gleich 0 sein, d.h. es ist:

$$\sum_s (c_{kes} c_{ist} + c_{eis} c_{kst} + c_{iks} c_{est}) = 0 \text{ für belie, bige Indices } i, k\, t.$$

Dies sind dann die zwischen den Constanten c bestehenden Relationen.

Die obigen Formeln $(X_i, X_k) = \sum_s c_{iks} X_s^r$ sind nun um so bemerkenswerter als sie zugleich

die nothwendige Bedingung enthalten, damit irgend welche infinitesimale Transformationen $X_1', X_2' \dots X_r'$ wirklich eine r gliedrige Gruppe erzeugen. Hierin liegt der zweite Fundamentalsatz der Lie'schen Gruppentheorie wie wir uns hier ausdrücken wollen, ausgesprochen.

Doch müssen wir den Beweis dieses Umkehrsatzes uns allerdings noch für später aufbewahren, einstweilen begnügen wir uns damit, daß unsere Relationen <u>nothwendig</u> sind, damit eine <u>r-gliedrige endliche Gruppe vorliegt.</u>

Wir können jetzt dazu übergehen, einen Teil der speciellen Untersuchungen von Lie kennen zu lernen. Die allgemeine Aufgabe der Gruppentheorie wird die sein: <u>alle Gruppen aufzuzählen.</u> Insbesondere mag man dieses verlangen, wenn die Zahl der Veränderlichen gegeben ist ($n = 1, 2, 3 \dots$) oder aber zweitens, wenn die Parameterzahl gegeben ist ($r = 1, 2, 3 \dots$), oder endlich wenn irgendwelche besondere Eigenschaften der Gruppe gegeben sind, die uns interessieren mögen. Natürlich ist diese Aufgabe nicht so zu verstehen, als sei es möglich, diese Aufzählungen

zu vollenden; es wird darauf ankommen, die jedesmal niedrigsten Fälle zu erledigen und von da aus allgemeine Ansätze zu gewinnen. Lie hat in dieser Beziehung das gewiss sehr überraschende merkwürdige Resultat gefunden, dass in allen genannten Fällen eine begrenzte Zahl gebrauchter Gruppen-Typen vorhanden ist. Man sollte doch anfangs meinen, dass die Gesammtheit der continuirlichen Gruppen selber ein Continuum bilden würde, ein „Gruppenraum" könnte man sagen, doch liegen die Individuen hier im Gegentheil in bestimmten Klassen getrennt.

Die ersten Mittheilungen Lie's über diesen Gegenstand finden sich in den Göttinger Nachrichten vom Dezember 1874; dann folgen in dem norwegischen Archiv Bd. 1, 3 und 4 (1876-79) die ersten ausführlichen Darstellungen, endlich findet sich in den Annalen 16 (1879-80) die erste grössere, zusammenfassende Abhandlung: „Theorie der Transformationsgruppen". Gerade das Studium dieser letzteren Arbeit ist als eine gute Einführung in die ganze Theorie zu empfehlen, mehr noch als das Buch von Lie-Engel, welches zu sehr abstract geschrieben ist.

die nothwendige Bedingung enthalten, damit irgend welche infinitesimale Transformationen $X_1^c, X_2^c \ldots X_r^c$ wirklich eine r gliedrige Gruppe erzeugen. Hierin liegt der zweite Fundamentalsatz der Lie'schen Gruppentheorie wie wir uns hier ausdrücken wollen, ausgesprochen.

Doch müssen wir den Beweis dieses Umkehrsatzes uns allerdings noch für später aufbewahren, einstweilen begnügen wir uns damit, dass unsere Relationen nothwendig sind, damit eine r-gliedrige endliche Gruppe vorliegt.

Wir können jetzt dazu übergehen, einen Teil der speciellen Untersuchungen von Lie kennen zu lernen. Die allgemeine Aufgabe der Gruppentheorie wird die sein: alle Gruppen aufzuzählen. Insbesondere mag man dieses verlangen, wenn die Zahl der Veränderlichen gegeben ist ($n = 1, 2, 3 \ldots$) oder aber zweitens, wenn die Parameterzahl gegeben ist ($r = 1, 2, 3 \ldots$), oder endlich wenn irgendwelche besondere Eigenschaften der Gruppe gegeben sind, die uns interessieren mögen. Natürlich ist diese Aufgabe nicht so zu verstehen, als sei es möglich, diese Aufzählungen

zu vollenden; es wird darauf ankommen, die jedesmal niedrigsten Fälle zu erledigen und von da aus allgemeine Ansätze zu gewinnen. Lie hat in dieser Hinsicht das gewiss sehr überraschende merkwürdige Resultat gefunden, dass in allen genannten Fällen eine begrenzte Zahl getrennter Gruppen-Typen vorhanden ist. Man sollte doch anfangs meinen, dass die Gesammtheit der continuirlichen Gruppen selber ein Continuum bilden würde, ein „Gruppenraum" könnte man sagen, doch liegen die Individuen hier im Gegentheil in bestimmten Klassen getrennt.

Die ersten Mittheilungen Lie's über diesen Gegenstand finden sich in den Göttinger Nachrichten vom Dezember 1874; dann folgen in dem norwegischen Archiv Bd. 1, 3 und 4 (1876-79) die ersten ausführlichen Darstellungen, endlich findet sich in den Annalen 16 (1879-80) die erste grössere, zusammenfassende Abhandlung: „Theorie der Transformationsgruppen". Gerade das Studium dieser letzteren Arbeit ist als eine gute Einführung in die ganze Theorie zu empfehlen, mehr noch als das Buch von Lie-Engel, welches zu sehr abstract geschrieben ist.

Beginnen wir nun mit der Bestimmung aller möglichen endlichen Gruppen für $n = 1$. Wir wollen uns zunächst einmal alle continuirlichen projectiven Transformationsgruppen einer Veränderlichen aufschreiben, die uns bekannt sind, oder von deren Vorhandensein man sich sofort übergangen kann:

1.) $x' = x + a$

2) $x' = (1 + a) \cdot x$

3) $x' = (1 + a) x + b$

4) $x' = \frac{(1 + a) x + b}{cx + (1 + d}$. Diese letzte Formel stellt die bereits behandelte allgemeine projective Gruppe dar; die erste und zweite Gruppe haben im übrigen je einen Parameter, die dritte Gruppe hat 2, die vierte Gruppe 3 Parameter. Die zugehörigen infinitesimalen Transformationen werden in ihren Symbolen, wie folgt, gegeben:

Ad. 1.) $X^c = \frac{df}{dx}$

Ad. 2.) $X^c = x \frac{df}{dx}$,

Ad. 3.) $X_0^c = \frac{df}{dx}$, $X_1^c = x \frac{df}{dx}$.

Ad. 4.) $X_0^c = \frac{df}{dx}$, $X_1^c = x \frac{df}{dx}$, $X_2^c = x^2 \frac{df}{dx}$

d.h. wir bekommen für 1 und 2. eine, für 3 zwei, für 4 drei infinitesimale Transformationen, wie es sein muss. Die letzteren insbesondere haben wir bereits am Anfang der Stunde aufzustellen Gelegenheit gehabt. Diesen Angaben wollen wir sogleich noch das System der Klammerausdrücke, die sich bilden lassen, hinzufügen: Die Gruppen 1. u. 2 gestatten natürlich keine Klammerausdrücke. Dagegen gilt:

$$\underline{\text{ad 3.}}\ (X_0', X_1') = \frac{d}{dx}\left(x\frac{df}{dx}\right) - x\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

$$= \frac{df}{dx}$$

oder:

$$(X_0', X_1') = X_0'$$

Analog haben die Klammerausdrücke für den Fall der vierten Gruppe die Gestalt:

$$\underline{\text{ad. 4}}\ (X_0', X_1') = X_0'$$

$$(X_0', X_2') = 2X_1'$$

$$(X_1', X_2') = X_2'$$

In dem Vorstehenden haben wir natürlichers

Beispiele für Gruppen von einer Variabeln kennen gelernt. Es gilt nun, die continuirlichen Gruppen einer Variabeln allgemein zu betrachten. Wir behaupten betreffs dieser Untersuchung:

1.) Es giebt keine anderen continuirlichen projectiven Transformationsgruppen bei einer Veränderlichen als diese 4. Dieser Satz ist ja sehr einleuchtend, doch werden wir hernach einen genauen Beweis geben.

Wir haben ferner doch solche Gruppen, welche durch Punktbransformationen in einander übergehen, ähnliche Gruppen genannt. Da ist dann leicht zu sehen, dass die erste und die zweite der genannten projectiven Gruppen einander ähnlich sind. Denn gehen wir von

2) $x' = (1+a)\cdot x$ zu der logarithmirten Gleichung über

2') $\log x' = \log x + \log(1+a)$ und substituiren $\log x' \parallel \xi$, $\log x \parallel \xi'$, und $\log(1+a) \parallel a'$, so geht diese letzte Gleichung sofort in die Form der Transformationsgleichung der ersten Gruppe über.

Vom Standpunkte aller Punktbransformationen aus, wo wir gleichmässig über beliebige transcendente Funktionen verfügen ergeben sich daher die Typen 1, 2 als ähnliche Typen, so dass

uns die projectiven Gruppen insgesammt nur 3 Typen repräsentiren.

Nun besteht:

2) der allgemeine Satz, den Lie im Jahre 1874 entdeckt hat, dass vom Standpunkt aller Punkttransformationen aus, wo ähnliche Gruppen als gleichwerthig gelten, überhaupt keine anderen endlichen Transformationsgruppen einer Veränderlichen existiren als diejenigen, die im Beispiel durch 1, 3, 4 gegeben sind.

Wir fügen noch sogleich hinzu: Die Parameteranzahl einer endlichen Transformationsgruppe einer Veränderlichen kann demnach nur 1, 2 oder 3 sein, und zwar kommt je nachdem sie 1, 2 oder 3 ist, jedesmal ein bestimmter der genannten 3 Typen in Betracht.

Für diesen letzten Satz gibt Fr. 16 VI 93. es nun den Beweis zu erbringen: Gesetzt wir hätten eine r-gliedrige Gruppe mit folgenden r infinitesimalen Transformationen vorliegen:

$$X_0^c = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \frac{df}{dx}$$
$$X_1^c = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) \frac{df}{dx}$$
$$\vdots$$
$$X_{r-1}^c = (m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \dots) \frac{df}{dx}.$$ Wir

die nothwendige Bedingung enthalten, damit irgend welche infinitesimale Transformationen $X_1^c, X_2^c \ldots X_r^c$ wirklich eine r gliedrige Gruppe erzeugen. Hierin liegt der zweite Fundamentalsatz der Lie'schen Gruppentheorie wie wir uns hier ausdrücken wollen, ausgesprochen.

Doch müssen wir den Beweis dieses Umkehrsatzes uns allerdings noch für später aufbewahren. einstweilen begnügen wir uns damit, daß unsere Relationen nothwendig sind, damit eine r-gliedrige endliche Gruppe vorliegt.

Wir können jetzt dazu übergehen, einen Teil der speciellen Untersuchungen von Lie kennen zu lernen. Die allgemeine Aufgabe der Gruppentheorie wird die sein: alle Gruppen aufzuzählen. Insbesondere mag man dieses verlangen, wenn die Zahl der Veränderlichen gegeben ist ($n = 1, 2, 3 \ldots$) oder aber zweitens, wenn die Parameterzahl gegeben ist ($r = 1, 2, 3 \ldots$), oder endlich wenn irgendwelche besondere Eigenschaften der Gruppe gegeben sind, die uns interessieren mögen. Natürlich ist diese Aufgabe nicht so zu verstehen, als sei es möglich, diese Aufzählungen

zu vollenden; es wird darauf ankommen, die jedesmal niedrigsten Fälle zu erledigen und von da aus allgemeine Ansätze zu gewinnen. Lie hat in dieser Hinsicht das gewiss sehr überraschende merkwürdige Resultat gefunden, dass in allen genannten Fällen eine begrenzte Zahl gebrannter Gruppen-Typen vorhanden ist. Man sollte doch anfangs meinen, dass die Gesammtheit der continuirlichen Gruppen selber ein Continuum bilden würde, ein „Gruppenraum" könnte man sagen, doch liegen die Individuen hier im Gegentheil in bestimmten Klassen getrennt.

Die ersten Mittheilungen Lie's über diesen Gegenstand finden sich in den Göttinger Nachrichten vom Dezember 1874; dann folgen in dem norwegischen Archiv Bd. 1, 3 und 4 (1876-79) die ersten ausführlichen Darstellungen, endlich findet sich in den Annalen 16 (1879-80) die erste grössere, zusammenfassende Abhandlung: „Theorie der Transformationsgruppen". Gerade das Studium dieser letzteren Arbeit ist als eine gute Einführung in die ganze Theorie zu empfehlen, mehr noch als das Buch von Lie-Engel, welches zu sehr abstract geschrieben ist.

Beginnen wir nun mit der Bestimmung aller möglichen endlichen Gruppen für $n = 1$. Wir wollen uns zunächst einmal alle continuierlichen projectiven Transformationsgruppen einer Veränderlichen aufschreiben, die uns bekannt sind, oder von deren Vorhandensein man sich sofort überzeugen kann:

1.) $x' = x + a$

2.) $x' = (1 + a) \cdot x$

3.) $x' = (1 + a) x + b$

4.) $x' = \dfrac{(1 + a) x + b}{c x + (1 + d}$. Diese letzte Formel stellt die bereits behandelte allgemeine projective Gruppe dar; die erste und zweite Gruppe haben im übrigen je einen Parameter, die dritte Gruppe hat 2, die vierte Gruppe 3 Parameter. Die zugehörigen infinitesimalen Transformationen werden in ihren Symbolen, wie folgt, gegeben:

Ad. 1.) $X^c = \dfrac{df}{dx}$

Ad. 2.) $X^c = x \dfrac{df}{dx}$,

Ad. 3.) $X_0^c = \dfrac{df}{dx}$, $X_1^c = x \dfrac{df}{dx}$.

Ad. 4.) $X_0^c = \dfrac{df}{dx}$, $X_1^c = x \dfrac{df}{dx}$, $X_2^c = x^2 \dfrac{df}{dx}$

d.h. wir bekommen für 1 und 2. eine, für 3 zwei, für 4 drei infinitesimale Transformationen, wie es sein muss. Die letzteren insbesondere haben wir bereits am Anfang der Stunde aufzustellen Gelegenheit gehabt. Diesen Angaben wollen wir sogleich noch das System der Klammerausdrücke, die sich bilden lassen, hinzufügen: Die Gruppen 1. u. 2 gestatten natürlich keine Klammerausdrücke. Dagegen gilt:

$$\underline{\text{ad 3.}}\ (X_0', X_1') = \frac{d}{dx}\left(x\frac{df}{dx}\right) - x\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

$$= \frac{df}{dx}$$

oder:

$$(X_0', X_1') = X_0'$$

Analog haben die Klammerausdrücke für den Fall der vierten Gruppe die Gestalt:

$$\underline{\text{ad. 4}}\ (X_0', X_1') = X_0'$$

$$(X_0', X_2') = 2X_1'$$

$$(X_1', X_2') = X_2'$$

In den vorstehenden haben wir natürlichers

Beispiele für Gruppen von einer Variabeln kennen gelernt. Es gilt nun, die continuirlichen Gruppen einer Variabeln allgemein zu betrachten. Wir behaupten betreffs dieser Untersuchung:

1.) Es giebt keine anderen continuirlichen projectiven Transformationsgruppen bei einer Veränderlichen als diese 4. Dieser Satz ist ja sehr einleuchtend, doch werden wir hernach einen genauen Beweis geben.

Wir haben ferner doch solche Gruppen, welche durch Punktbransformationen in einander übergehen, ähnliche Gruppen genannt. Da ist dann leicht zu sehen, dass die erste und die zweite der genannten projectiven Gruppen einander ähnlich sind. Denn gehen wir von

2) $x' = (1+a)\cdot x$ zu der logarithmischen Gleichung über

2') $\log x' = \log x + \log(1+a)$ und substituiren $\log x' \| \xi$, $\log x \| \xi'$, und $\log(1+a) \| a'$, so geht diese letzte Gleichung sofort in die Form der Transformationsgleichung der ersten Gruppe über.

Vom Standpunkte aller Punktbransformationen aus, wo wir gleichmässig über beliebige transzendente Funktionen verfügen ergeben sich daher die Typen 1, 2 als ähnliche Typen, so dass

uns die projectiven Gruppen insgesammt nur 3 Typen repräsentiren.

Nun besteht:

2) der allgemeine Satz, den Sie im Jahre 1874 entdeckt hat, <u>dass vom Standpunkt aller Punkttransformationen aus, wo ähnliche Gruppen als gleichwerthig gelten, überhaupt keine anderen endlichen Transformationsgruppen einer Veränderlichen existiren als diejenigen, die im Beispiel durch 1, 3, 4 gegeben sind.</u>

Wir fügen noch sogleich hinzu: <u>Die Parameteranzahl einer endlichen Transformationsgruppe einer Veränderlichen kann demnach nur 1, 2 oder 3 sein,</u> und zwar kommt je nachdem sie 1, 2 oder 3 ist, jedesmal ein bestimmter der genannten 3 Typen in Betracht.

Für diesen letzten Satz gilt [Fr. 16 VI 93. es nun den Beweis zu erbringen: Gesetzt wir hätten eine r-gliedrige Gruppe mit folgenden r infinitesimalen Transformationen vorliegen:

$$X_0^c = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \frac{df}{dx}$$
$$X_1^c = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) \frac{df}{dx}$$
$$\vdots$$
$$X_{r-1}^c = (m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \dots) \frac{df}{dx}.$$ Wir

haben uns hier die Coefficienten von $\frac{df}{dx}$ sogleich in der Umgebung der Stellstelle nach Potenzen von x entwickelt gedacht. Indem wir solchergestalt den Coordinatenanfangspunkt bevorzugen, gerathen die infinitesimalen Transformationen überhaupt in solche 0ter Ordnung, erster Ordnung u. s. w. fort, d. h. in solche, in welchen der erste Coefficient der Reihenentwicklung nicht verschwindet, in solche, in welchen der Coefficient von x^0 zwar verschwindet, aber nicht der von x^1 u. s. w., und hier sind es dann nur die Transformationen 0ter Ordnung, die den Anfangspunkt selbst verschieben, die andern lassen den Anfangspunkt fest. Nachdem wir dies verabredet haben, sage ich, dass unter denjenigen infinitesimalen Transformationen mindestens eine von der nullten Ordnung ist, insofern der Coordinatenanfangspunkt willkürlich gewählt sein soll. Denn wären sämmtliche Transformationen wenigstens von der ersten Ordnung, so würde ja bei jedem solchen der Anfangspunkt festbleiben, was gewiss auf eine ganz specielle Auswahl des Coordinatenanfangspunktes schliessen lassen würde.

Eine solche Transformation nullter Ordnung wollen wir jetzt als erste X_1 gewählt annehmen,

so dass sicher $a_0 \geq 0$ ist. Wir wollen nun durch a_0 den Coefficienten von $\frac{df}{dx}$ dividirt denken, so dass die neue Potenzentwickelung jetzt mit 1 beginnt, mit anderen Worten wir setzen voraus, dass K_0^c bereits diese Form besitzen möge:

$$K_0^c = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \cdot \frac{df}{dx}.$$

Jetzt gehen wir dazu über die folgenden Transformationen $K_1^c, K_2^c \dots$ zweckmässig zu vereinfachen. Wir können doch z. B. an Stelle von K_1^c irgendeine lineare Combination von K_0^c und K_1^c setzen; als solche wählen wir $K_1^c - b_0 K_0^c$. Dies kommt dann darauf hinaus, dass in der zweiten Transformation, die wir der Einfachheit halber wieder K_1^c nennen wollen, das Glied b_0 fortfällt. Gleicherweise denken wir mit den übrigen Transformationen $K_2^c, K_3^c \dots K_r^c$ verfahren, mit anderen Worten: wir dürfen, nachdem wir K_0^c einmal in vorabredeter Weise gewählt haben, alle anderen infinitesimalen Transformationen von vornherein von höherer als der nullten Ordnung annehmen.

Nun wiederholen wir dieselbe Ueberlegung für diese jetzigen $r-1$ Transformationen höheren Ordnung. Von ihnen ist mindestens eine von <u>ersten</u> Ordnung, da sonst wieder der Anfangs-

punkt sehr singulär gewählt sein würde, eine solche Transformation wollen wir sogleich wieder als mit X_1' bezeichnet annehmen, was darauf hinauskommt, dass $b_1 \geq 0$ sein wird. Wir denken ferner wieder durch b_1 dividirt, so dass X_1', wie folgt lauten möge:

$$X_1' = (x + b_2 x^2 + \dots) \cdot \frac{df}{dx}.$$

In derselben Weise gehen wir jetzt weiter. Unbeschadet der Allgemeinheit dürfen wir X_2' und die folgenden infinitesimalen Transformationen von höherer Ordnung als der ersten annehmen, von ihnen ist andererseits wieder mindestens eine von der zweiten Ordnung, diese sei X_3' genannt, und in ihr überdies der Coefficient c_2 durch Division fortgeschafft u. s. f. Wir dürfen demgemäss jetzt annehmen, ohne der Allgemeinheit der Betrachtung Abbruch zu thun, dass die Reihenentwicklung in X_0' mit 1, die in X_1' mit x, die in X_ν' mit x^ν beginnt, wie es das folgende Schema zeigt:

$$X_0' = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \cdot \frac{df}{dx},$$

$$\mathcal{H}_1 = \left(x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots\ldots \right) \frac{df}{dx}$$

$$\mathcal{H}_2 = \left(x^2 + c_3 x^3 + \ldots\ldots \right) \frac{df}{dx}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{H}_{r-1} = \left(x^{r-1} + \ldots\ldots \right) \frac{df}{dx}$$

Hiermit ist die Präparation unserer Formelgruppe, wie wir dies nennen könnten, zu Ende.

An diese präparirten Formeln für $\mathcal{H}_\nu$ knüpfen wir nun an, um uns die Klammerausdrücke zu bilden.

Aus $\mathcal{H}_i = (x^i + \ldots) \frac{df}{dx}$ und

$$\mathcal{H}_k = (x^k + \ldots) \frac{df}{dx} \text{ für } i \gtrless k$$

folgt, wenn wir nur die niedrigsten Glieder der Potenzentwickelungen hinschreiben:

$$(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_k) = \frac{x_i \, d\left(x^k \frac{df}{dx}\right)}{dx} - x^k \cdot \frac{d\left(x^i \frac{df}{dx}\right)}{dx},$$

$$(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_k) = \left[(k-i) \cdot x^{i+k-1} + \ldots \right] \cdot \frac{df}{dx}.$$

Indem der Coefficient $k-1$ sicher von Null ver-

schieden ist, gewinnen wir den Satz: Combinieren wir unsere Transformation i^{ter} Ordnung mit unserer Transformation k^{ter} Ordnung, so entsteht eine neue Transformation von der $(i+k-1)^{sten}$ Ordnung. Diese Transformation muss also gleichfalls in unserer Gruppe enthalten sein und somit sich als lineare Verbindung der $X_0^r X_1^r \dots X_{r-1}^r$ darstellen lassen. – Bilden wir nun jetzt den Klammerausdruck für unsere beiden letzten Transformationen, d.h. für X_{r-2}^r und X_{r-1}^r, so werden wir finden, dass die Potenzentwicklung des Coefficienten in (X_{r-2}^r, X_{r-1}^r) mit der Potenz x^{2r-4} beginnt, die den Coefficienten 1 besitzt. Diese neue Transformation soll nun eine lineare Verbindung der gegebenen sein, d.h. es muss die Gleichung gelten:

$$(X_{r-2}^r, X_{r-1}^r) = c_0 X_0^r + c_1 X_1^r + \dots + c_{r-1} X_{r-1}^r.$$

hier sollen also auf der rechten Seite sich alle Glieder bis zu x^{2r-4} fortheben und dieses selbst mit dem Coefficienten +1 antreten. Daraus folgt ersichtlich dass notwendig $2r-4 \leqq r-1$ oder $\leqq 3$ sein muss. Und damit haben wir das merkwürdige Theorem von der Begrängung der Parameterzahl: Die Zahl r der Parameter in einer end.

lichen Transformationsgruppe einer veränderlichen kann nicht größer als 3 sein.

Wenn wir jetzt weiter alle Gruppen aufzählen wollen, die es giebt, so werden wir uns auf Grund des letzten Satzes auf eingliedrige, zweigliedrige und dreigliedrige Gruppen zu beschränken haben. Betrachten wir zunächst den Fall, daß eine eingliedrige Gruppe vorliegt, d.h. auch nur eine ergengende infinitesimale Transformation, die wir in der Gestalt gegeben annehmen: $X_0(f) = \varphi(x)\frac{df}{dx}$. Ich behaupte, die zugehörige endliche Gruppe kann man immer durch eine Punktransformation in die Gestalt setzen: $x' = x + t$. Diese Behauptung erweist sich nur als spezieller Fall der früheren Aussage, nach welcher jede eingliedrige Gruppe bei beliebig vielen Veränderlichen mit einer Translationsgruppe ähnlich ist. Im übrigen wollen wir mit wenigen Zeilen den damaligen Beweis hier wiederholen. Es wird der Zuwachs von x vermöge unserer infinitesimalen Transformation gleich: $\delta x = \varphi(x)\,\delta t$. Wir schreiben nun $\frac{\delta x}{\varphi(x)} = \delta\xi$, d.h. $\xi = \int \frac{dx}{\varphi(x)}$, dann wird $\delta\xi = \delta t$ oder:

$\xi' = \xi + t$. Solcherweise erhält man sofort die Gestalt einer Translationsgruppe.

Wir wenden uns nun zu dem Fall <u>der zweigliedrigen Gruppe</u>, den wir gleich so präpariert denken, daß wir die Reihenentwickelungen haben:

$$X_0^c = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \frac{df}{dx},$$

$$X_1^c = (x + b_2 x^2 + \dots\dots) \frac{df}{dx}.$$

Der Klammerausdruck $(X_0^c X_1^c)$ wird dann selbst auch eine Reihenentwicklung geben, die mit 1 beginnt. Dies besagt, daß: $(X_0^c, X_1^c) = X_0^c + \lambda X_1^c$ sein muß, unter λ eine unbekannte Constante verstanden. Wenn wir dann von $X_0^c + \lambda X_1^c$ und X_1 den Klammerausdruck bilden, so finden wir, daß gerade wieder $X_0^c + \lambda X_1^c$ herauskommt, d.h. <u>Es giebt eine Transformation $X_0^c + \lambda X_1^c$ nullter Ordnung, welche mit X_1^c in Klammerausdruck verbunden sich selbst reproducirt</u>.

Nun wählen wir natürlich (im Hinblick auf die zweigliedrige projective Gruppe, die uns als Normalform vorschwebt) diese Trans-

formation $X_0^c + \lambda X_1^c$ an Stelle der ursprüngli-
chen X_0^c als ergehende Operation, und wollen
sie dann gleich wieder mit X_0^c bezeichnet annch-
men. Dies besagt, dass wir unbeschadet der All-
gemeinheit das X_0^c und X_1 immer so annehmen
können, dass $(X_0^c X_1^c) = X_0^c$ wird. Nun haben wir
gleich gewonnenes Spiel. Zunächst sagen wir jetzt,
dass wir doch offenbar durch geeignete Koordina-
tentransformationen dem X_0^c die Gestalt geben
können: $X_0^c = 1 \cdot \frac{df}{dx}$, wie wir das soeben im Falle
der eingliedrigen Gruppen angeführt haben.

Durch diese Substitution wird aber die Eigen-
schaft dass $(X_0^c X_1^c) = X_0^c$ ist, nicht geändert*). Es
sei nun $X_1^c = y(x) \frac{df}{dx}$. Rechnen wir den bezügli-
chen Klammerausdruck $(X_0^c X_1^c)$ aus, so finden
wir derselben gleich $y'(x) \frac{df}{dx}$. Da nun $(X_0^c X_1^c) =$
$= X_0^c$ sein soll, so bekommen wir die Gleichung
$y'(x) = 1$, d.h. $y = x + C$. Die Constante C müssen
wir hier aber fortlassen, da ja X_1^c eine Trans-
formation ersten Ordnung sein sollte. Also
$y(x) = x$.

---

*) insofern $(X_i^c X_k^c)$ bei beliebigen Punkttransformationen in-
variant ist, wie man sofort nachrechnet.

Wir haben hiernach allgemein für jede 2gliedrige Gruppe wirklich die projective Normalform hergestellt:

$$\mathfrak{X}_0 = 1 \cdot \frac{df}{dx},$$

$$\mathfrak{X}_1 = x \cdot \frac{df}{dx}.$$

Nun wollen wir schließlich auch die analogen Betrachtungen für die dreigliedrige Gruppe durchführen: Die Untersuchung gliedert sich genau in derselben Weise, wie soeben, nur ist sie natürlicherweise ein wenig complicirter.

Wir gehen aus von den 3 infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{X}_0 = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots) \frac{df}{dx},$$

$$\mathfrak{X}_1 = (\quad x + b_2 x^2 + \ldots\ldots) \frac{df}{dx},$$

$$\mathfrak{X}_2 = (\qquad x^2 + \ldots\ldots\ldots) \frac{df}{dx},$$

Wir müßen nun sehen, daß wir gerade das Schema 4 der vorigen Stunde aus den vorstehenden Transformationen ableiten. Zu dem Zweck bilden wir zunächst die Klammerausdrücke

$(X_0' X_1')$, $(X_0' X_2')$ u. $(X_1' X_2')$ und haben dann durch Einführung passender Verbindungen der X_0', X_1', X_2' es herbeizuführen, daß $(X_0' X_1') = X_0'$, $(X_0' X_2') = 2 X_1'$, $(X_1' X_2') = X_2'$ werden.

Haben wir diese „Zusammensetzung" der Gruppe erreicht, dann machen wir eine Coordinatentransformation, die uns wirklich die infinitesimalen Transformationen der projectiven Gruppe liefert. Im einzelnen lassen sich diese einzelnen Schritte wie folgt ausführen:

Zunächst werden wir allgemein setzen:

$$(X_1' X_2') = \lambda_0 X_0' + \lambda_1 X_1' + \lambda_2 X_2',$$

$$(X_2' X_0') = \mu_0 X_0' + \mu_1 X_1' + \mu_2 X_2',$$

$$(X_0' X_1') = \nu_0 X_0' + \nu_1 X_1' + \nu_2 X_2'.$$

Nun werden wir die Jacobische Identität heranziehen, um zwischen den auf der rechten Seite stehenden Constanten, welche wir früher wohl mit c_{ikl} bezeichnet haben, Beziehungen zu finden:

Es kommt: $\lambda_0 \nu_1 - \lambda_1 \nu_0 = \lambda_0 \mu_2 - \lambda_2 \mu_0$,

$\mu_1 \nu_0 - \mu_0 \nu_1 = \mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1$,

$\nu_2 \lambda_1 - \nu_1 \lambda_2 = \nu_2 \mu_0 - \nu_0 \mu_2$. Obige

Gleichungen stellen das allgemeinste Zusammensetzungsschema einer 3 gliedrigen Gruppe dar.

Da nun aber unsere Transformationen X_0, X_1, X_2 entsprechend von der 0., 1. oder 2. Ordnung sind, so wird sich dieselbe bei uns so vereinfachen, daß wir schreiben können:

$$(X_1, X_2) = X_2$$

$$(X_2 X_0) = -2X_1 + u_2 X_2$$

$$(X_0 X_1) = X_0 + v_1 X_1 + v_2 X_2$$

Auf Grund der Jacobischen Identitätsgleichungen folgt dann weiter, daß $u_2 = v_1$ ist; dann sind die 3 Coefficientengleichungen sämmtlich identisch erfüllt. Wir erhalten daher das Schema:

$$(X_1, X_2) = X_2$$

$$(X_2 X_0) = -2X_1 + v_1 X_2$$

$$(X_0 X_1) = X_0 + v_1 X_1 + v_2 X_2.$$

Nun machen wir die folgende einfache Substitution: $X_0' = X_0 + v_1 X_1 + \frac{v_2}{2} X_2$ an Stelle von X_0 selbst; dann

bekommen wir für die neuen Klammerausdrücke die Formeln:

$$(X_1^c\, X_2^c) = X_2^c$$

$$(X_2^c\, X_0^{c\prime}) = -2\, X_1^c$$

$$(X_0^{c\prime}\, X_1^c) = X_0^c + v_1 X_1^c + \frac{v_2}{2} X_2^c = X_0^c\ !$$

<u>d.h. unsere Zusammensetzungsformeln haben genau die Gestalt angenommen, welche wir bei der dreigliedrigen projectiven Gruppe kennen.</u>

Nichts ist leichter, als nunmehr durch einen Wechsel der Variabelen wirklich zur dreigliedrigen projectiven Gruppe übergehen.

Sophus [II 93]. Wir werden nämlich jetzt wieder eine solche Coordinatentransformation ausführen, daß $X_0^c = \frac{df}{dx}$ sind, d.h. daß X_0^c als eine einfache Translation erscheint, wie wir es bereits im Beispiel der ein- und zweigliedrigen Gruppe analog gethan haben. Dann folgt aus $(X_0^c\, X_1^c) = X_0^c$ und $(X_0^c\, X_2^c) = 2\, X_1^c$ daß:

$$X_1^c = x \frac{df}{dx} \text{ und}$$

$$X_2^c = x^2 \frac{df}{dx} \text{ wird. Das}$$

Merkwürdige ist nur, sozusagen, daß hiermit zugleich auch die Relation $(X_0 X_2) = 2 X_1$ erfüllt ist.

Hiermit haben wir nun folgerichtig bewiesen, daß es vom Standpunkte aller Punkttransformationen für die M_1 nur die angeführten 3 endlichen continuirlichen Gruppen giebt, deren allgemeinste Form durch die Substitution $x' = \frac{(1+a)x+b}{cx+(1+d)}$ gegeben wird. Demgemäß werden wir bei Zugrundelegung einer endlichen continuirlichen Gruppe <u>im eindimensionalen</u> Gebiete auch keine andere Geometrie erhalten <u>als die projective Geometrie</u>, so daß die letztere hier eine gewisse absolute Bedeutung beanspruchen kann.

Wir haben nun schon gesagt, daß es vom Standpunkte aller projectiven Punktransformationen überhaupt 4 projective Gruppen der eindimensionalen Mannigfaltigkeit giebt, während vom Standpunkt <u>aller</u> Punktransformationen es sogar nur 3 Gruppen giebt. Doch auf Grund des besonderen Interesses, welches es für sich hat alle projectiven Gruppen der M_1 zu kennen, werden

wir jetzt den Beweis dieser Behauptung erbringen haben. Die 4 Gruppen werden durch die Formeln gegeben:

1) $x' = x + b$, 2) $x' = (1+a).x$, 3) $x' = ax+b$, 4) $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$.

von ihnen sind die Gruppen 1 u. 2 eingliedrig, 3 zweigliedrig, 4 dagegen dreigliedrig.

Beweis: Wenn wir eine eingige lineare Substitution haben, die wir in der homogenen Form voraussetzen wollen:

$$\begin{cases} x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2' = \gamma x_1 + \delta x_2 \end{cases}$$

, so hängen die festbleibenden Punkte der Mannigfaltigkeit von der Determinantengleichung: $\begin{vmatrix} \alpha - \varrho & \beta \\ \gamma & \delta - \varrho \end{vmatrix} = 0$ ab.

Hat diese getrennte Wurzeln für ϱ, so bleiben zwei Punkte des Gebildes fest; hat sie eine Doppelwurzel, so bleibt <u>ein</u> Punkt des Gebildes fest. Diesen letzten Fall pflegt man in der Funktionentheorie ja als <u>parabolischen</u> Fall zu bezeichnen, während der Fall zweier getrennter Fixpunkte, je nachdem die Bezeichnung als <u>loxodromische, elliptische oder hyperbolische</u> Substitution bekommt.

Bleiben nun 2 Punkte fest, so denken wir

uns dieselben durch geeignete lineare Transformationen in die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ verlegt. Die vorliegende Substitution geht dann über in die folgende: $\underline{x' = (1+a)\,x}$. Bleibt aber nur ein Punkt fest, so verlegen wir denselben nach $x = \infty$; dann wird die eingelne Substitution notwendig die Gestalt bekommen: $\underline{x' = x + \beta}$. Diese kanonischen Formen der eingelnen linearen Substitution gelten nun insbesondere auch für die ∞ kleinen Transformationen. Die eingelne ∞ kleine Transformation, die wir als ergeugende Operation unserer Gruppe ansehen, wird daher entweder: $x' = (1 + da)\,x$ oder $x' = x + db$ heissen müssen. Indem aus ihnen sich dann die endlichen Gruppen $x' = (1+a)\,x$ und $x' = x + b$ aufbauen ist bewiesen, dass es keine anderen eingliedrigen projectiven Gruppen giebt als diese beiden.

Wir wollen nun weiter sehen, wie wir eine <u>2gliedrige Gruppe</u> allgemein aufbauen. Diese wird zwei ergeugende infinitesimale Transformationen haben (X_1, f) und (X_2, f). Wir haben bereits gesehen, dass man dieselben immer so auswählen kann, dass $(X_1, X_2) = X_1$ ist. Nun wollen wir eine solche lineare Coordinatentransformation

ausgeführt denken, dass X_0' in seine kanonischen Formen übergeht, also entweder $X_0 = \frac{df}{dx}$ oder aber

$$X_0 = x\frac{df}{da}.$$

Was wird dann jedesmal aus der Transformation X_1' werden? Wir können offenbar immer setzen: $X_1'(f) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\frac{df}{dx}$, denn dies ist der allgemeine Typus der ∞^3 kleinen linearen Transformation. Nun muss aber $X_1(f)$ die Beziehung $(X_0' X_1') = X_0'$ befriedigen. Machen wir dann die erste Annahme $X_0 = \frac{df}{dx}$, so werden wir einfach bekommen:

$$\frac{d(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)}{dx} = 1 \text{ oder}$$

$c_1 + 2c_2 x = 1$, d.h. $c_1 = 1$ u. $c_2 = 0$. Wir erhalten demnach als Lösung: $X_1' = (c_0 + x)\frac{df}{dx}$ oder indem wir noch das Glied c_0 fortlassen, da wir ja event. $c_0 \frac{df}{dx} = c_0 X_0$ subtrahieren können,

$X_1' = x\frac{df}{dx}$. $X_0' = \frac{df}{dx}$ u. $X_2' = x\frac{df}{dx}$ führt uns aber zu den endlichen Transformationen: $x' =$

$= (1+a)\,x + b$, d.h. genau zu den 2gliedrigen Gruppen, die wir bereits kennen.

Dagegen die zweite Annahme $X_0 = x\frac{df}{dx}$ verlangt, wenn wir wieder $X_1 = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\frac{df}{dx}$ setzen und den Klammerausdruck $(X_0 X_1)$ berechnen, dass:

$$x\cdot d\left[(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\frac{df}{dx}\right] - (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\frac{d(x\,df)}{dx} =$$

$$= x\frac{df}{dx} \quad \text{oder} \quad -c_0\frac{df}{dx} + c_2 x^2\frac{df}{dx} = x\frac{df}{dx}$$

d.h. $c_2 x^2 - c_0 = x$ sein müsste, was unmöglich ist. Die zweite Möglichkeit, dass $X_0 = x\frac{df}{dx}$ wäre, führt daher zu einem Widerspruch und existirt folglich nicht. Es giebt also nur den einen Typus einer 3gliedrigen continuirlichen projectiven Gruppe einer Veränderlichen vom projectiven Standpunkte aus.

Dass es endlich keine andere eingliedrige Gruppe giebt als den einen allgemeinen Typus, ist an und für sich klar. Hiermit haben wir dann auch den Fall speciell der projectiven Gruppen einer Veränderlichen absolvirt.

Wir wenden uns nun zu dem Fall $n = 2$, den Lie in Ann. 16 behandelt hat, also zur Be-

<u>stimmung aller Transformationsgruppen der Ebene</u>, doch können wir jetzt nicht mehr wie soeben alle Sätze mit vollständigen Beweisen vortragen, da zu viel Fallunterscheidungen in Frage kommen. Wir müssen uns auf ein Referat beschränken, welches die einzelnen Hauptpunkte andeutet. Wir nennen die beiden Variabeln x u. y und denken sie am einfachsten als Coordinaten in der Ebene.

1.) Wir denken uns wieder einen beliebigen Punkt als Anfangspunkt für $x = 0$ u. $y = 0$ ausgewählt und in der Nähe desselben Reihenentwickelungen der verschiedenen $X(f)$ gegeben. Dann werden wir wieder infinitesimale Transformationen 0ter, 1ter, 2ter .... u. s. w. Ordnung unterscheiden, je nachdem die Reihenentwicklung mit Gliedern der 0ten, 1ten, 2ten ... Potenz der Variabeln x und y beginnt. Z. B. bilden $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df}{dy}$ selbst die einfachsten Beispiele einer Transformation 0ter Ordnung; der Zuwachs der beiden Coordinaten wird entsprechend durch: $\delta x = \delta t$, $\delta y = 0$ resp. $\delta x = 0$, $\delta y = \delta t$ gegeben, so dass allgemein eine Funktion f um $\frac{df}{dx} \cdot \delta t$ resp. $\frac{df}{dy} \delta t$ zunimmt.

Transformationen erster Ordnung sind z. B. $x\frac{df}{dx}$, $y\frac{df}{dx}$, $x\frac{df}{dy}$, $y\frac{df}{dy}$, Transformationen 2ter Ordnung: $x^2\frac{df}{dx}$, $xy\frac{df}{dx}$ u. s. w.

2) Das zweite Moment ist natürlich, dass man die Klammerausdrücke heranzieht, für welche dann die Relationen $(X_i X_k) = \sum c_{ik\delta} X_\delta$ zu gelten haben.

3) Drittens macht Lie von einem geometrischen Hülfsmittel Gebrauch; er redet nämlich nicht nur von Punktcoordinaten der Ebene, sondern zieht auch die Linienelemente heran und sieht zu, wie diese transformirt werden. Unter einem Linienelement in der Ebene haben wir doch das Verbindungsstück der Punkte x, y und $x + dx$, $y + dx$ seiner Lage und Richtung nach zu verstehen; die Coordinaten der einzelnen Linienelemente sind demnach x, y und $\frac{dy}{dx} = y'$.

Nun ist die Frage, wenn irgend eine infinitesimale Punkttransformation gegeben ist: $X(f) = \xi \cdot \frac{df}{dx} + \eta \cdot \frac{df}{dy}$, woselbst ξ u. η irgendwelche Function von x und y sind, wie wirkt diese

auf die Linienelemente der Ebene? Der einzelne Punkt x, y wird um $\delta x = \xi\,\delta t$ und $\delta y = \eta\,\delta t$ verschoben, der benachbarte Punkt $x+dx, y+dy$ dementsprechend um $\delta(x+dx) = (\xi)_{x+dx,\,y+dy}\cdot\delta t = (\xi + \frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy)\,\delta t$ und

$$\delta t(y+dy) = (\eta)_{x+dx,\,y+dy}\cdot\delta t = (\eta + \frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy)\,\delta t.$$

Demnach geht y' über in:

$$y' + \delta y' = \frac{dy + (\frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy)\,\delta t}{dx + (\frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy)\,\delta t} \quad \text{oder:}$$

$$= \frac{y' + (\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}y')\,\delta t}{1 + (\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}y')\,\delta t}.$$

Indem wir wieder den Nenner als $(-1)^{te}$ Potenz in den Zähler setzen und nach Potenzen von δt entwickeln, bekommen wir:

$$\delta y' = (\frac{\partial\eta}{\partial x} + (\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x})\,y' - \frac{\partial\xi}{\partial y}y'^2)\,\delta t.$$

Wenn wir jetzt x, y und y' als Variable ansehen, so werden dieselben folgende infinitesima.

$= (1+a)\,x + b$, d.h. genau zu den 2 gliedrigen Gruppe, die wir bereits kennen.

Dagegen die zweite Annahme $X_0 = x\frac{df}{dx}$ verlangt, wenn wir wieder $X_1 = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\frac{df}{dx}$ setzen und den Klammerausdruck $(X_0 X_1)$ berechnen, dass:

$$x\cdot d\left[(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\frac{df}{dx}\right] - (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\frac{d(x\,df)}{dx} =$$

$$= x\frac{df}{dx} \quad \text{oder} \quad -c_0\frac{df}{dx} + c_2 x^2\frac{df}{dx} = x\frac{df}{dx}$$

d.h. $c_2 x^2 - c_0 = x$ sein müsste, was unmöglich ist. Die zweite Möglichkeit, dass $X_0 = x\frac{df}{dx}$ wäre, führt daher zu einem Widerspruch und existirt folglich nicht. Es giebt also nur den einen Typus einer 3 gliedrigen continuirlichen projectiven Gruppe, einer Verbindlichen vom projectiven Standpunkte aus.

Dass es endlich keine andere eingliedrige Gruppe giebt als den einen allgemeinen Typus, ist an und für sich klar. Hiermit haben wir dann auch den Fall speciell der projectiven Gruppen einer Veränderlichen absolvirt.

Wir wenden uns nun zu dem Fall $n = 2$, den Lie in Ann. 16 behandelt hat, also zur Ge-

stimmung aller Transformationsgruppen der Ebene, doch können wir jetzt nicht mehr wie soeben alle Sätze mit vollständigen Beweisen vortragen, da zu viel Fallunterscheidungen in Frage kommen. Wir müssen uns auf ein Referat beschränken, welches die einzelnen Hauptpunkte andeutet. Wir nennen die beiden Variabeln x u. y und denken sie am einfachsten als Coordinaten in der Ebene.

1.) Wir denken uns wieder einen beliebigen Punkt als Anfangspunkt für $x=0$ u. $y=0$ ausgewählt und in der Nähe desselben Reihenentwickelungen der verschiedenen $X^{(i)}$ gegeben. Dann werden wir wieder infinitesimale Transformationen 0ter, 1ter, 2ter .... u. s. w. Ordnung unterscheiden, je nachdem die Reihenentwicklung mit Gliedern der 0ten, 1ten, 2ten ... Potenz der Variabeln x und y beginnt. Z. B. bilden $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df}{dy}$ selbst die einfachsten Beispiele einer Transformation 0ter Ordnung; der Zuwachs der beiden Coordinaten wird entsprechend durch: $\delta x = \delta t$, $\delta y = 0$ resp. $\delta x = 0$, $\delta y = \delta t$ gegeben, so dass allgemein eine Funktion f um $\frac{df}{dx} = \delta t$ resp. $\frac{df}{dy}\delta t$ zunimmt.

Transformationen erster Ordnung sind z. B. $x\frac{df}{dx}$, $y\frac{df}{dx}$, $x\frac{df}{dy}$, $y\frac{df}{dy}$, Transformationen 2ter Ordnung: $x^2\frac{df}{dx}$, $xy\frac{df}{dx}$ u. s. w.

2) Das zweite Moment ist natürlich, dass man die Klammerausdrücke heranzieht, für welche dann die Relationen $(X_i X_k) = \sum c_{ik\sigma} X_\sigma$ zu gelten haben.

3) Drittens macht Lie von einem geometrischen Hülfsmittel Gebrauch; er redet nämlich nicht nur von Punktcoordinaten der Ebene, sondern zieht auch die Linienelemente heran und sieht zu, wie diese transformirt werden. Unter einem Linienelement in der Ebene haben wir doch das Verbindungsstück der Punkte x, y und $x+dx$, $y+dx$ seiner Lage und Richtung nach zu verstehen; die Coordinaten der einzelnen Linienelemente sind demnach x, y und $\frac{dy}{dx} = y'$.

Nun ist die Frage, wenn irgend eine infinitesimale Punkttransformation gegeben ist: $X(f) = \xi\cdot\frac{df}{dx} + \eta\cdot\frac{df}{dy}$, woselbst ξ u. η irgend welche Function von x und y sind, wie wird diese

auf die Linienelemente der Ebene? Der einzelne Punkt x, y wird um $\delta x = \xi\, \delta t$ und $\delta y = \eta\, \delta t$ verschoben, der benachbarte Punkt $x+dx, y+dy$ dementsprechend um $\delta(x+dx) = (\xi)_{x+dx, y+dy} \cdot \delta t = (\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy)\, \delta t$ und

$$\delta t(y+dy) = (\eta)_{x+dx, y+dy} \cdot \delta t = (\eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy)\, \delta t.$$

Demnach geht y' über in:

$$y' + \delta y' = \frac{dy + (\frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy)\, \delta t}{dx + (\frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy)\, \delta t} \quad \text{oder:}$$

$$= \frac{y' + (\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y')\, \delta t}{1 + (\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} y')\, \delta t}.$$

Indem wir wieder den Nenner als $(-1)^{te}$ Potenz in den Zähler setzen und nach Potenzen von δt entwickeln, bekommen wir:

$$\delta y' = (\frac{\partial \eta}{\partial x} + (\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2)\, \delta t.$$

Wenn wir jetzt x, y und y' als Variable ansehen, so werden dieselben folgende infinitesima.

le Transformation erleiden:

$$X'(f) = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2\right) \frac{\partial f}{\partial y'},$$

Diese Transformation nennt Lie die <u>erste erweiterte Transformation</u> zu der gegebenen Transformation $\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$. (Man kann auch zweite Erweiterungen in Betracht ziehen, in denen dann 2te Differentialquotienten vorkommen, d.h. nicht Linienelemente, sondern Linienscharen trans. formirt werden etc.)

Diese kleine Entwicklung können wir nun in Verbindung setzen mit der Darstellung unserer Transformation im Anfangspunkt O (der unseren beliebigen Punkt der Ebene vertritt) Wir wollen insbesondere diejenigen Transformationen unserer Gruppe betrachten, die den Nullpunkt festlassen, (und also für sich eine Untergruppe bilden) d.h. Transformationen von erster und höherer Ordnung. Indem wir dann unser Augenmerk auf die von O auslaufenden Linienelemente richten, gelten folgende Sätze:

<u>Transformationen 2. oder noch höherer Ord.</u>

nung lassen die sämmtlichen genannten Linienelemente überhaupt elementenweise ungeändert, die Transformationen erster Ordnung aber transformiren diese Elemente linear.

Um diese Sätze zu beweisen, knüpfen wir an unsere Formel für $\delta y'$ an. Nehmen wir hier Transformationen zweiter oder höherer Ordnung, so verschwinden $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ u. s. w. für $x=0$, $y=0$ und $\delta y'$ wird gleich 0.

Für Transformationen erster Ordnung aber werden $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ ... Constante, und wir erhalten:

$\delta y' = (c_0 + c_1 y' + c_2 y'^2)\,\delta t$; die projective Natur der Transformation der Linienelemente zeigt sich dann eben darin, dass in der Klammer y' nur bis zum zweiten Grade vorkommt.

[19 VI 93] Wir fahren heute fort, über den einen oder anderen Punkt zu referieren, den Lie teils durch Rechnung teils durch geometrische Betrachtungen in Ann. 16 entwickelt hat.

Wir haben am Schlusse der letzten Stunde gesehen, dass diejenigen infinitesimalen Transformationen einer Gruppe, welche den Anfangs-

punkt festlassen, die von ihm auslaufenden Li-
nienelemente projectiv transformiren. Wir wissen
aber bereits, dass es (einschliesslich der Identität)
nur die folgenden 5 Typen projectiver Umformun-
gen einer ∞_1 giebt:

1.) $x' = x.$
2.) $x' = x + b$
3.) $x' = (1 + a)\, x$
4.) $x' = (1 + a)\, x + b$
5.) $x' = \dfrac{(1 + a)\, x + b}{c\, x + (1 + d)}.$

Diese 5 Typen die in 0gliedrige, eingliedrige,
zweigliedrige und dreigliedrige zerfallen, werden
daher auch betreffs der Transformation des Pü-
schels unserer Linienelemente zu unterscheiden sein.

Wir wollen einmal die Transformationen 2, 3,
4 einen Augenblick noch näher betrachten. Bei den
Transformationen der Gruppe $x' = x + b$ bleibt
$x = \infty$ d. h. ein Linienelement ungeändert, bei
$x' = (1 + a)\, x$ dagegen gilt gleiches für die beiden
Linienelemente $x = 0$ und $x = \infty$, endlich bei $x' =$
$= (1 + a)\, x + b$ bleibt wieder nur ein Linienelement
$x = \infty$ fest. Wir haben dann also von 0, und so
von jedem anderen Punkte auslaufend, ein oder

zwei ausgezeichnete Linienelemente.

Diese von den verschiedenen Punkten auslaufenden Linienelemente werden bei jeder Transformation der Gruppe unter einander vertauscht werden. Jetzt wollen wir unsere Linienelemente zu Curven an einander reihen.

Wir schließen, daß in den Fällen 2, 3, 4 die Ebene von einem oder auch von 2 invarianten Curvensystemen überdeckt wird, d.h. von Curvensystemen, welche bei der vorgelegten Gruppe in sich selbst verwandelt werden. Wenn nun ein solches Curvensystem vorliegt, so führe man mit Lie neue Coordinaten ein der Art, daß dies Curvensystem in $x = \text{Const}$ übergeht; liegen aber 2 Curvensysteme vor, so sollen diese in den neuen Coordinaten durch $x = \text{Const}$., $y = \text{Const}$ gegeben sein.

Wir haben dann eine Gruppe, welche die Parallellinien $x = c$, oder auch die Parallellinien $x = c$ und $y = c'$ mit einander vertauscht. Nun bilden diese Parallellinien doch jedesmal wie, der eine infinitesimale Mannigfaltigkeit. Lie unterscheidet demnach des Weiteren, wie diese Curven bei der vorgelegten Transformationsgruppe unter sich vertauscht werden und hat offenbar

wieder die 4 Möglichkeiten auseinander zu halten, die überhaupt bei eindimensionalen Mannigfaltigkeiten vorliegen, dass nämlich die Curven nullgliedrig, eingliedrig, zweigliedrich oder dreigliedrig verlaufen können. Durch solche und ähnliche Ueberlegungen kommt man Lie schliesslich wirklich dazu, alle Gruppen der Ebene aufzuzählen, wie es in tabellarischer Form in Bd. 16 der Annalen pag. 523 - 25 geschehen ist. Lie unterscheidet daselbst:

1.) Gruppen ohne invariante Curvenschaaren.
2.) Gruppen mit einer invarianten Curvenschaar.
3.) Gruppen mit zwei invarianten Curvenschaaren.
4.) Gruppen mit ∞^1 invarianten Curvenschaaren.
5.) Gruppen mit ∞^∞ invarianten Curvenschaaren, d.h. Curvenschaaren in deren Gleichung eine will-kürliche Function auftritt.

In jede dieser 5 Categorien findet man eine grössere oder kleinere Zahl von Gruppen Platz.

Ad. 1 Hier sind nur 3 Gruppen aufzuzählen und zwar:

a) die allgemeine projective Gruppe mit 8 Parametern (d.h. die Gesammtheit aller gebrochenen linearen Substitutionen.)

3) die allgemeine lineare Gruppe oder die Gruppe der affinen Transformationen mit 6 Parametern:

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = dx + ey + f$$

4) die specielle lineare Gruppe, welche durch dieselben Formeln wie 6 gegeben wird jedoch mit der Bedingung $ae - bd = 1$, so dass nur noch 5 Parameter bleiben.

Allgemein gilt also der Satz: Gleicht keine Curve sich selbst invariant, so ist die Gruppe jedesmal mit einer projectiven Gruppe ähnlich und enthält hiernach gewiss nicht mehr als 8 Parameter.

Dieser Satz hat für uns vielleicht nicht gerade etwas besonders Ueberraschendes; haben wir doch bei einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit analog gesehen, dass jede Gruppe mit einer projectiven ähnlich ist. Demgegenüber müssen wir betonen, dass das hier, in der Ebene, nur bei den Transformationen 1 so ist, bei den Gruppen 2 ist es schon ganz anders. In der That will ich hier einige Gruppen 2 mitteilen, welche gewiss nicht projectiv dargestellt werden können, da sie beliebig viele Parameter enthalten. Für sie alle ist x-Const

das eine invariante Curvensystem.

Das erste Beispiel sei:

$x' = x$

$y' = ay + b + c\varphi(x) + d\psi(x) + e\chi(x) + \ldots\ldots,$

wo die φ, ψ, χ beliebige analytische Functionen von x sein sollen. Wir können die rechte Seite für y' so weit fortsetzen, als wir eben willkürliche Parameter $a, b, c, d \ldots$ haben wollen.

Ferner sei die Gruppe genannt:

$x' = x + k$

$y' = ay + b + c.e^{\lambda_1 x} + d.e^{\lambda_2 x} + e.e^{\lambda_3 x} + \ldots,$ mit den Parametern $k, a, b, c \ldots$

oder schliesslich:

$x' = kx + l$

$y' = ay + b + cx + dx^2 + ex^3 + \ldots$ mit den Parametern $k, l, a, b, c \ldots$.

Dies sind nun keineswegs die einzigen Gruppen, die Lie anführt, doch sind es einige typische Beispiele, bei denen man unmittelbar erkennt, dass sie sich gewiss nicht in projective Transformationen überführen lassen. Im letzten Falle haben wir aber wenigstens rationale Umformungen, während in den beiden anderen Fällen ausdrücklich transcendente Functionen in die Formeln

einsetzen.

Wir wenden uns nun zu einigen Beispielen der 3. Kategorie, Gruppen mit 2 invarianten Curvensystemen.

Es sei $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $y' = \frac{\alpha' y + \beta'}{\gamma' y + \delta'}$. Diese Formeln stellen die allgemeinsten Transformationen dar, welche die Curvensysteme $x = \text{Const}$ u. $y = \text{Const}$ in sich überführen. Ihre Gruppe enthält 6 Parameter. Auch sie ist uns übrigens im letzten Semester bereits begegnet. Denken Sie, es sei ein rechtwinkliges Coordinatensystem ξ, η gegeben und es sei gesetzt:

$$x = \xi + i\eta$$
$$y = \xi - i\eta.$$

Dann stellen jene Transformationsformeln der x' u. y' die allgemeinsten linearen Substitutionen der conjugirt complexen Variabelen x und y dar.

Ihre Gruppe ist nur dann wohl bekannt, als Gruppe der reciproken Radien, als Gruppe der Kreisverwandtschaften in der Ebene, wobei wir freilich $\alpha' \beta' \gamma' \delta'$ conjugirt complex zu $\alpha \beta \gamma \delta$ nehmen müssen, wenn wir reelle Kreisverwandtschaften haben wollen.

Nun wollen wir noch auf eine speciellere hierhergehörige Gruppe unsere Aufmerksamkeit lenken. Es sei ein Kegelschnitt, etwa eine Parabel gegeben: $y^2 = x$, dann giebt es doch ∞^3 Collineationen des Kegelschnittes in sich. Diese ∞^3 Collineationen spielen ja in sehr vielen Betrachtungen eine wichtige Rolle, wie z. B. besonders in der Nicht-Euklidischen Geometrie. Bei dieser Gruppe der genannten Collineationen geht jede Tangente des Kegelschnittes natürlich wieder in eine Tangente über. Durch jeden Punkt der Ebene gehen aber 2 Tangenten. Vom algebraischen Standpunkte aus bilden nun zwar die Tangenten des Kegelschnittes eine einzige zusammenhängende Schaar, welche natürlich die Ebene doppelt überdeckt.

Vom analytischen Standpunkte dagegen, wo wir in der Umgebung der einzelnen Stelle der Ebene Reihenentwicklungen machen, und wir uns über die analytische Fortsetzung dieser Reihen gar nicht sorgen, da müssen wir sagen, dass wir im vorliegenden Falle 2 invariante Curven, Schaaren haben, deren jede unseren Bereich einfach überdeckt. Demnach gehört unsere Gruppe auch der 3ten Lie'schen Categorie an. Des Näheren

lautet die Transformationsgruppe, welche die Parabel $y^2 - x$ in sich überführt,

$$x = \frac{\alpha^2 x + 2\alpha\beta y + \beta^2}{\gamma^2 x + 2\gamma\delta y + \delta^2},$$

$$y = \frac{\alpha\gamma + (\alpha\delta + \beta\gamma) y + \beta\delta}{\gamma^2 x + 2\gamma\delta y + \delta^2}.$$

Daß vermöge dieser Substitutionen $y'^2 - x'$ ein Multiplum von $y^2 - x$ wird, d. h. $y^2 - x = 0$ in sich übergeht, ist ja leicht durch Einsetzung zu verificieren.

Bis hierher haben wir bei unserer Aufzählung der continuirlichen Gruppen der M_2 alle diejenigen Gruppen, die durch beliebige Punktransformationen in einander übergehen, d. h. die ähnlichen Gruppen, als gleichwerthig angesehen. Nun werden wir jedoch andererseits wieder fragen können, <u>was für projective Gruppen giebt es in der Ebene? Dann werden wir natürlich nur solche 2 Gruppen als aequivalent angesehen haben, die durch projective Coordinatentransformation in einander übergeführt worden können.</u> Daneben werden wir freilich auch dualistische Transformationen heranziehen wollen. Der Gruppe aller Collineationen der Ebene, die z. B. eine gerade

Linie in sich überführen, steht dann die Gruppe aller Collineationen gegenüber, die einen Punkt in sich transformiren. Man wird jedenfalls solche 2 Gruppen, die durch dualistische Verwandtschaft auseinander hervorgehen, neben einander aufführen. Die hiermit präcisirte Aufgabe, alle projectiven Gruppen aufzuzählen ist von Lie im Archiv Bd. 9 (1884) behandelt worden. Sie ist aber neuerdings von Franz Meyer durchgearbeitet worden, und zwar stellt dieser alle Gruppen sogleich in endlicher Form dar, nicht wie Lie durch infinitesimale Transformationen. Das Resultat von Franz Meyer, welches mir vorliegt, ist dann dieses, dass er unter Zusammenfassung jedesmal dual entgegenstehender Gruppen im Ganzen 31 verschiedene Typen bekommt.

Hier seine Tabelle:

I Achtgliedrig

1. Die allgemeine Gruppe

II Sechsgliedrig.

$2^a = \begin{cases} x_1 = ax + by + k \\ y_1 = cx + dy + e \end{cases}$ (Invariante Gerade

2^b = dual

III Fünfgliedrig

3^a: z^a mit der Bedingung $ad - bc = 1$ (Invarianz des Flächeninhaltes)

3^b dual

4 $\begin{cases} x_1 = ax + k \\ y_1 = cx + dy + e \end{cases}$ (Invariantes Linienelement)

IV Viergliedrig.

5^a $\begin{cases} x_1 = t^c x + k \\ y_1 = t^{c+1} y + gx + e \end{cases}$ (c eine willkürliche Constante)

5^b dual

6 (4) mit $ad = 1$

7 $\begin{cases} x_1 = ax + k \\ y_1 = a^2 y + cx + e \end{cases}$ (5), (6) [7] sind Untergruppen von (4).

8 $\begin{cases} x_1 = ax + by \\ y_1 = cx + dy \end{cases}$ (Invarianter Punkt und invariante Gerade getrennt.)

9^a $\begin{cases} x_1 = ax + k \\ y_1 = dy + e \end{cases}$ (Invariante Gerade und zwei invariante Punkte auf ihr.)

9^b dual

III Dreigliedrig.

10 $\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = y + \varepsilon x + e \end{cases}$

11 $\begin{cases} x = a x + k \\ y_1 = a y + ak x + e \end{cases}$

12$^a_=$ $\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = e^k y + \varepsilon x + e \end{cases}$

12$^b_=$ dual

13 (8) mit $ad - bc = 1$

14$^a_=$ (9) mit $ad = 1$

14$^b_=$ dual

15 $\begin{cases} x_2 = a x \\ y_1 = c x + dy \end{cases}$ (Zwei invariante Punkte, ihre invariante Verbinde und noch eine invariante Gerade durch einen der Punkte)

16$^a_=$ $\begin{cases} x_1 = a x + k \\ y_1 = ay + e \end{cases}$ (Invariante Punkte einer Geraden)

16$^b_=$ dual

17. $x_1 : y_1 : 1 = a^2 x + 2ab y + b^2 : ac x + (ad + bc) y + bd$
$: c^2 x + 2cd y + d^2$
(Invarianter Kegelschnitt $y^2 - x = 0$).

VI Zweigliedrig

18. $\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = y + kx + e \end{cases}$ Untergruppe von 11.

19$^a_=$ $\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = e^k y + e \end{cases}$ Untergruppe von 9$^a_=$ 19$^b_=$ dual.

20$^a_=$ $\begin{cases} x_1 = t^c x \\ y_1 = t^{c+1} y + y \end{cases}$ (Untergruppe von 15 c eine willkürliche Const) 20$^b_=$ dual

21. $\begin{cases} x_1 = a x \\ y_1 = a y + c x \end{cases}$ (Untergruppe von 15) 22 (15 mit ad=1

23$^a_=$ $\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = y + e \end{cases}$ (Untergruppe von 16^a) 23$^b_=$ dual

24 $\begin{cases} x_1 = a x \\ y_1 = d y \end{cases}$ (Invariantes Dreieck)

25$^a_=$ $\begin{cases} x_1 = x + by \\ y = dy \end{cases}$ (Invariante Punkte einer Geraden und noch eine inv. variante Gerade.) 25$^b_=$ dual

26 $\begin{cases} x_1 = a x + k \\ y_1 = a^2 y + a k x + k^2 \end{cases}$ (Invarianter Kegelschnitt mit einem invarianten Punkt darauf.)

VII Eingliedrig.

27. $\begin{cases} x_1 = a x \\ y_1 = a^c y \end{cases}$ (Invariantes Dreieck und ∞^1 eingeln. invariante Curven (N-Curven) c ist eine willkürliche Constante.)

28 $\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = e^k . y. \end{cases}$ (28a mit der Bedingung, daß ∞^1 invariante Curven hinzukommen)

29 $\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = y + kx + \frac{k^2}{2} \end{cases}$ (Invariantes Linienelement und ∞^1 Kegelschnitte, die die, gemeinhaben.)

30 $\begin{cases} x = a x \\ y_1 = ay \end{cases}$ (Invariante Punkte einer Ge, raden und invariante Strahlen eines Büschels, dessen Spitze nicht auf der Geraden liegt.)

31 $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y + e \end{cases}$ (wie 30), nur daß die Spitze des Büschels auf der Geraden liegt.)

20 VII 93 Ich will heute zunächst noch 2 kleine Bemerkungen dem Vorstehenden anreihen. Unter den Gruppen, die Franz Meyer angiebt, befinden sich z. B. auch die folgenden:

$$x' = e^{\alpha t}\cdot x \qquad x' = x + k$$
$$y' = e^{\beta t}\cdot y \quad \text{und} \quad y' = e^{k}y + c\,x + b$$

mit dem Parameter t mit den Parametern k, b, c

Diese beiden Gruppen haben das Gemeinsame, daß ihre Parameter nicht algebraisch sondern in transcendenter Verbindung auftreten. Nun können wir zwar die erste Gruppe z. B. so ändern, daß wir schreiben:

$$x' = e^{\alpha t}\cdot x$$
$$y' = (e^{\alpha t})^{\beta/\alpha}\cdot y$$

und dann $e^{\alpha t} = a$ setzen. Dann erhalten wir:

$$x' = a\,x$$
$$y' = a^{\beta/\alpha}\cdot y.$$

Ist dann β/α eine rationale Zahl, so haben wir in der That erreicht, daß der Parameter a algebraisch vorkommt. ist aber β/α irrational, so ist dies nicht der Fall.

Auch wenn man sich daher auf projective Gruppen beschränkt, brauchen die Parameter noch nicht in allen Fällen algebraisch vorzukommen, und man wird also immer noch algebraische

und transcendente Gruppen unterschieden können, was die Parameter angeht.

Von dieser Bemerkung aus können wir nun den allgemeinen Gedanken meines Erlanger Programms, dass zu jeder Gruppe von Transformationen eine Invariantentheorie gehört, dahin präcisieren, dass eine algebraischen Invariantentheorie auch im Gebiet der linearen Transformationen nur bei einer algebraischen Gruppe möglich ist, d.h. bei einer solchen Gruppe, welche sowohl die Variablen, sondern auch die Parameter algebraisch enthält.

Nehmen wir z. B. an, es sei eine algebraische Function $f(x, y)$ gegeben, und es wäre zu untersuchen durch welche Gruppe projectiver Substitutionen dieselbe in sich übergeht. Dann hätten wir doch auszugehen von der Gleichung:

$$f\left(\frac{ax+by+c}{gx+hy+i}, \frac{dx+ey+f}{gx+hy+i}\right) = f(x, y)$$ und daraus die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten $a, b, c \ldots$ abzuleiten. Hierbei werden wir natürlich auf algebraische Bedingungsgleichungen geführt werden, und daher wieder die Transformationen, welche f in sich überführen, sofern es überhaupt solche gibt, eine algebraische Gruppe bilden. Diese Gruppe

pe braucht noch nicht continuirlich zu sein, doch wollen wir auf die verschiedenen Möglichkeiten, die in dieser Hinsicht vorliegen, erst später eingehen. Dieser Gedanke, dass man in der algebraischen Invariantentheorie sich auf algebraische Gruppen zu beschränken hat, ist neuerdings von Maurer im Journal Bd. 107 (1891) skizzirt worden; an diese Arbeit schliesst sich dann noch in den Ann. Bd. 39 (1891) eine nähere Betrachtung über algebraische Transformationsgruppen an.

Die zweite Bemerkung, die ich hinzufügen wollte, zielt auf eine Frage von mehr formalem Charakter ab. Wir haben bisher die projectiven Transformationen doch stets unhomogen dargestellt. Wollen wir homogene Schreibweise anwenden, so werden wir zwecks Darstellung einer infinitesimalen Transformation setzen:

$$dx_1' = da_{11}x_1 + da_{12}x_2 + da_{13}x_3$$
$$dx_2' = da_{21}x_1 + da_{22}x_2 + da_{23}x_3$$
$$dx_3' = da_{31}x_1 + da_{32}x_2 + da_{33}x_3$$

Nun kommt es natürlich nur auf das Verhältniss der 9 Substitutionscoefficienten an. Man kann dies ja dadurch zum Ausdruck bringen, dass man

und transcendente Gruppen unterscheiden können, was die Parameter angeht.

Von dieser Bemerkung aus können wir nun den allgemeinen Gedanken meines Erlanger Programms, daß zu jeder Gruppe von Transformationen eine Invariantentheorie gehört, dahin präcisieren, daß eine algebraischen Invariantentheorie auch im Gebiet der linearen Transformationen nur bei einer algebraischen Gruppe möglich ist, d.h. bei einer solchen Gruppe, welche sowohl die Variablen, sondern auch die Parameter algebraisch enthält.

Nehmen wir z. B. an, es sei eine algebraische Function $f(x, y)$ gegeben, und es wäre zu untersuchen durch welche Gruppe projectiver Substitutionen dieselbe in sich übergeht. Dann hätten wir doch auszugehen von der Gleichung:

$$f\left(\frac{ax+by+c}{gx+by+i}, \frac{dx+ey+f}{gx+by+i}\right) = f(x, y)$$ und aus ihr

die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten a, b, c .... abzuleiten. Hierbei werden wir natürlich auf algebraische Bedingungsgleichungen geführt werden, und daher wieder die Transformationen welche f in sich überführen, sofern es überhaupt solche giebt, eine algebraische Gruppe bilden. Diese Grup-

pe braucht noch nicht continuirlich zu sein, doch wollen wir auf die verschiedenen Möglichkeiten, die in dieser Hinsicht vorliegen, erst später eingehen. Dieser Gedanke, dass man in der algebraischen Invariantentheorie sich auf algebraische Gruppen zu beschränken hat, ist neuerdings von Maurer im Journal Bd. 107 (1891) skizzirt worden; an diese Arbeit schliesst sich dann noch in den Ann. Bd. 39 (1891) eine nähere Betrachtung über algebraische Transformationsgruppen an.

Die zweite Bemerkung, die ich hinzufügen wollte, zielt auf eine Frage von mehr formalem Charakter ab. Wir haben bisher die projectiven Transformationen doch stets unhomogen dargestellt. Wollen wir homogene Schreibweise anwenden, so werden wir zwecks Darstellung einer infinitesimalen Transformation setzen:

$$dx_1' = da_{11}x_1 + da_{12}x_2 + da_{13}x_3$$
$$dx_2' = da_{21}x_1 + da_{22}x_2 + da_{23}x_3$$
$$dx_3' = da_{31}x_1 + da_{32}x_2 + da_{33}x_3$$

Nun kommt es natürlich nur auf das Verhältniss der 9 Substitutionscoefficienten an. Man kann dies ja dadurch zum Ausdruck bringen, dass man

links den x_1', x_2', x_3' den Proportionalfactor ϱ hinzufügt. Doch ist auch dieses immerhin unbequem.

Demgegenüber bringt Study in Vorschlag bei der analytischen Darstellung der infinitesimalen projectiven Transformation zwar an der homogenen Schreibweise festzuhalten, dafür aber den Grössen da_{ik} die Bedingung aufzuerlegen:

$da_{11} + da_{22} + da_{33} = 0$. Vergl. pag. 132 ff von Study's „Methoden der Theorie der Ternärenformen", 1889, wo man das Nähere vergleichen mag.

Wir gehen nun in unseren Betrachtungen weiter und fragen uns, was weiss man von den Transformationsgruppen für $n = 3$ d.h. für den dreidimensionalen Raum? Lie hat bereits Anfangs der 70er Jahre die sämmtlichen Gruppen für $n = 3$ bestimmt, aber sie sind von ihm noch nicht veröffentlicht worden, weil die Sache sehr umständlich sich darstellt.*) Was speciell die projectiven Gruppen des R_3 angeht, so hat Lie dieselben im Archiv Bd. 9 u. 10 (1884–85) angegeben.

Lie kommt dazu einem nicht sehr complicirten

*) Uebrigens sollen alle die Einzelheiten die wir berühren, in dem bald erscheinenden dritten Bande von Lie-Engel ihre Stelle finden.

Resultat. Wir können aus den ∞^{15} Collineatio-
nen des R_3, die es allgemein giebt, als Unter-
gruppen zunächst ausscheiden alle diejenigen, die
z. B. einen Punkt, eine Ebene oder eine Gerade
festlassen; dies führt uns entsprechend zu einer G_{12},
G_{12} oder G_{11}. Doch können wir sogleich noch wei-
tere Beispiele aufzählen, die wir sämmtlich be-
reits im letzten Wintersemester kennen gelernt haben,
etwa die Gesammtheit G_3 aller Collineationen,
welche eine Raumcurve 3. Ordnung in sich über-
führen, die G_6, welche eine Fläche 2ten Grades,
oder die G_{10}, welche einen linearen Complex un-
verändert lässt. Besonders die letztgenannte Grup-
pe zieht die Aufmerksamkeit auf sich. Ich habe
hier die Dissertation von Knothe (Leipzig 1892) zu
nennen, der die in der G_{10} vorkommenden Unter-
gruppen untersucht hat. Alle die aufgeführten
Gruppen stellen Untergruppen der Gesammtheit
aller projectiven Transformationen des Raumes
dar. Lie hat nun den folgenden allgemeinen Satz
aufgestellt: <u>Bei jeder Untergruppe der projecti-
ven Gruppe ist entweder ein Punkt oder eine Cur-
ve, oder eine Fläche, oder ein linearer Complex
invariant.</u> Da geben also unsere Beispiele

einen ersten Ansatz.

Zeigt wenden wir uns sogleich zu den Gruppen der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Das Hauptinteresse richtet sich hier auf die Construction transitiver Gruppen, insofern, wenn eine Gruppe intransitiv ist und der eingelne Punkt nur auf einer Mannigfaltigkeit von $n-\mu$ Dimensionen verschoben wird, dann zunächst jedenfalls das Interesse ein $(n-\mu)$ dimensionales ist, indem wir zu wissen wünschen, wie innerhalb dieser Mannigfaltigkeit sich die Punkte verschieben. Eine Reihe von Entwickelungen betr. die transitiven Gruppen des R_n sind dann wieder von Lie selbst gegeben worden; vergleiche insbesondere Leipziger Berichte, 1890 pag. 478 ff und 1891 pag. 300 ff; in dieser letzten Arbeit setzt Lie insbesondere auseinander, wie seine eigenen bezüglichen Arbeiten sich zu denen von Schur in Aachen verhalten, Math. Annalen 38, 1891.

Im übrigen sind diese Betrachtungen von Lie noch nicht abgeschlossen, doch zeigt er bisher, daß bei beliebigem n auch wieder eine endliche Anzahl von transitiven Gruppen existiert, die man alle einzeln aufstellen kann, und er vermutet des Weiteren, daß man dabei immer mit ganzen

rationalen Functionen und Exponentialfunctionen reicht. Es ist natürlich ein grosser Mangel unserer Darstellung, dass wir alle diese wichtigen Fragen nur im Referat berühren können.

Nun wollen wir noch von der „Zusammensetzung der Gruppen" sprechen. Es seien die unabhängigen infinitesimalen Transformationen einer Gruppe gegeben: $X_1 f, X_2 f \ldots X_r f$. Dann wissen wir, dass der beliebige Klammerausdruck $(X_i \cdot X_k) = \sum c_{ik\sigma} X_\sigma$ ist, woselbst die $c_{ik\sigma}$ Constanten sind. Wir wollen einstweilen noch annehmen, dass diese Relationen zugleich hinreichend sind für die Existenz einer Gruppe, welche jene r infinitesimalen Transformationen als ergengende hat. Unter der Zusammensetzung einer Gruppe versteht man nun mit Lie einfach die Werte der Constanten $c_{ik\sigma}$, die in den genannten Relationen $(X_i X_k) = \sum c_{ik\sigma} X_\sigma$ vorkommen.

Wir nennen ferner eine zweite Gruppe mit einer ersten Gruppe gleich zusammengesetzt, wenn ich die ergengenden Substitutionen $X_1', X_2', \ldots X_r'$ der zweiten Gruppe, (die natürlich linear unabhängig sein sollen) so auswählen kann, dass die Zusammensetzungsconstanten $c'_{ik\sigma}$ genau dieselben

Werte haben wie die c_{iks}. Ich behaupte nun wei-
ter, dass, gleichzusammengesetzte Gruppen über-
haupt dieselbe Substitution haben, also insbeson-
dere dieselben Untergruppen aufweisen, kurz ge-
sagt, dass sie „isomorph" sind. Um dies nach-
zuweisen, überlegen wir nur einmal, wie wir über-
haupt Untergruppen einer vorliegen Gruppe finden:

Es seien die infinitesimalen Transforma-
tionen $X_1, X_2, X_3 \ldots X_r$ gegeben. Man wird dann
zu versuchen haben, aus den X_i auf alle Weise
lineare Verbindungen mit constanten Coefficien-
ten $Y_1\ Y_2 \ldots Y_{r'}$, wo $r' < r$ sein soll, herauszu-
heben, die für sich in der Klammerbeziehung
stehen: $(Y_i\ Y_k) = \sum_1^{r'} c_{iks} Y_s$; denn dann bilden
die $Y_1 \ldots Y_{r'}$ für sich wieder eine Gruppe. So
oft wir nun in solcher Weise aus den X_i uns eine
Untergruppe gebildet haben, werden wir aus der
gleich zusammengesetzten Gruppe in genau der-
selben Weise eine Untergruppe erhalten.

Aus dieser Ueberlegung erkennen Sie
schon, welches Gewicht auf die Zusammenset-
zung einer Gruppe zu legen ist. Von den Constan-
ten c_{iks} hängt eben die ganze Struktur der Grup-

pe ab. Fragen wir uns nun, wie wir überhaupt die Constante $c_{ik\sigma}$ wählen dürfen?

Zunächst ist $c_{ik\sigma} = -c_{ki\sigma}$; dies liegt in der Eigenschaft des Klammerausdruckes. Ferner haben wir die Beziehungen, die aus der Jacobischen Identität folgen: $\sum_{\sigma} (c_{kl\sigma} c_{i\sigma t} + c_{li\sigma} c_{k\sigma t} + c_{ik\sigma} c_{l\sigma t}) = 0$.

Dies sind jedenfalls notwendige Relationen, denen die Größen $c_{ik\sigma}$ genügen müssen. Lie hat nun die wichtige Umkehrung aufgestellt: Wenn wir n^3 Constante $c_{ik\sigma}$ haben, die diesen hingeschriebenen Relationen genügen, dann kann man allemal auch Gruppen bilden, deren Zusammensetzung gerade durch diese $c_{ik\sigma}$ gegeben ist.

Ich behaupte, man kann bei der genannten Voraussetzung sogar eine homogene lineare Gruppe für r Variabeln $x_1, x_2 \dots x_r$, bilden, die „adjungierte Gruppe" nach Lie. Und zwar wird dieselbe gegeben durch die r infinitesimalen Transformationen $X_1, X_2 \dots X_r$, welche bestimmt sind durch die Formeln:

$$X_k(f) = \sum_i \sum_{\sigma} c_{ik\sigma} x_i \frac{\partial f}{\partial x_\sigma}$$

Dass dieselbe in der That eine Gruppe ergeben und dass diese Gruppe die gewünschte Zusammensetzung hat, davon überzeugen wir uns, indem wir direct die Gültigkeit der Klammerrelationen

$$(X_k, X_l) = \sum_s c_{kls} X_s$$

als eine Folge der Bedingungen nachweisen, die wir den c_{iks} auferlegt haben. Es ergiebt sich durch directe Ausrechnung:

$$(X_k X_l) = \sum_i \sum_s \sum_t c_{iks} x_i \cdot c_{slt} \frac{\partial f}{\partial x_t} - \sum_i \sum_t \sum_s$$

$$- \sum_i \sum_t \sum_s c_{ilt} x_i c_{tks} \frac{\partial f}{\partial x_s},$$

oder nach Vertauschung der Buchstaben s u. t im zweiten Glied in eine dreifache Summe zusammengefasst:

$$(X_k X_l) = \sum_i \sum_s \sum_t (c_{iks} c_{slt} - c_{ils} c_{skt}) x_i \frac{\partial f}{\partial x_t}.$$

Wenn wir dann die Relation hinzunehmen, dass eine Vertauschung der Indices i, k die Grösse c_{iks} im Vorzeichen ändert, so ergiebt sich:

$$(X_k X_l) = \sum_i \sum_s \sum_t (- c_{iks} c_{lst} - c_{lis} c_{kst}) x_i \frac{\partial f}{\partial x_t} -$$

Diese letzte Formel geht dann vermöge der dreiglie rigen Relationen zwischen den $c_{ik\sigma}$, die aus der Jacobischen Identität folgen, nämlich:

$$\sum_{\sigma} c_{kl\sigma}\, c_{i\sigma t} = \sum_{\sigma} (c_{li\sigma}\, c_{k\sigma t} - c_{ik\sigma}\, c_{l\sigma t}),$$

in: $(X_k X_l) = \sum_i \sum_\sigma \sum_t \left(c_{kl\sigma}\, c_{i\sigma t}\, x_i \frac{\partial f}{\partial x_t}\right)$ über

Aber $\sum_i \sum_t c_{i\sigma t}\, x_i \frac{\partial f}{\partial x_t}$ ist direct X_σ. Daher

haben wir $(X_k X_l) = \sum_\sigma c_{kl\sigma}\, X_\sigma$,

was zu beweisen war.

Uebrigens gilt dieser Beweis nur für den allgemeinen Fall, wo die Matrix des $\begin{vmatrix} c_{i1s} \\ c_{i2s} \\ \cdots \\ c_{ik s} \end{vmatrix} \gtrless 0$

d.h., wo es keine Constante a_k giebt, so daß $\sum a_k c_{ik\sigma} = 0$ für alle Wertepaare i, σ.

Gibt es nämlich solche Constante a_k, so sind die r infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe nicht linar unabhängig, die Gruppe enthält gar nicht r Parameter und es kann davon, daß sie die gewünschte Zusammensetzung habe, gar nicht die Rede sein.

Da wird man sich nun folgendermaßen helfen können. Mögen zwischen den $c_{ik\sigma}$ ρ linear unabhängige Bedingungsgleichungen:

$$\sum a_k c_{ik\sigma} = 0, \quad \sum b_k c_{ik\sigma} = 0 \ldots$$ (für alle Werte der i, σ), aber nicht mehr bestehen. Nun sollen die Relationen statt haben:

$$(\mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}_k) = \sum c_{ik\sigma} \mathfrak{X}_\sigma .$$

Wir schließen, daß

$$(\mathfrak{X}_i, \sum \varphi_{a_k} \mathfrak{X}_k) = 0$$

$$(\mathfrak{X}_i, \sum \varphi_{b_k} \mathfrak{X}_k) = 0 \text{ etc.}$$, für alle Werte von i, so daß ρ linear unabhängige infinitesimale Transformationen vorhanden sind:

$$\sum a_k \mathfrak{X}_k, \sum b_k \mathfrak{X}_k, \ldots$$ (und natürlich nicht mehr), die mit den anderen $\mathfrak{X}$ im Klammerausdruck verbunden identische Null ergeben.

Diese ρ infinitesimalen Transformationen wollen wir uns jetzt von vornherein mit unter die

$X_1^c, \ldots X_r^c$ aufgenommen denken, und zwar als die ρ letzten derselben. Die Constanten $c_{ik\sigma}$ werden dann für i oder $k > (r-\rho)$ identisch verschwinden, übrigens aber zwischen den nicht verschwindenden $c_{ik\sigma}$ für alle Werte der i, σ keine Relation der Form $\sum_k^{r-\rho} a_k c_{ik\sigma} = 0$ bestehen können. Auf solche Weise haben wir das System unserer $c_{ik\sigma}$ auf eine gewisse Normalform gebracht, mit der wir nun weiter operieren.

Wir schreiben nämlich zunächst die infinitesimale Transformation der zugehörigen adjungierten Gruppe an (deren $r-\rho$ sind, welche als linear unabhängig zu gelten haben):

$$X_k^c(f) = \sum_i \sum_\sigma c_{ik\sigma} x_i \frac{\partial f}{\partial x_\sigma}$$

$$(\text{für } k = 1, 2, \ldots r-\rho)$$

und fügen nun, indem wir noch ρ neue veränderliche $x_{r+1}, \ldots x_{r+\rho}$ einführen, die folgenden ρ infinitesimalen Transformationen hinzu:

$$X_{r-\rho+1}^c(f) = x_{r+1} \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}$$

$$\vdots$$

$$X_r^c(f) = x_r \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

Da wird man sich nun folgendermaßen helfen können. Mögen zwischen den $c_{ik\sigma}$ ρ linear unabhängige Bedingungsgleichungen:

$$\sum a_k c_{ik\sigma} = 0, \quad \sum b_k c_{ik\sigma} = 0 \ldots$$ (für alle Werte der i, σ), aber nicht mehr bestehen. Nun sollen die Relationen statt haben:

$$(\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}_k) = \sum c_{ik\sigma} \mathfrak{H}_\sigma .$$

Wir schließen, daß

$$(\mathfrak{H}_i, \sum \varphi_{a_k} \mathfrak{H}_k) = 0$$

$$(\mathfrak{H}_i, \sum \varphi_{b_k} \mathfrak{H}_k) = 0 \text{ etc.}$$, für alle Werte von i, so daß ρ linear unabhängige infinitesimale Transformationen vorhanden sind:

$$\sum a_k \mathfrak{H}_k, \sum b_k \mathfrak{H}_k, \ldots .$$ (und natürlich nicht mehr)

die mit den anderen $\mathfrak{H}$ im Klammerausdruck verbunden identische Null ergeben.

Diese ρ infinitesimalen Transformationen wollen wir uns jetzt von vornherein mit unter die

$X_1^c, \ldots X_r^c$ aufgenommen denken, und zwar als die ρ letzten derselben. Die Constanten $c_{ik\sigma}$ werden dann für i oder $k > (r-\rho)$ identisch verschwinden, übrigens aber zwischen den nicht verschwindenden $c_{ik\sigma}$ für alle Werte der i, σ keine Relation der Form $\sum_k^{r-\rho} a_k c_{ik\sigma} = 0$ bestehen können. Auf solche Weise haben wir das System unserer $c_{ik\sigma}$ auf eine gewisse Normalform gebracht, mit der wir nun weiter operieren.

Wir schreiben nämlich zunächst die infinitesimale Transformation der zugehörigen adjungierten Gruppe an (deren selbst nur $r-\rho$ sind, welche als linear unabhängig zu gelten haben):

$$X_k^c(f) = \sum_i \sum_\sigma c_{ik\sigma} x_i \frac{\partial f}{\partial x_\sigma}$$

$$(\text{für } k = 1, 2, \ldots r-\rho)$$

und fügen nun, indem wir noch ρ neue veränderliche $x_{r+1}, \ldots x_{r+\rho}$ einführen, die folgenden ρ infinitesimalen Transformationen hinzu:

$$X_{r-\rho+1}^c(f) = x_{r+1} \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}$$

$$\vdots$$

$$X_r^c(f) = x_r \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

Die so erhaltenen r infinitesimalen Transformationen, welche gewiss linear unabhängig sind, erfüllen dann in der That genau die Bedingungen $(X_i^c X_k^c) = \sum_s c_{iks} X_s^c$, unter den c_{iks} die invarianten Werte unserer Constanten verstanden. Hiermit ist also in dem speciellen Falle zwischen den ursprünglichen c_{iks} bestehender linearer Relationen in der That dasselbe geleistet, wie vorhin im allgemeinen Falle, und unser Satz ist somit in allen Fällen bewiesen.

Bo. 22 VI 93 Wir haben das letzte Mal von den Constanten c_{iks} gesprochen, welche die Zusammensetzung einer Gruppe ausmachen. dieselben mussten gewissen algebraischen Beziehungen einfacher Art genügen. Es ist dementsprechend ein rein algebraisches Problem, alle Typen der Zusammensetzung, die es für r Parameter giebt, aufzuzählen

In dieser Hinsicht sei neben den Untersuchungen von Lie folgende Litteratur genannt:

Engel, Leipziger Berichte (1886)

Killing, Math. Ann. Bd. 31, 33, 34 u. 36 (1887-1889)
Umlauf, Dissertation, Leipzig (1891.)
Maurer in Strassburg, Ann. 39 (1891.)

Letzterer wirft insbesondere die Frage auf, wie die Constanten c_{iks} beschaffen sein müssen, damit die adjungirte Gruppe von der vorliegenden sprachen, algebraische Coefficienten besitzt. – Endlich Cartan, der in den Comptes Rendus 1893, N: 16 und 18 die Untersuchungen von Killing einer eingehenden Discussion unterwirft. Wir berichten hier insbesondere über die Lehre von der Zerlegung der Gruppe.

Was versteht man unter dieser Theorie und welches ist innerhalb der sonstigen Lie'schen Untersuchungen ihre Bedeutung? Um eine Beantwortung dieser Frage zu geben, müssen wir etwas weiter ausholen und zunächst von den gewöhnlichen Substitutionsgruppen berichten, wie sie in der Lehre von den algebraischen Gleichungen zur Geltung kommt. Eine solche Substitutionsgruppe möge n Vertauschungen enthalten, wir wollen sie daher mit G_n bezeichnen, so dass der Index n, wie wir ausdrücklich hervorheben wollen, nicht die Zahl der Buchstaben, die vertauscht werden, bezeichnet. Nun untersuchen wir in der Lehre von den

Substitutionsgruppen, ob es in der G_n eine, um, fassendste ausgezeichnete Untergruppe $G_{n'}$ " giebt.

Was überhaupt eine ausgezeichnete Untergruppe ist, wissen wir ja bereits; als eine, umfassendste ausgezeichnete " Untergruppe bezeichnet man dann eine solche ausgezeichnete Gruppe, die selbst nicht in einer höheren ausgezeichneten Untergruppe der G_n enthalten ist, sondern nur in der G_n selbst.

In dieser $G_{n'}$ suchen wir dann abermals eine umfassendste ausgezeichnete Untergruppe $G_{n''}$ u. so fahren wir fort, bis wir schliesslich zu der Identität als der letzten Untergruppe gelangen. Dieses Schema der Gruppe G_n mit den auf einander folgenden umfassendsten ausgezeichneten Untergruppen bezeichnet man als eine Zerlegung der G_n. Nun kann es natürlich sein, dass eine Gruppe G_n mehrere umfassendste ausgezeichnete Untergruppen neben einander enthält, von denen keine in den anderen enthalten ist, so dass sich verschiedene Zerlegungen der Gruppe ergeben. Es kann je, doch auch sein, dass eine Gruppe G_n keine andere ausgezeichnete Untergruppe enthält als die Identität. Dann nennt man nach Galois die vorliegende Gruppe einfach, während man

sonst von einer zusammengesetzten Gruppe spricht. (Hier bedeutet also das Wort „Zusammensetzung" natürlich ganz etwas anderes wie in letzter Stunde.)

Die Zahlen $\frac{n}{n'}$, $\frac{n}{n''}$, $\frac{n}{n'''}$ u.s.w. nennt C. Jordan als die Faktoren der Composition.

Betreffs derselben hat er in seinem Buche „Traité des substitutions" ein sehr wichtiges und interessantes Theorem aufgestellt. Wir sahen bereits, dass der Process der Zerlegung einer Gruppe keineswegs notwendig ein endlicher ist; man kann demnach auch verschiedene Faktoren der Composition erhalten. C. Jordan hat dann den wichtigen Satz bewiesen, dass die Faktoren der Composition, welche sich bei verschiedener Zerlegung ein und derselben Gruppe ergeben, nur durch die Reihenfolge verschieden sein können. Dieser Satz hat nun in der Gleichungstheorie auch seine sehr gute Bedeutung, die wir doch auch erwähnen müssen. Es sei eine beliebige Gleichung $f_n = 0$ vorgelegt; der Index n möge nicht den Grad, sondern wie, der die Anzahl der Vertauschungen bezeichnen, welche die zu den Gleichungen gehörende Galois-

sche Gruppe G_n darbietet. So oft man dann für G_n ein Zerlegungsschema hat, so oft kann man die Gleichung $f_n = 0$ auf eine Reihenfolge anderer Gleichungen zurückführen. Diese Hülfsgleichungen lauten in Anlehnung an das aufgestellte Zerlegungsschema:

$$f_{\frac{n}{n'}} = 0,\ f_{\frac{n'}{n''}} = 0,\ \ldots \text{ u. so fort,}$$

wo $f_{\frac{n}{n'}} = 0$ eine Gleichung bedeutet, deren Galois'sche Gruppe $\frac{n}{n'}$ Vertauschungen enthält, $f_{\frac{n'}{n''}} = 0$ eine Gleichung, deren Galois'sche Gruppe $\frac{n'}{n''}$ Vertauschungen enthält u. s. w. Die von C Jordan eingeführten Factoren der Zusammensetzung bezeichnen also die Vertauschungszahlen, welche in den Galois'schen Gruppen der Hülfsgleichungen auftreten, und der von ihm aufgestellte Satz betreffend die Constanz der Factoren der Composition bedeutet hier, dass bei der Ersetzung von $f = 0$ durch Hülfsgleichungen die Gruppen der Hülfsgleichungen gewisse Vertauschungszahlen aufweisen müssen, wenn auch nicht gesagt ist, in welcher Reihenfolge sie dieselben aufweisen. Diese Theorie ist ganz besonders klar auseinandergesetzt von Holder

Ann. 34 (1886) pag. 28-39. Daselbst ergänzt Hölder den C. Jordan'schen Satz weiter dahin, dass für die Hülfsgleichungen, die man bei der Auflösung von $f_n = 0$ gebraucht, immer abgesehen von der Reihenfolge derselben nicht nur die Grade der Galois'schen Gruppe, sondern die Galois'schen Gruppen selbst eindeutig gegeben sind.

Nun wäre die Frage, wie weit alle diese Dinge ihr Analogon finden in der Lehre von den kontinuirlichen Transformationsgruppen.

Auf diese gegenseitige Beziehung hinzuweisen sollte gerade der Zweck der heutigen Stunde sein. Auch in der Theorie der Transformationsgruppen wollen wir uns ein Zerlegungsschema aufstellen.

Gegeben sei die endliche Gruppe G_r, wo r die Anzahl der Parameter in der Gruppe (nicht mehr die Anzahl der Transformationen selbst, die ja natürlich ∞ ist) bezeichnet. Es sei dann G_{r_1} eine „umfassendste ausgezeichnete" Untergruppe, d.h. eine solche ausgezeichnete Untergruppe, die in keiner anderen höheren ausgezeichneten Untergruppe enthalten ist. Innerhalb der Gruppe G_{r_1} suche man dann wieder eine „umfassendste ausgezeichnete" Untergruppe G_{r_2}, u. so fort, bis man schliesslich zu der

Untergruppe mit 0 Parametern, d.h. zu der Identität gelangt. Die Reihenfolge der Gruppen G_r, $G_{r'}$, $G_{r''}$ u.s.w. bezeichnet man wieder als das Zerlegungsschema der Gruppe und nennt die Zahlen: $r-r'$, $r'-r''$, $r''-r'''$ u.s.f. die Factoren der Zerlegung. Der Satz ist nun wieder der, daß diese Factoren der Zerlegung bei gegebener G_r, abgesehen von der Reihenfolge, in der sie zum Vorschein kommen und die möglicherweise abgeändert werden kann, feste Zahlen sind. Dieses Theorem hat Lie 1889 in Bd 14 der Leipziger Abhandlungen mitgetheilt in einer Arbeit „zur Theorie der Berührungstransformationen". Doch geht die angedeutete Analogie der Theorieen der Substitutionsgruppen und der Transformationsgruppen noch weiter.

Die Theorie der Substitutionsgruppen findet, wie wir sagten, in der Algebra ihre Anwendung und die Gruppeneigenschaften, welche die Galois'sche Gruppe zeigt, beherrschen die algebraischen Gleichungen. Etwas Entsprechendes giebt hier in der Theorie der Transformationsgruppen.

Wir können heute uns jedoch nur unbestimmt äußern, um wenigstens die Gedanken auf diese Punkte hinzulenken. Lie betrachtet gewisse

Differentialgleichungen, die durch eine endliche continuirliche Transformationsgruppe G mit r Parametern charakterisirt sind. Wenn man nun diese G_r zerlegt, so dass die Untergruppen $G_{r'}$, $G_{r''}$ u. s. w. auftreten, so geht den einzelnen Schritten dieser Zerlegung die Auflösung der vorgelegten Differentialgleichungen $f_n = 0$ durch Hülfsgleichungen parallel, die entsprechend durch $f_{r-r'} = 0$, $f_{r'-r''} = 0$ u. s. w. zu bezeichnen sind. Die Factoren der Zerlegung der Gruppe geben also an, wie viel Parameter in der Gruppe dieser Hülfsgleichungen auftreten. Und da die Factoren der Zerlegung abgesehen von der Reihenfolge festliegende Zahlen sein sollen, so wird dies eben heissen, dass in der Gruppe dieser Hülfsgleichungen, sofern man eben von ihrer Reihenfolge absieht, bestimmte Parameter auftreten. Es ist nun gar kein Zweifel, dass auch die Höldersche Erweiterung des Satzes hier ihre analoge Gültigkeit behält. Man wird daher sagen dürfen, dass nicht nur die Parameterzahlen der Gruppen, sondern diese Gruppen selber gegeben sind.

Es giebt nun einen besonders bemerkenswerthen Fall des so bezeichneten allgemeinen

Schemas, das ist derjenige, in dem die Factoren der Zerlegung $n - n'$, $n' - n''$, $n'' - n'''$ u. so fort sämtlich gleich 1 sind. Dann kommt man also auf lauter Kümmergleichungen mit einer eingliedrigen Gruppe. Nun besteht der Satz, daß eine Kümmergleichung dann und nur dann durch Quadraturen, lediglich werden kann, wenn ihre Gruppe eingliedrig ist. Wir schließen hieraus, daß die vorgelegte Gleichung $f_r = 0$ auch nur dann u. stets dann durch eine Reihenfolge von Quadraturen erledigt werden kann, wenn alle diese Differenzen $r - r'$, $r' - r''$ u.s.w. fort gleich 1 sind, und deshalb nennt Lie eine so beschaffene Gruppe G_r eine integrable Gruppe. In Rücksicht auf unsere Analogie fügen wir noch hinzu, daß diese Kümmergleichungen, welche durch eine Quadratur erledigt werden können das Entsprechende wird zu den algebraischen Gleichungen, welche durch ein Wurzelzeichen aufgelöst werden können, den sogenannten Abel'schen Gleichungen.

Beidemal haben wir eine cyclische Gruppe, das eine Mal eine eingliedrige continuirliche Transformationsgruppe, das andere Mal eine cyclische Gruppe von Buchstabenvertauschungen.

Mit dem Vorstehenden eröffnet sich zugleich

ein Ausblick auf die rationelle Behandlung der Differentialgleichungen, mit der wir uns bald näher zu beschäftigen haben werden. Darin liegt ja gerade eine Hauptleistung der Lie'schen Gruppentheorie ausgesprochen, dass sie die hier vorliegenden algebraischen Fragen in principieller Weise zu behandeln gestattet. Vergleiche übrigens eine Auseinandersetzung von Drach in S. 19 der Comptes Rendus von 1893.

[3 II 93.] Heute kommen wir nun zu dem Beweise der bereits genannten Fundamentalsätze der Lie'schen Gruppentheorie, dass die unendlich kleinen Transformationen in ihrer Combination und Wiederholung dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe bilden, wenn die Relationen gelten $(X_i X_k) = \sum c_{ik\sigma} X_\sigma$, wo die $c_{ik\sigma}$ Constante bezeichnen. Wir schliessen uns bei diesem Beweise einer Darstellung von Lie an, die sich in den Leipziger Berichten 1890 pag. 453 ff. findet; dieselbe bedient sich fast gar nicht der Rechnung, sondern operirt besonders mit geometrischen Überlegungen, die sich auf einen Raum von höheren Dimensionen beziehen, und giebt sonach ein ech-

les Beispiel der Lie'schen Denkweise überhaupt.

Wir zerlegen den Beweis der besseren Uebersicht wegen in einzelne Teile:

1.) Aus den r infinitesimalen Transformationen $X_1, X_2 \dots, X_r\,(f)$ gewinnen wir als allgemeinste unendlich kleine Transformation die lineare Verbindung $t_1 X_1(f) + \dots + t_r X_r(f)$, woselbst die Grössen $t_1, t_2 \dots t_r$ Parameter bezeichnen.

Aus dieser allgemeinsten Transformation denken wir durch unendliche Wiederholung eine endliche Transformation ergeugt; dieselbe ist dadurch charakterisirt, dass sie zufolge eine beliebige Function f in die neue Function f' überführt, wie es die folgende Gleichung angiebt:

$$f' = f + \frac{\sum t_i X_i(f)}{1} + \sum\sum \frac{t_i t_k X_i X_k\,(f)}{1.\ 2} + \sum\sum\sum \frac{t_i t_k t_e X_i X_k X_e\,(f)}{1.\ 2.\ 3.}$$

2.) Es soll nun gezeigt werden, unter welchen Bedingungen die hiermit gewonnenen endlichen Transformationen eine Gruppe bilden, d. h. welche Relationen müssen die X_i erfüllen, damit je 2 Transformationen der aufgestellten ∞^r Schaar

mit einander verbunden wieder eine Transformation der Schaar geben?

Wir wollen die einzelne Transformation in der ∞^r Schaar allgemein mit T bezeichnen; T_a und T_b mögen 2 bestimmte beliebig ausgewählte Transformationen dieser Schaar sein.

Dann soll also untersucht werden, wann $T_a \cdot T_b = T$ ist, d.h. wann T_a u. T_b nacheinander angewandt wieder eine Transformation T der Schaar ergeben.

3) Wir befinden uns zunächst in Raum von n Dimensionen, dessen einzelne Punkte durch die Coordinaten $x_1, x_2 \ldots x_n$ festgelegt sind.

Wenn wir dann die Transformationen T unserer Schaar auf einen willkürlich ausgewählten Punkt anwenden, so ist die Frage, wie vielfach unendlich die Gesammtheit aller aus diesem einen Punkte entstehenden transformirten Punkte ist. Sagen wir, der Punkt nimmt ∞^ρ neue Lagen an; dann können wir nun behaupten, dass $\rho > 0$ und nicht größer als r ist. Doch wollen wir einmal 2 Punkte neben einander betrachten mit den Coordinaten $x_1' x_2' \ldots x_n'$ darauf ein Punktepaar,
$x_1'' x_2'' \ldots x_n''$,

ein Punktquadrupel u. so fort, schließlich r Punkte oder ein r – Eck mit den Coordinaten:

$$\begin{matrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^r & x_2^r & \dots & x_n^r \end{matrix}$$

Dann behaupten wir, daß die Unbestimmtheit, die uns stört, wenn wir nur einen Punkt oder ein Punktepaar u. s. w. betrachten, sicher fortfällt, sobald wir ein r – Eck von Punkten betrachten, – oder auch ein $(r+1)$ Eck, ein $(r+2)$ Eck u. so fort –.

Ein n – Eck wird nämlich bei der Gesamtheit der Transformationen T genau ∞^r Lagen annehmen, ebenso ein $(r+1)$ Eck u. s. w.

4) Diesen Hülfssatz gilt es zunächst zu beweisen. Möge ein einzelner Punkt durch die Transformationen T ∞^ρ neue Lagen annehmen, wobei $0 < \rho \leqq n$ ist, zwei Punkte dagegen oder ein Punktepaar möge $\infty^{\rho'}$ Lagen annehmen, wobei wieder $0 < \rho' \leqq n$ gilt.

Dann wollen wir zunächst nachweisen, daß, wenn $\rho < n$ ist, notwendig $\rho' = \rho$, und nur, wenn $\rho = r$ ist, $\rho' = \rho$ ist. Dies ergiebt sich folgender-

massen: Wenn der erste Punkt x' durch die ∞^r Transformationen der Schaar nur in ∞^s neue Lagen übergeht, dann muss er jedenfalls stets durch ∞^{r-s} Transformationen in dieselbe Lage y' übergeführt werden. Würde nun das durch Hinzunahme des beliebigen zweiten Punktes x'' entstehende Punktepaar x' u. x'' gleich, falls nur ∞^s Lagen durch sämmtliche Transformationen Tannehmen, so müssten die ∞^{r-s} Transformationen, welche den Punkt x' nach y' führen, jeden Raumpunkt x'' auch nur in einen Punkt y'' überführen, oder auch in mehrere Punkte, jedoch nur in eine endliche Zahl verschiedener Punkte, was dann in unserer Schreibweise auf dasselbe hinauskommt. Mit anderen Worten: die neue Lage y' des Punktes x' würde zugleich eine bestimmte neue Lage y'' des beliebigen zweiten Punktes x'' bedingen für die sämtlichen ∞^{r-s} Transformationen. Wird aber jeder Raumpunkt in einen bestimmten Raumpunkt übergeführt, so kann nur von einer einzigen Transformation die Rede sein, nicht von einer Schaar von Transformationen. Daher müsste ∞^{r-s-1}, d. h. $n-s$ sein. Ist also $s<n$,

so muss notwendig ϱ' grösser als ϱ sein. –

In derselben Weise ist dann weiter zu schliessen, dass die Dimensionszahl ϱ'' der Mannigfaltigkeit aller neuen Lagen für ein Punktetripel jedenfalls um 1 grösser sein muss als ϱ', wenn eben ϱ' noch nicht gleich r ist, u. so fort.

Unser Ergebniss wollen wir in der folgenden Tabelle kurz zusammenstellen:

Ein Eineck kann durch die Transformationen T ∞^{ϱ} Lagen annehmen, wo $\varrho = 1, 2, \ldots r$ sein mag.
ein Zweieck kann dann
$\infty^{\varrho'}$ Lagen annehmen, $\varrho' = 2, 3, \ldots r$ " "
ein Dreieck $\infty^{\varrho''}$ Lagen $\varrho'' = 3, 4, \ldots r$ " "
u. so fort.

Schliesslich muss ein n-Eck hiernach sicher ∞^{r} Lagen annehmen, dasselbe gilt natürlich um so mehr für ein $(n+1)$ Eck etc.

5) Diesen Hülfssatz wollen wir nun benutzen um unsere Fragestellung, wann die Aufeinanderfolge $T_a \cdot T_b$ wieder eine Transformation der Schaar giebt, (d.h. wann wir es mit einer Gruppe T zu thun haben) in eine aequivalente geometrische Form überzuführen. Dass unsere Reine Gruppe bilde, drückt sich doch darin aus, dass $T_a \cdot T_b = T$

ist. wir können dies jedoch auch in der Forderung aussprechen, dass die Transformation $T_\alpha \cdot T_\beta$ nicht mehr Parameter enthalten soll, als das Symbol T selber, nämlich r Parameter. Dieses aber können wir an dem Verhalten eines beliebigen $(r+1)$-Ecks prüfen. Das $(r+1)$ Eck nimmt bei den Transformationen T ∞^r Lagen an, wie wir eben gezeigt haben. Wenn wir nun den Nachweis führen können, dass es bei den Transformationen T_α T_β auch nur diese ∞^r Lagen annimmt, dann sind wir sicher, dass die $T_\alpha \cdot T_\beta$ nur r. Parameter enthalten. Denn enthielten sie $(r+1)$ Parameter, so würde das $(r+1)$ Eck mindestens $\infty^{(r+1)}$ Lagen annehmen. Dies also, so wird zu zeigen sein, wenn wir wollen, dass die T eine Gruppe bilden.

6. Wir sagen nun, dass das einzelne $(r+1)$ Eck des Raumes von n Dimensionen durch die Coordinaten seiner Ecken:

$$\begin{cases} x_1' \ldots x_n' \\ x_1'' \ldots x_n'' \\ \vdots \\ x_1^{(r+1)} \ldots x_n^{(r+1)} \end{cases}$$

festgelegt wird. Das $(n+1)$ Eck können wir

daher auch ansehen als ein Eineck in einem Raum von $(r+1)n$ Dimensionen. Aus dem einzelnen Punkt dieses $R_{(r+1)n}$ entstehen dann durch unsere Transformationen T ∞^r neue Punkte. Nun wollen wir alle einzelnen Punkte einer in diesem $R_{(r+1)n}$ enthaltenen bestimmten Mannigfaltigkeit nehmen, nämlich einer $M_{(r+1)n-r)}$ d.h. einer Mannigfaltigkeit von $(r+1).n-r$ Dimensionen. Von jedem dieser Punkte denken wir uns eine M_r ausgehend, nämlich die Mannigfaltigkeit der ∞^n Punkte, die aus dem einzelnen Punkte durch die Transformationen T entstehen. Auf diese Weise erhalten wir dann gerade den Gesammtraum $R_{(r+1).n}$.

Wenn wir nun jetzt verlangen, dass die Punkte unseres höheren Raumes durch die Transformationen T_a T_b nicht mehr Lagen annehmen sollen als durch die T_a allein, dann kommt dies augenscheinlich darauf hinaus zu verlangen, dass unsere Mannigfaltigkeiten M_r durch die Transformationen T_b in sich selbst übergeführt werden.

Unsere r infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \ldots X_r(f)$ werden also dann und nur

dann eine r-gliedrige Gruppe ergeben, wenn ihnen gegenüber der Raum von (r-1) n Dimensionen der durch die (r+1) Ecke des n dimensionalen Raumes vorgestellt wird, sich diesen infinitesimalen Transformationen gegenüber zerlegt in lauter Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen, (d h in $\infty^{(r+1)n-r} M_r$) die vermöge der infinitesimalen Transformationen in sich verschoben werden.

Die hiermit bezeichnete Frage kommt nun weiter darauf hinaus, zu untersuchen, wann ein gewisses System von Differentialgleichungen ein vollständiges System bildet. Hierin beruht gerade der anzuwendende Kunstgriff, wie wir in nächster Stunde noch ausführlich zu betrachten haben. —

[24 VI 93.]

Das Symbol der einzelnen infinitesimalen Transformation Xf wird ausführlich geschrieben: $\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ lautet; dieser Ausdruck multiplicirt mit δt ist eben das Maß der Aenderung, welche die beliebige Function f bei

Aenderung der Transformation $\mathfrak{X}'(f)$ erleidet. Die Aenderung des einzelnen Punktes $x_1, \ldots x_n$ wird hiernach, wie wir wissen, gegeben durch:

$$\delta x_1 = \xi_1 \delta t.$$
$$\delta x_2 = \xi_2 \delta t$$
$$\vdots$$
$$\delta x_n = \xi_n \delta t.$$

Wenn wir mehrere Punkte $x', x'' \ldots x^{(r+1)}$ neben einander betrachten, so wird natürlich für jeden einzelnen das letzte Schema der Coordinaten zuwachse gelten. Und denken wir jetzt eine beliebige Function F, die sowohl von dem x', wie den $x'', x'' \ldots x^{(r+1)}$ abhängt, so wird für diese die infinitesimale Transformation folgendermassen lauten:

$$\left(\xi_1' \frac{\partial F}{\partial x_1'} + \xi_2' \frac{\partial F}{\partial x_2'} \ldots \xi_n' \frac{\partial F}{\partial x_n'}\right) + \left(\xi_1'' \frac{\partial F}{\partial x_1''} + \xi_2'' \frac{\partial F}{\partial x_2''} \ldots \xi_n'' \frac{\partial F}{\partial x_n''}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\xi_1^{(r+1)} \frac{\partial F}{\partial x_1^{(r+1)}} + \xi_2^{(r+1)} \frac{\partial F}{\partial x_2^{(r+1)}} \ldots \xi_n^{(r+1)} \frac{\partial F}{\partial x_n^{(r+1)}}\right),$$

oder algebraisch geschrieben:

$$\mathfrak{X}'(F) + \mathfrak{X}''(F) + \ldots + \mathfrak{X}^{(r+1)}(F).$$

Dies ist dann die infinitesimale Transformation, die wir dem höheren Raum von $(r+1).n$ Dimensionen zu Grunde legen müssen.

8.) Wie wir nun für den R_n r infinitesimale Transformationen X_i^{ν} haben, so haben wir auch für den $R_{(r+1)n}$ die folgenden r infinitesimalen Transformationen:

$$X_1^{\nu\prime}(F) + X_1^{\nu\prime\prime}(F) + \ldots + X_1^{\nu(r+1)}(F) = Y_1(F)$$
$$X_2^{\nu\prime}(F) + X_2^{\nu\prime\prime}(F) + \ldots + X_2^{\nu(r+1)}(F) = Y_2(F)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_r^{\nu\prime}(F) + X_r^{\nu\prime\prime}(F) + \ldots + X_r^{\nu(r+1)}(F) = Y_r(F)$$

Indem wir dann verlangen, dass sich unser Raum von $(r+1).n$ Dimensionen gegenüber unseren r infinitesimalen Transformationen in lauter Mannigfaltigkeiten r^{ter} Dimension zerspalten lässt, besagen wir einfach, dass die linearen partiellen Differentialgleichungen für F, die durch Nullsetzen unserer letzten Ausdrücke entstehen, ein vollständiges System bilden sollen. Hiermit haben wir den am Schlusse der vorigen Stunde angedeuteten Ansatz gewonnen. Der bis jetzt erreichte Fortschritt ist der, dass wir die ursprüngliche Frage, wann die infinitesimalen

Transformationen $X_1^r(F), X_2^r(F) \ldots X_r^r(F)$ eine r gliedrige Gruppe erzeugen, umgewandelt haben in die andere Frage, wann die hier vorliegenden Differentialgleichungen mit $(r+1)n$ Variabeln ein vollständiges System bilden.

9) Nun wissen wir, dass diese r Gleichungen ein vollständiges System bilden, wenn die Klammerausdrücke $(Y_i\, Y_k)$ sich linear aus den Y_σ zusammensetzen, also die Beziehungen gelten:

$$(Y_i\, Y_k) = \sum_1^r{}_\sigma \omega_{ik\sigma}\, Y_\sigma,$$ wo die ω irgendwelche Functionen der $x^1 x^n \ldots x^{(r+1)}$ sind.

Aber bemerken Sie sofort, weil sich das Y_i aus einzelnen Bestandteilen $X_i^{r\,1}, X_i^{r\,n} \ldots X_i^{r(r+1)}$ aufbaut, deren jeder nur von den Coordinaten eines Eckpunktes abhängt, darum spaltet sich der Klammerausdruck $(Y_i\, Y_k)$ einfach in die Summe: $(X_i^{r\,1} X_k^{r\,1}) + (X_i^{r\,n}, X_k^{r\,n}) + \ldots + (X_i^{r(r+1)}, X_k^{r(r+1)})$, gerade wie das Y_σ der rechten Seite der Gleichung $(Y_i\, Y_k) = \sum_1^{rn}{}_\sigma\, \omega_{ik\sigma}\, Y_\sigma$ sich spaltet in $X_\sigma^{r\,1} + X_\sigma^{r\,n} + \ldots + X_\sigma^{r\,(r+1)}$. Da wird dann

soweiter $(\mathfrak{X}_i^{\prime}, \mathfrak{X}_k^{\prime})$ ein Ausdruck der folgenden Form sein:

$$(\mathfrak{X}_i^{\prime}, \mathfrak{X}_k^{\prime}) = \sum_1^n \eta'_{ikt} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x'_t}$$

$$(\mathfrak{X}_i^{\prime\prime}, \mathfrak{X}_k^{\prime\prime}) = \sum_1^n \eta''_{ikt} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x''_t} \text{ u. so fort, d.h.}$$

der erste Klammerausdruck wird nur die $\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x'}$, der zweite nur die $\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x''}$ u. so soweiter enthalten.

Da nun ebenso auf der rechten Seite unserer Gleichungen die $\mathfrak{X}_\sigma'$ nur die Coordinaten x', die $\mathfrak{X}_\sigma''$ nur die Coordinaten x'' enthalten, so schliessen wir, dass die einzelnen Bestandtheile beider Seiten analog entsprechen, d.h. dass:

$$(\mathfrak{X}_i^{\prime}, \mathfrak{X}_k^{\prime}) = \sum_1^r \omega_{ik\sigma} \cdot \mathfrak{X}_\sigma^{\prime},$$

$$(\mathfrak{X}_i^{\prime\prime}, \mathfrak{X}_k^{\prime\prime}) = \sum_1^r \omega_{ik\sigma} \cdot \mathfrak{X}_\sigma^{\prime\prime},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\mathfrak{X}_i^{(r+1)}, \mathfrak{X}_k^{(r+1)}) = \sum_1^r \omega_{ik\sigma} \cdot \mathfrak{X}_\sigma^{(r+1)} \text{ ist.}$$

Die Forderung, dass die Gleichungen $\gamma_i = 0$ ein vollständiges System bilden sollen, führt daher zu dem soeben hingeschriebenen Gleichungssystem, welches für jede Combination der Indices i, k gilt. Die $\omega_{ik\sigma}$ sind hier zunächst noch

unbekannte Functionen der sämmtlichen Argumente $x, x', x'', x''', \ldots x^{(r+1)}$.

10.) Nun sind wir sogleich am Schlusse. Es handelt nämlich, dass die ω_{iks} Constante sein müssen, die wir dann mit c_{iks} bezeichnen können.

Wenn dies aber der Fall ist, dann haben wir ja nachgewiesen, was wir wollten, dass nämlich nothwendig die Klammerausdrücke $(X_i^r X_k^r) - \sum c_{iks} X_s^r$ sind, wenn durch die Transformationen X_i^r eine Gruppe erzeugt werden sollte. Dass diese Bedingung dann zugleich hinreichend ist, erkennt man leicht, wenn man den Beweis gang rückwärts durchläuft. Den Beweis nun, dass die ω_{iks} Constante sind, erbringen wir folgendermassen: Unser letztes Schema enthielt im Ganzen für alle die möglichen $\frac{r(r-1)}{2}$ Combinationen der Indices i u. k $\frac{r.(r^2-1)}{2}$ Gleichungen. Zur Bestimmung der $\frac{r^2(r-1)}{2}$ Grössen ω_{iks} sind aber nur ebensoviel Gleichungen, also $\frac{r^2(r-1)}{2}$ Gleichungen nöthig.

Man kann daher z. B. alle Gleichungen bei Seite lassen, welche die letzte Gleichung $(X_i^{r(r+1)}, X_k^{r(r+1)}) = \sum_s^r \omega_{iks} X_s^{r(r+1)}$ für beliebige Wahl der Indices i, k umfasst, d. h. $\frac{n(n-1)}{2}$ Glei-

chungen, dann bleiben richtig $\frac{r.(r^2-1)}{2} - \frac{r.(r-1)}{2} = \frac{r^2(r-1)}{2}$ Gleichungen zur Bestimmung der Größen ω_{iks} übrig. Da jedoch die übrigen Gleichungen die Coordinaten $x_i^{(r+1)}$ der $(r-1)$ten Punktes gar nicht enthalten, so können dann auch die ω_{iks} nicht von den $x_i^{(r+1)}$ abhängen. Dasselbe gilt natürlich für die Coordinaten der übrigen Punkte x', x'', x''' ... .

Man kann eben immer aus dem Gleichungssystem die ω_{iks} so berechnen, daß man einen der $(r+1)$ Eckpunkte völlig bei Seite läßt; sie hängen daher von diesem einen Eckpunkt überhaupt gar nicht ab, und da dieser Eckpunkt ein beliebiger Eckpunkt ist, so hängen sie von keinem der $(r+1)$ Eckpunkte ab, d.h. <u>die Größen ω_{iks} sind Constante</u>, was zu beweisen war.

Der Gesammtbeweis gliedert sich, wie wir nochmals hervorheben wollen, daher folgendermaßen:

1) <u>Indem wir das $(r+1)$ Eck des n dimensionalen Raumes an Stelle des einzelnen Punktes als Element eines höheren Raumes einführen, werfen wir die ganze Frage darauf, daß die Gleichungen $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0 \ldots Y_r = 0$ ein vollständiges</u>

System bilden sollen.

2.) Die Bedingung hierfür zerlegt sich in, folge der besonderen Bauart der Y_i: so, dass die zunächst unbestimmten Factoren w_{ik} sich als constante Grössen erweisen. Wenn dies aber der Fall ist, dann haben wir ein vollständiges System und also eine Gruppe u. s. w.

Di. 28. VI 93.] An die bisherigen Betrachtungen über continuirliche, endliche Transformationsgruppen wollen wir nun specielle Ausführungen anschliessen, indem wir ihre Beziehung zu einigen Nachbargebieten angeben. Und zwar wollen wir diese Anwendung der Transformationsgruppen nach 5 Richtungen verfolgen. dieselben beziehen sich auf die folgenden Disciplinen:

1.) die gewöhnliche Invariantentheorie, 2. Theorie der complexen Zahlen aus n Hauptein heiten. 3. v. Helmholtz' Raumproblem, betreffend die Grundlagen der Geometrie. 4. Differentialinvarianten. 5. Integration von Differentialgleichungen. Natürlich stehen die genannten Einzelgegenstände nicht weiter

im logischen Zusammenhang, sondern sollen von uns unabhängig neben einander bespro chen werden.

Ad. 1. Was die gewöhnliche Invariantentheo rie betrifft, so beschränken wir uns auf den ein, fachsten Ansatz, da es uns nur darauf ankommt zu sehen, in welcher Weise dieselbe mit der Lie', schen Gruppentheorie zusammenhängt. Wir be, schränken uns daher auf die Betrachtung einer eingelnen binären Form. Die eingelne Form mag durch den Ausdruck:

$$f = A_0 x_1^n + A_1 x_1^{n-1} x_2 + A_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots$$

gegeben sein.

Man unterwirft nun in der Invariantentheorie die Variabeln x_1 u. x_2 irgendwelchen binären li. neaven Substitutionen, es sei

$$x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2$$
$$x_2' = \gamma x_1 + \delta x_2$$

u. die Determinante der Coefficienten $\alpha\delta - \beta\gamma = r$ gesetzt. Hierdurch möge aus der ursprünglichen Form f die neue Form:

$$f' = A_0' x_1'^n + A_1' x_1'^{n-1} x_2' + A_2' x_1'^{n-2} x_2'^2 + \dots$$

hervorgegangen sein. Hier ist also vermöge der angewandten Substitution $f' = f$.

Setzt man in die neue Form f' für x_1' u. x_2'

ihre Substitutionswerte ein, so erhält man:

$$F' = A_0' (\alpha x_1 + \beta x_2)^n + A_1' (\alpha x_1 + \beta x_2)^{n-1} (\gamma x_1 + \delta x_2) + \ldots$$

oder nach Potenzen von x_1 und x_2 geordnet:

$$F' = x_1^n (A_0' \alpha^n + A_1' \alpha^{n-1} \gamma + A_2' \alpha^{n-2} \gamma^2 + \ldots)$$
$$+ x_1^{n-1} x_2 (n A_0' \alpha^{n-1} \beta + \ldots\ldots\ldots\ldots)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vergleicht man dann diese so geordnete Form F' mit der ursprünglichen Form F, so findet man folgenden Zusammenhang der Coefficienten:

$$A_0 = A_0' \alpha^n + A_1' \alpha^{n-1} \gamma + A_2' \alpha^{n-2} \gamma^2 + \ldots$$
$$A_1 = n A_0' \alpha^{n-1} \beta + A_1' \alpha^{n-1} \delta + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d. h.

die alten Coefficienten A drücken sich als solche lineare Verbindungen der neuen Coefficienten A' aus, welche in den Coefficienten der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vom n^{ten} Grade sind.

Nun ist leicht zu sagen, was eine Invariante, der gewöhnlichen Invariantentheorie ist. Als solche versteht man einfach eine rationale ganze homogene Function $I(A_0, A_1 \ldots A_n)$ der Coefficienten A, welche bis auf eine Potenz der Substitutionsdeterminante r gleich ist der

selben rationalen ganzen homogenen Function $Y'(A_0', A_1', \ldots A_n')$ der Coefficienten A_0', d.h.

$$Y = r^\lambda \cdot Y'$$

Diese Definition kann man sehr leicht noch etwas modificiren. Man kann offenbar die Substitution zerlegen:

$$\left|\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\frac{\alpha}{\sqrt{r}} & \frac{\beta}{\sqrt{r}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{r}} & \frac{\delta}{\sqrt{r}}\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}\sqrt{r} & 0 \\ 0 & \sqrt{r}\end{matrix}\right|$$

und dementsprechend anstatt einer Transformation der Determinante r zunächst die zu dem ersten Factor der rechten Seite gehörige Transformation von der Determinante 1 und darauf die zu dem zweiten Factor gehörige Transformation anwenden, welch' letztere einfach durch: $x_1' = \sqrt{r} \cdot x_1$,

$x_2' = \sqrt{r}\, x_2$ gegeben wird. Bei dem ersten Schritt bleibt dann die invariante Form $Y(A_0 \ldots A_n)$ völlig ungeändert, bei dem zweiten Schritt tritt einfach r^λ als Factor hinzu. Lassen wir diesen zweiten Schritt, der nichts Wesentliches enthält, (da wir I aus

ihre Substitutionswerte ein, so erhält man:

$$F' = A_0'(\alpha x_1 + \beta x_2)^n + A_1'(\alpha x_1 + \beta x_2)^{n-1}(\gamma x_1 + \delta x_2)$$

oder nach Potenzen von x_1 und x_2 geordnet:

$$F' = x_1^n (A_0' \alpha^n + A_1' \alpha^{n-1}\gamma + A_2' \alpha^{n-2}\gamma^2 + \dots)$$
$$+ x_1^{n-1} x_2 (n \cdot A_0' \alpha^{n-1}\beta + \dots\dots\dots\dots)$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Vergleicht man dann diese so geordnete Form F' mit der ursprünglichen Form F, so findet man folgenden Zusammenhang der Coefficienten

$$A_0 = A_0' \alpha^n + A_1' \cdot \alpha^{n-1}\gamma + A_2' \alpha^{n-2}\gamma^2 + \dots$$
$$A_1 = n A_0' \alpha^{n-1}\beta + A_1' \alpha^{n-1}\delta + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

d. h.

die alten Coefficienten A drücken sich als solche lineare Verbindungen der neuen Coefficienten A' aus, welche in den Coefficienten der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vom n^{ten} Grade sind.

Nun ist leicht zu sagen, was eine <u>Invariante</u>, der gewöhnlichen Invariante ist. <u>Als solche versteht man</u> <u>rationale ganze homogene Fu</u> <u>der Coefficienten A, welche</u> <u>der Substitutions de</u>

u. s. w.

ysteme

der In-

elzen Fra-

gehen ha-

r Gruppen-

nächst die

r allgemei-

x_2, die wir zu-

4 erzeugenden in-

en:

3) $\delta x_1 = 0$, 4) $\delta x_1 = 0$

$\delta x_2 = x_1 \delta c$ $\delta x_2 = x_2 \delta d$.

x_1, x_2) wird dann durch

initesimale Zunahmen

hend durch die folgen-

esehen etwa von dem Diffe-

werden:

$x_2 \frac{\partial f}{}$ $= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\mathcal{H}_4 = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$.

drücklich als homogene Function des A voraus, setzen) ganz fort, dann gewinnen wir folgende neue Definition:

Eine Invariante ist eine rationale ganze homogene Function der Coefficienten, welche bei jeder linearen Transformation von der Determinante 1 ungeändert bleibt.

In wiefern spielt nun die Gruppentheorie hier hinein? Offenbar bilden doch die linearen Transformationen von der Determinante 1 eine Gruppe mit den Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die an die Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ gebunden sind, aber mit 3 Parametern. Aus dieser Transformationsgruppe wird eine andere ebenfalls dreigliedrige Gruppe für die Coefficienten $A_0, A_1, \ldots A_n$ abgeleitet und es handelt sich darum, Functionen der $A_0, A_1, \ldots A_n$ zu finden, welche bei dieser Gruppe unveränderlich sind.

Soweit kennzeichnet sich die Fragestellung als eine allgemeine Aufgabe der Gruppentheorie.

Speciell fügt dann die Invariantentheorie die Forderung hinzu, dass wir nach rationalen, ganzen homogenen Functionen fragen; hiermit wird von selbst die Untersuchung angeregt, welches etwa die niedrigsten Functionen dieser Art sind, wie sich

aus diesen die höheren zusammensetzen u. s. w. kurz alle die Theorieen betreffend volle Systeme von Invarianten, mit denen man sich in der Invariantentheorie beschäftigt. Auf diese letzten Fragen werden wir hier nicht weiter eingehen haben, doch wollen wir die Beziehung zur Gruppentheorie weiter verfolgen. Wir suchen zunächst die infinitesimalen Transformationen der allgemeinen linearen Substitution der x_1, x_2, die wir zu dem Zweck in der Gestalt schreiben:

$$x_1' = (1+a)\,x_1 + b\,x_2$$
$$x_2' = c\,x_1 + (1+d)\,x_2$$

Man gewinnt die folgenden 4 erzeugenden infinitesimalen Transformationen:

1) $\delta x_1 = x_1\,\delta a$, $\delta x_2 = 0$ 2) $\delta x_1 = x_2\,\delta b$, $\delta x_2 = 0$ 3) $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = x_1\,\delta c$ 4) $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = x_2\,\delta d$.

Irgend eine Function $f(x_1, x_2)$ wird dann durch diese Substitution infinitesimale Zunahmen erfahren, die entsprechend durch die folgenden 4 Symbole (abgesehen etwa von dem Differential δt) gegeben werden:

$$X_1 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1},\quad X_2 f = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1},\quad X_3 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2},\quad X_4 f = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

System bilden sollen.

2.) Die Bedingung hierfür zerlegt sich in, folge der besonderen Bauart der γ_i so, dass die zunächst unbestimmten Factoren w_{ik} sich als constante Grössen erweisen. Wenn dies aber der Fall ist, dann haben wir ein vollständiges System und also eine Gruppe u.s.w.

Di. 28. VI 93.] An die bisherigen Betrachtungen über continuirliche, endliche Transformationsgruppen wollen wir nun specielle Ausführungen anschliessen, indem wir ihre Beziehung zu einigen Nachbargebieten angeben. Und zwar wollen wir diese Anwendung der Transformationsgruppen nach 5 Richtungen verfolgen. dieselben beziehen sich auf die folgenden Disciplinen:

1.) die gewöhnliche Invariantentheorie, 2. Theorie der complexen Zahlen aus n Hauptheiten. 3. v. Helmholtz' Raumproblem, betreffend die Grundlagen der Geometrie. 4. Differentialinvarianten. 5. Integration von Differentialgleichungen. Natürlich stehen die genannten Einzelgegenstände nicht weiter

im logischen Zusammenhang, sondern sollen von uns unabhängig neben einander besprochen werden.

Ad. 1. Was die gewöhnliche Invariantentheorie betrifft, so beschränken wir uns auf den einfachsten Ansatz, da es uns nur darauf ankommt zu sehen, in welcher Weise dieselbe mit der Lie'schen Gruppentheorie zusammenhängt. Wir beschränken uns daher auf die Betrachtung einer einzelnen binären Form. Die einzelne Form mag durch den Ausdruck:

$$F = A_0 x_1^n + A_1 x_1^{n-1} x_2 + A_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots$$

gegeben sein.

Man unterwirft nun in der Invariantentheorie die Variabeln x_1 u. x_2 irgendwelchen binären linearen Substitutionen, es sei

$$x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2$$
$$x_2' = \gamma x_1 + \delta x_2$$

u. die Determinante der Coefficienten $\alpha\delta - \beta\gamma = r$ gesetzt. Hierdurch möge aus der ursprünglichen Form F die neue Form:

$$F' = A_0' x_1'^n + A_1' x_1'^{n-1} x_2' + A_2' x_1'^{n-2} x_2'^2 + \dots$$

hervorgegangen sein. Hier ist also vermöge der angewandten Substitution $F' = F$.

Setzt man in die neue Form F' für x_1' u. x_2'

ihre Substitutionswerte ein, so erhält man:

$$F' = A_0' (\alpha x_1 + \beta x_2)^n + A_1' (\alpha x_1 + \beta x_2)^{n-1} (\gamma x_1 + \delta x_2) + \ldots$$

oder nach Potenzen von x_1 und x_2 geordnet:

$$F' = x_1^n (A_0' \alpha^n + A_1' \alpha^{n-1} \gamma + A_2' \alpha^{n-2} \gamma^2 + \ldots)$$
$$+ x_1^{n-1} x_2 (n A_0' \alpha^{n-1} \beta + \ldots\ldots\ldots\ldots)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vergleicht man dann diese so geordnete Form F' mit der ursprünglichen Form F, so findet man folgenden Zusammenhang der Coefficienten:

$$A_0 = A_0' \alpha^n + A_1' \alpha^{n-1} \gamma + A_2' \alpha^{n-2} \gamma^2 + \ldots$$
$$A_1 = n A_0' \alpha^{n-1} \beta + A_1' \alpha^{n-1} \delta + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d. h.

die alten Coefficienten A drücken sich als solche lineare Verbindungen der neuen Coefficienten A' aus, welche in den Coefficienten der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vom n^{ten} Grade sind.

Nun ist leicht zu sagen, was eine <u>Invariante</u>, der gewöhnlichen Invariantentheorie ist. <u>Als solche versteht man einfach eine rationale ganze homogene Function $J(A_0 A_1 \ldots A_n)$ der Coefficienten A, welche bis auf eine Potenz der Substitutionsdeterminante r gleich ist der,</u>

selben rationalen ganzen homogenen Function $Y'(A_0', A_1', \ldots A_n')$ der Coefficienten A_0', d.h.

$$Y = r^\lambda \cdot Y'.$$

Diese Definition kann man sehr leicht noch etwas modificieren. Man kann offenbar die Substitution zerlegen:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{r} & \frac{\beta}{r} \\ \frac{\gamma}{r} & \frac{\delta}{r} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix}$$

und dementsprechend anstatt einer Transformation der Determinante r zunächst die zu dem ersten Factor der rechten Seite gehörige Transformation von der Determinante 1 und darauf die zu dem zweiten Factor gehörige Transformation anwenden, welch' letztere einfach durch: $x_1' = r \cdot x_1$,

$x_2' = r\, x_2$ gegeben wird. Bei dem ersten Schritt bleibt dann die invariante Form $Y(A_0 \ldots A_n)$ völlig ungeändert, bei dem zweiten Schritt tritt einfach r^λ als Factor hinzu. Lassen wir diesen zweiten Schritt, der nichts Wesentliches enthält, (da wir F aus

drücklich als homogene Function des A voraus, setzen) ganz fort, dann gewinnen wir folgen, de neue Definition:

Eine Invariante ist eine rationale ganze homogene Function der Coefficienten, welche bei jeder linearen Transformation von der Determinante 1 ungeändert bleibt.

In wiefern spielt nun die Gruppentheorie hier hinein? Offenbar bilden doch die linearen Transformationen von der Determinante 1 eine Gruppe mit den Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die an die Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ gebunden sind, aber mit 3 Parametern. Aus dieser Transformationsgruppe wird eine andere ebenfalls dreigliedrige Gruppe für die Coefficienten $A_0, A_1, \ldots A_n$ abgeleitet und es handelt sich darum, Functionen der $A_0, A_1, \ldots A_n$ zu finden, welche bei dieser Gruppe unveränderlich sind.

Soweit kennzeichnet sich die Fragestellung als eine allgemeine Aufgabe der Gruppentheorie.

Speciell fügt dann die Invariantentheorie die Forderung hinzu, dass wir nach rationalen, ganzen, homogenen Functionen fragen; hiermit wird von selbst die Untersuchung angeregt, welches etwa die niedrigsten Functionen dieser Art sind, wie sich

aus diesen die höheren zusammensetzen u. s. w. kurz alle die Theorieen betreffend volle Systeme von Invarianten, mit denen man sich in der Invariantentheorie beschäftigt. Auf diese letzten Fragen werden wir hier nicht weiter eingehen haben, doch wollen wir die Beziehung zur Gruppentheorie weiter verfolgen. Wir suchen zunächst die infinitesimalen Transformationen der allgemeinen linearen Substitution der x_1, x_2, die wir zu dem Zweck in der Gestalt schreiben:

$$x_1' = (1+a)x_1 + b x_2$$
$$x_2' = c x_1 + (1+d) x_2$$

Man gewinnt die folgenden 4 ergenden infinitesimalen Transformationen:

1) $\delta x_1 = x_1 \delta a$, $\delta x_2 = 0$; 2) $\delta x_1 = x_2 \delta b$, $\delta x_2 = 0$; 3) $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = x_1 \delta c$; 4) $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = x_2 \delta d$.

Irgend eine Function $f(x_1 x_2)$ wird dann durch diese Substitution infinitesimale Zunahmen erfahren, die entsprechend durch die folgenden 4 Symbole (abgesehen etwa von dem Differential δt) gegeben werden:

$$X_1 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_2 f = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_3 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad X_4 f = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Soll nun insbesondere die Determinante der Substitutionen gleich 1 sein, d.h. haben wir nur unsere dreigliedrige Gruppe vorliegen, so müssen wir stets $\delta a + \delta d = 0$ nehmen. dies aber kommt darauf hinaus, dass wir die infinitesimalen Transformationen X_1 u. X_4 stets in der Verbindung $(X_1 - X_4)(f)$ anzusetzen haben. Unter den linearen Transformationen für x_1, x_2 der Determinante 1 finden sich daher die 3 infinitesimalen Transformationen X_2, X_3 und $X_1 - X_4$.

Welche infinitesimale Transformationen erleiden nun also unsere Coefficienten A selbst?

Vermöge der ersten Substitution X_1

$$\delta x_1 = x_1 \delta a$$
$$\delta x_2 = 0$$

wird aus der Form f:

$$f' = A_0'(x_1 + x_1 \delta a)^n + A_1'(x_1 + x_1 \delta a)^{n-1} \cdot x_2 + \dots$$

oder in entwickelter Form

$$f' = A_0' x_1^n + A_1' x_1^{n-1} x_2 + \dots$$
$$+ \delta a (n A_0' x_1^n + (n-1) A_1' x_1^{n-1} x_2 + \dots)$$

Dieses soll nun gleich

$$f = A_0 x_1^n + A_1 x_1^{n-1} + \dots$$ sein. Setzen wir $A_0' = A_0 + \delta A_0$, $A_1' = A_1 + \delta A_1$ und so fort, so erhalten wir daher für die Incremente der A die

Formeln:

$$\delta A_\sigma = -n A_\sigma \delta\alpha$$
$$\delta A_1 = -(n-1) A_1 \delta\alpha$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aus ihnen ergibt sich weiter das Symbol zusammen:

$$Y_1(f) = -n A_\sigma \frac{\partial f}{\partial A_\sigma} - (n-1) A_1 \frac{\partial f}{\partial A_1} - (n-2) A_2 \frac{\partial f}{\partial A_2} - \cdots$$

Dieses Symbol stellt daher die infinitesimale Transformation dar, welche im Raume der A der Transformation X_1 entspricht. Analog stehen den Transformationen X_2, X_3, X_4 entsprechende Transformationen Y_2, Y_3, Y_4 der Coefficienten A gegenüber wie sie zusammengestellt die folgenden Formeln ergeben:

$$Y_1(f) = \left(-n A_\sigma \frac{\partial f}{\partial x_\sigma} - (n-1) A_1 \frac{\partial f}{\partial A_1} - \cdots\right)$$

$$Y_2(f) = \left(-n A_\sigma \frac{\partial f}{\partial A_1} - (n-1) A_1 \frac{\partial f}{\partial A_2} - \cdots\right)$$

$$Y_3(f) = \left(-A_1 \frac{\partial f}{\partial A_\sigma} 2 - A_2 \frac{\partial f}{\partial A_1} - 3 A_3 \frac{\partial f}{\partial A_2} - \cdots\right)$$

$$Y_4(f) = \left(-A_1 \frac{\partial f}{\partial A_1} - 2 A_2 \frac{\partial f}{\partial A_2} - \cdots\right)$$

Wollen wir uns hier jedoch wieder auf die in.

infinitesimalen Transformationen der x_1, x_2, die der Determinante 1 entsprechen, beschränken, dann ist y_1 u. y_4 stets nur in der Verbindung $y_1 - y_4$ anzuwenden.

Soll dann eine Function der $A_0 A_1 \ldots A_n$ bei den linearen Substitutionen der Variabeln x_1, x_2 der Determinante 1 ungeändert bleiben, also im allgemeinen Sinne eine Invariante sein, dann hat sie die 3 partiellen Differentialgleichungen zu erfüllen:

$$y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_1 - y_2 = 0.$$

(Soll sie im speciellen Sinne eine Invariante sei, so kommt natürlich wieder die Bedingung hinzu, dass eine rationale ganze homogene Function der A vorliegt.) Die so gewonnenen Differentialgleichungen sind nun keineswegs etwa neu, sondern bilden von Anfang an ein Hauptstück in der Invariantentheorie. Cayley, Sylvester u. Aronhold in den 50er Jahren legen dieselben vielfach zu Grunde. Auch sind diese Gleichungen immer in der hier benutzten Weise abgeleitet worden, nämlich durch Betrachtung infinitesimaler linearer Transformationen.

Wollen wir doch jetzt noch um die Verhältnisse völlig deutlich zu übersehen die Zusammensetzungsformeln aufstellen für die infinitesimalen Transformationen X_i^c u. Y_i^c. Die Y_i ergeben dabei offenbar dieselben Zusammensetzungsconstanten $c_{i\,k\,s}$, welche auch bei den X_i^c auftreten, in Uebereinstimmung damit, daß die Gruppe der Y mit der Gruppe der X isomorph ist. Es ist nun, wie die einfache Ausrechnung zeigt (um bei den Y zu bleiben):

$$(Y_1 Y_2) = -Y_2,\ (Y_1 Y_3) = -Y_3,\ (Y_1 Y_4) = 0$$

$$(Y_2 Y_3) = Y_4 - Y_1 (Y_2 Y_4) = -Y_3,\ (Y_3 Y_4) = Y_3,$$ und

zwar gelten diese Formeln für die allgemeine 4-gliedrige Gruppe.

Die Klammerausdrücke stellen sich also in der That dar als lineare Verbindungen der Symbole Y_i mit constanten Coefficienten. Beschränken wir uns auf die dreigliedrige Gruppe d.h. auf die Substitutionen der Determinante 1, dann lauten die entsprechenden Formeln:

$$(Y_1 - Y_4,\ Y_2) = -2Y_2,\ (Y_1 - Y_4,\ Y_3) = -2Y_3,\ (Y_2\ Y_3) = -(Y_1 - Y_4)$$

Wir fügen schließlich noch folgende Bemerkung hinzu:

Denkt man $A_0 \dots A_n$ als Coordinaten eines Raumpunktes im Raum von $n+1$ Dimensionen, so wird unser Raum vermöge der uniformularen Substitutionen d.h. der Substitutionen der Determinante 1 in lauter charakteristischen M_λ zerlegt werden und unsere partiellen Differentialgleichungen sagen aus, daß seine Invariante ist (im allgemeinen Sinne), wenn alle die Mannigfaltigkeiten $L = \text{const}$ aus charakteristischen M_λ zusammengesetzt sind.

In diesem Sinne wird man sich geometrisch das Problem der Invariantentheorie zurechtlegen können.

Do 29 VI 93 Heute haben wir von der Beziehung der Theorie der complexen Zahlen zur Gruppentheorie zu sprechen. Für die complexen Zahlen $x + iy$ gelten ja dieselben Rechenregeln wie für die gewöhnlichen Zahlen. Auf Grund dieser Thatsache hat sich etwa in den vierziger Jahren (insbesondere von Grassmann u. Hamilton) die Tendenz ausgebildet, doch noch allgemeinere Zahlen zu bilden und zu untersuchen,

ob man sie mit Vortheil anwenden könne. Hiervon wollen wir jetzt zunächst in Kürze berichten.

Wir wollen gleich die aus n Hauptheinheiten e_i gebildete allgemein complexe Zahl $\sum_1^n x_i e_i$ unserer Betrachtung zu Grunde legen, die Coefficienten x_i bezeichnen irgend welche Zahlenfactoren.

Was heißt es insbesondere, 2 solche complexe Zahlen zu addiren oder zu multipliciren? Was die Addition betrifft, so ist dieselbe von allen Autoren durch die Gleichung definirt worden: $\sum x_i e_i + \sum y_i e_i = \sum (x_i + y_i) e_i$ oder abgekürzt geschrieben: $(x)+(y) = (x+y)$. Es hat gewiss auch keinen Zweck, eine andere Rechenregel an Stelle der genannten einzuführen. Es bleiben also die beiden wesentlichen Eigenschaften der Addition auch in ihrer Anwendung auf allgemein complexe Zahlen bestehen: 1) ihr associatives Verhalten, dasselbe drückt sich in der Formel aus: $(x+y)+(z) = (x)+(y+z)$ Sodann 2) das commutative Verhalten der Addition; dasselbe besagt, dass $x+y = y+x$ ist.

Doch anders ist es für die Erweiterung der Multiplication. In der gewöhnlichen Multiplication tritt gleichfalls das associative und commutative Princip hervor: es ist einmal $(x.y).z$

$= x.(y.z)$ und ferner $x.y = y.x$. Doch hierzu kommt noch als characteristische Eigenschaft der Multiplication, dass sie bezüglich der Addition distributiv ist; hierunter versteht man, dass $x(y+z) = xy + xz$ ist, d.h. die Multiplication mit x vertheilt sich auf die Summanden y und z. Wenn man nun für allgemein complexe Zahlen Multiplicationsgesetze aufstellte, dann sah man sich genöthigt, eine der genannten Eigenschaften fallen zu lassen. Und zwar hat man sich entschlossen, die Multiplication auf n gliedrige complexe Zahlen in der Weise zu übertragen, <u>dass man zwar den associativen und distributiven Character beibehielt, aber den commutativen Character preisgab.</u> Im einzelnen wird sich dann die Multiplication so darstellen, dass man zunächst das Produkt

$$\sum_i x_i e_i \cdot \sum_k y_k e_k = \sum_\sigma z_\sigma e_\sigma$$ setzt. Dies

wird man erreichen, wenn man die Produkte je zweier der Einheiten e_i gleich bestimmten linearen Functionen der e_i annimmt, also: $e_i e_k = \sum g_{ik\sigma} e_\sigma$. Dann erhält man in der That für das Produkt $\sum x_i e_i \sum y_k e_k$ die Gleichung:

$$\sum x_i e_i \cdot \sum y_k e_k = \sum_i \sum_k \sum_\sigma g_{ik\sigma} x_i y_k e_\sigma,$$ so

dass $h_\sigma = \sum_i \sum_k g_{ik\sigma} x_i y_k$ wird. Mit diesen Annahmen ist gewiss das <u>distributive</u> Princip auf rechts erhalten. Setzen wir nämlich einmal $x_i' + x_i''$ an Stelle von x_i in $\sum x_i e_i$ ein, dann tritt auch rechts eine Zulegung in zwei entsprechende Summanden ein. $\sum_i \sum_k \sum_\sigma g_{ik\sigma} x_i' y_k e_\sigma +$

$+ \sum_i \sum_k \sum_\sigma g_{ik\sigma} x_i'' y_k e_\sigma$. Doch wie steht es mit dem <u>commutativen</u> Princip? Diesem würde man nur dann gerecht werden, wenn von vornherein $g_{ik\sigma} = g_{ki\sigma}$ gesetzt würde, was wir jedoch nicht verabreden wollen. Schliesslich wollen wir jedoch das <u>associative Gesetz</u> wieder ausdrücklich aufrecht erhalten. Dies führt uns dann zu einer Anzahl Bedingungen für die Coefficienten g. Es soll also sein: $(e_\lambda \cdot e_\mu) \cdot e_\nu = e_\lambda \cdot (e_\mu \cdot e_\nu)$.

Dies geht in die folgende Gleichung über, wenn wir allemal für das Produkt zweier Einheiten seinen Wert einsetzen:

$$\sum_\varrho g_{\lambda\mu\varrho} \underbrace{e_\varrho e_\nu} = \sum_\varrho g_{\mu\nu\varrho} \underbrace{e_\lambda e_\varrho} \qquad \text{oder:}$$

$$\sum_{\varrho}\sum_{\sigma} g_{\lambda\mu\varrho}\cdot g_{\varrho\nu\sigma}\, e_\sigma = \sum_{\varrho}\sum_{\sigma} g_{\mu\nu\varrho}\, g_{\lambda\varrho\sigma}\, e_\sigma \cdot \cdot$$

Diese beiden Doppelsummen können nun nur dann einander gleich sein, wenn die Coefficienten derselben Einheiten e_σ beiderseits dieselben sind. Wir erhalten daher als Folge des associativen Principes die Bedingungsgleichungen:

$$\sum_{\varrho} g_{\lambda\mu\varrho}\cdot g_{\varrho\nu\sigma} = \sum_{\varrho} g_{\mu\nu\varrho}\cdot g_{\lambda\varrho\sigma},$$ die für

alle Zahlenwerte der $\lambda\mu\nu\sigma$ gelten. Wir werden endlich noch eine weitere Bedingung finden, wenn wir sagen, die Division soll sich in allgemeinen ausführen lassen. Aus der Gleichung $\sum x_i e_i = \sum y_k e_k = \sum z_\sigma e_\sigma$ hatten wir bereits die Gleichungen gefolgert:

$$z_1 = \sum_i \sum_k g_{ik1}\cdot x_i y_k,$$

$$z_2 = \sum_i \sum_k g_{ik2}\cdot x_i y_k,$$

. . . . . .

$$z_n = \sum_i \sum_k g_{ikn}\, x_i y_k$$

Es giebt nun offenbar 2 Arten der Division,

wir denken uns die Größen z_i gegeben und außerdem entweder die Größen x_i oder die Größen y_k, sodaß entsprechend die Größen y_k resp. x_i zu bestimmen sind. Nehmen wir einmal an, die z_i und x_i seien gegeben. Dann haben wir n lineare Gleichungen zwischen den n Unbekannten y_k, und letztere sind aus denselben eindeutig bestimmt, sobald nur die Determinante $\left|\sum_i g_{iks} x_i\right|_{s,k}$ deren Horizontalreihen sich für $s = 1, 2, \ldots n$, deren Vertikalreihen sich für $k = 1, 2 \ldots n$ ergeben, von Null verschieden ist, für allgemeine Werte von x. (In speciellen Falle kann es natürlich immer einbrechen, daß für bestimmte Werte der Größen x_i die Determinante verschwindet).

Analog ist für die Bestimmung der Größen x_i aus den Größen y_k und z_i notwendig, daß die Determinante $\left|\sum_k g_{iks} y_k\right|_{i,s}$ bei allgemeinen Werten des y von Null verschieden ist. Diese Forderung, daß die beiden genannten Determinanten nicht identisch verschwinden sollen, wollen wir daher noch zu den obigen Bedingungen

hinzufügen.

Eine Folge unserer Voraussetzungen ist es dann, dass es im System unserer complexen Zahlen eine Einheit giebt, d.h. eine complexe Zahl, welche mit einer beliebigen complexen Zahl rechter Hand oder linker Hand multiplicirt, gerade immer diese beliebige complexe Zahl reproducirt.

Dieses schliessen wir folgendermassen: Die gesuchte Einheit sei bezeichnet mit: $\sum y_\sigma^0 e_\sigma$. Nun soll für irgend eine ausgewählte Zahl (y) zunächst gelten:

$$(y) = (y) \cdot (y^0) \quad \text{d.h.}$$

$$y_\sigma = \sum_i \sum_k \gamma_{ik\sigma}\, y_i\, y_k^0 \,.$$

Aus diesen Gleichungen können wir aber die Grössen y_k^0 berechnen, die ja für die beliebig ausgewählten Grössen y_i die Determinante $\left|\sum_i \gamma_{ik\sigma} y_i\right|_{k,\sigma}$ nicht verschwinden soll.

Haben wir so die Zahl $\sum_k y_k^0 e_k$ bestimmt, dann gilt doch auch die Gleichung:

$(x) \cdot (y) = (x) \cdot (y) \cdot (y^0)$ oder genauer geschrieben

$(x) \cdot (y) = (x) \cdot ((y) \cdot (y^0))$, unter x eine beliebige complexe Zahl verstanden.

Nach dem associativen Princip können wir jedoch die Hauptklammer rechter Hand auch in der folgenden Weise setzen:

$$(x)\cdot(y) = ((x)(y))(y^0).$$

Da nun $(x)(y)$ doch eine beliebige complexe Zahl darstellt, so haben wir dann hiermit die Hälfte unserer Behauptung bewiesen, <u>dass nämlich eine beliebige complexe Zahl rechter Hand mit (y^0) multiplicirt unverändert bleibt.</u>

Nun können wir weiter setzen:

$$(y)\cdot(x) = ((y)(y^0))(x)$$

oder:

$$(y)\cdot(x) = (y)((y^0)\cdot(x))$$

Hieraus folgt aber:

$(x) = (y^0)\cdot(x)$ d.h. Vermöge unseres neuen Ansatzes wird auch $(x) = (y^0)\cdot(x)$ sein, unter (x) eine beliebige complexe Zahl verstanden.

<u>Unsere Zahl (y^0) ist daher in der That in jeder Weise eine Einheit.</u>

Hat man sich so über bestimmte Systeme complexer Zahlen geeinigt, dann gilt es die Theorie in betreff folgender Punkte fortzuentwickeln:

1) Die erste Aufgabe besteht darin, für jedes n die verschiedenen Typen complexer Zahlen aufzu-

zählen, die es giebt, wenn man alle diejenigen Zahlenarten als gleichwertig betrachtet, die durch lineare Transformation der e_i aus einander hervorgehen. Denn darin ist keine wesentliche Änderung eines Systems zu erblicken, wenn man irgend n lineare Verbindungen der e_i, die linear unabhängig von einander sind, als neue Einheiten e'_i einführt.

2.) Die zweite Aufgabe verlangt dann, gerade eine Algebra des einzelnen Typus dieser complexen Zahlen auszubilden. Man bekommt doch, wenn man Addition und Multiplication in beliebiger Reihenfolge wiederholt rationale ganze Functionen oder Formen der allgemeinen Zahlen; die Frage ist, was für Sätze für dieselben gelten.

3.) Schliesslich würde man sich zu fragen haben, worin denn der Nutzen dieser Theorieen für andere Disciplinen besteht. Nehmen wir hier als einfachstes Beispiel die Quaternionen, d.h. die aus 4 Einheiten in bestimmter Weise sich aufbauenden Zahlen. Diese sind gewiss von grossem Vorteil anzuwenden, sobald es sich um orthogonale Substitutionen dieser Variabelen handelt oder um Drehungen des R_3 um einen festen Punkt.

Analoges gilt auch für alle anderen complexen Zahlensysteme, die man aufstellen mag; es wird hier oder dort ein specielles Gebiet geben, in der sie mit Nutzen verwandt werden können.

Nun ist aber das Merkwürdige, dass verschiedene Mathematiker von dem Werth der allgemeinen Zahlensysteme ganz verschiedene extreme Ansichten hegen. Die einen sagen, dass der Fortschritt der Mathematik geradezu von der erweiterten Kenntniss solcher complexen Zahlensysteme abhänge. Auch Gibbs ist z. B. der Ansicht, dass die Mathematik durch die Bereicherung unserer Kenntnisse von den complexen Zahlen einen ungeahnten Aufschwung nehmen werde, indem überhaupt die complexen Zahlen von je ein Lieblingsgegenstand der amerikanischen Mathematiker gewesen sind. Dem entgegen halten andere Mathematiker von den complexen Zahlen wenig oder nichts. Es ist dies besonders der Standpunkt, der früher in Berlin vertreten war, woselbst eine ausgesprochene Abneigung gegen die complexen Zahlen bestand.

Wir wollen jetzt noch einige Litteraten über complexe Zahlen hinzufügen. Es ist zu nennen:

Hankel, 1867. Thorie der complexen Zahlensyste. me, sowie. die ausführlichen Litterarausgaben, die Scheffers in Ann. 39 (1891) zusammengestellt hat. Leider ist hier jedoch eine wichtige Arbeit übersehen worden, die Laguerre in dem Heft 42 der École polytechn. 1867 veröffentlicht hat: sur le calcul des systémes linéaires.

Im übrigen werden wir hier nicht darauf eingehen, die einzelnen angedeuteten Untersuchungen weiter auszuführen, sondern uns kommt es vornehmlich auf den Zusammenhang der Theorie der complexen Zahlen mit der Gruppentheorie an.

[v. 30. VI 93] In der am Schlusse der letzten Stunde genannten Hinsicht sei auf die Litteratur verwiesen:

Poincaré, Comptes Rendus 99. 1884

Schur Math. Ann. 33. 1888.

u. Study in den Göttinger Nachrichten u. den Leipziger Berichten von 1889

Die Sache selbst ist ganz einfach darzulegen. Wir haben die Multiplicationsformeln abgeleitet:

$x_\sigma' = \sum\sum \gamma_{ik\sigma} x_i y_k$ oder in abgekürzter Schreibweise: $(x') = (x).(y)$; zwischen den $\gamma_{ik\sigma}$ be-

standen die Relationen, die sich aus der Forderung des associativen Princips ergeben hatten.

Diese Formeln können wir ansehen als eine Schaar linearer Transformationen der Grössen x_i mit den Parametern $y_1, y_2 \ldots y_n$. Nun behaupte ich, diese Schaar bildet eine n-gliedrige Gruppe linearer Transformationen der x_i. Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich einfach als eine Folge des associativen Principes. In der That, wendet man 2 Operationen hinter einander an, etwa

$(x') = (x)\cdot(y)$ und $(x'') = (x')\cdot(z)$, dann ist doch:

$(x'') = ((x)(y))\cdot(z) = (x)\cdot((y)(z))$, d. h. x'' geht aus den x auch durch eine lineare Transformation, der Schaar hervor, natürlich durch diejenige lineare Transformation, deren Parameter $((y)(z))$ sind. Ferner haben wir unter den complexen Zahlen eine besondere bestimmt, die wir als die Einheit $(y_1^0 \ldots y_n^0)$ bezeichneten. Es war für sie eben: $(x) = (x)\cdot(y^0)$. In unserer Gruppensprache heisst dies Resultat, dass sich unter den Transformationen der Gruppe insbesondere auch die identische Transformation findet, dieselbe gehört eben zu den Parametern y^0. Hieraus folgt dann weiter, dass es auch infinitesimale Transfor-

mationen giebt. Dieselben erhält man, wenn man setzt:

$$(x') = (x)(y^0 + \delta y^0), \text{ oder:}$$

$$x'_\sigma = x_\sigma + \delta x_\sigma = \sum_i \sum_k \gamma_{ik\sigma} x_i (y_k^0 + \delta y_k^0)$$

d. h.

$$\delta x_\sigma = \sum_i \sum_k \gamma_{ik\sigma} x_i \delta y_k .$$

Wenn wir nun eine beliebige Function $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ diesen infinitesimalen Transformationen unterwerfen, dann wird der Zuwachs derselben gleich:

$$\delta f = \sum_k \delta y_k \cdot \sum_i \sum_\sigma \gamma_{ik\sigma} x_i \frac{\partial f}{\partial x_\sigma} \text{ sein.}$$

Aus dieser Formel bekommen wir leicht die unabhängige infinitesimale Transformationen, wenn wir nacheinander $\delta y_1, \delta y_2 \ldots$ von 0 verschieden, alle übrigen δy_k jedoch gleich 0 annehmen.

Symbolisch werden diese n infinitesimalen Transformationen demnach durch die Formeln gegeben:

$$X_k(f) = \sum_i \sum_\sigma \gamma_{ik\sigma} x_i \frac{\partial f}{\partial x_\sigma}$$

(für $k = 1, 2 \ldots n$.)

Nun wollen wir auch die Zusammensetzung

unserer Gruppe berechnen. Es ergiebt sich der Klammerausdruck:

$$(X_k', X_e') = \sum_i \sum_\sigma \sum_t (g_{ik\sigma} g_{\sigma et} - g_{ie\sigma} g_{\sigma kt}) \cdot x_i \frac{\partial f}{\partial x_t}$$

oder, indem wir die Klammern auf der rechten Seite mit Hülfe der aus dem associativen Princip für die g abgeleiteten Relationen umformen:

$$(X_k', X_e') = \sum_i \sum_\sigma \sum_t (g_{ke\sigma} - g_{ek\sigma}) \cdot g_{i\sigma t} \cdot x_i \frac{\partial f}{\partial x_t}$$

$$= \sum_\sigma (g_{ke\sigma} - g_{ek\sigma}) \cdot X_\sigma' = \sum_\sigma c_{ke\sigma} X_\sigma' .$$

Die Zusammensetzungsconstanten $c_{ke\sigma}$ unserer Gruppe haben daher den Werth $g_{ke\sigma} - g_{ek\sigma}$.

Soviel wollte ich von dem Zusammenhang der complexen Zahlen mit der Theorie der Gruppen hier berichten. Hier anknüpfend hat man erneut unternommen, die verschiedenen Zahlsysteme aufzuzählen, die es für $n = 3, 4, 5 \ldots$ giebt. Man vgl. gleiche in dem Betracht die Arbeiten: Scheffers Ann. 39 (1891), Study Ann. 41. (1892).

Jetzt wenden wir uns zu der neuen Frage, die wir bereits als Helmholtz' Raumproblem bezeichneten. Damit ist jene Fragestellung gemeint,

die Helmholtz 1868 in seiner berühmten Arbeit, Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen" aufgestellt hat. (Göttinger Nachrichten)

Ich denke hier gar nicht an das philosophische Problem, wie man dazu kommt, die Axiome der Geometrie aufzustellen. Vielmehr wollen wir uns gern unserer gewöhnlichen geometrischen Anschauung bedienen, die ja nicht in sich fehlerhaft ist, sondern nur in Rücksicht auf ihren Ursprung und ihre Zweckmäßigkeit untersucht werden kann.

Ferner wollen wir die moderne Ausdrucksweise der Gruppentheorie anwenden; denn es handelt sich in Wirklichkeit um eine Frage dieser Disciplin. Was ich also von Helmholtz berichte, soll sogleich in diesem übertragenen Sinne aufgefaßt werden. Des Näheren handelt es sich nun um das folgende Problem. Denken wir uns aus dem Raum ein beliebig großes Stück ausgeschnitten, den einzelnen Raumpunkt in ihm legen wir durch die Werte x_1, x_2, x_3 fest, welche wir als beliebige Punktcoordinaten, nicht gerade als rechtwinkliche Coordinaten ansehen wollen. Die Bewegungen des Raumes werden sich dann darstellen durch irgendwelche Formeln:

$$x_i' = \varphi_i(x_1, x_2, x_3; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

; woselbst $a_1, a_2 \ldots a_6$ Parameter sind d.h. die Bewegungen repräsentieren uns eine 6fach ∞ Schaar von Transformationen des Raumes. Diese Schaar bildet natürlich eine Gruppe, da ja doch 2 Bewegungen hintereinander ausgeführt immer wieder eine Bewegung abgeben. (Helmholtz drückt das so aus, dass er zwei Raum-Figuren, die einer dritten congruent sind, unter einander congruent setzt.) Die Frage soll nun sein, wie sich unter allen 6 gliedrigen continuirlichen Transformationsgruppen, die es bei 3 Variabeln giebt, diese Gruppe der Bewegungen am einfachsten eindeutig charakterisieren lässt.

Ehe wir hierauf die Antwort geben, wollen wir zunächst Einiges über die Nicht Euklidische Geometrie berichten, um gewisse Vorkenntnisse hier zur Verfügung zu haben. Betreffs der näheren Begründung verweise ich auf meine diesbezügliche Vorlesung von 1889 - 90.

Man stellt der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie 2 andere Geometrieen gegenüber, die man als die hyperbolische und die elliptische Geometrie zu bezeichnen pflegt, während man demgemäss die Euklidische Geometrie auch die parabo-

bolische Geometrie nennt. Alle diese 3 Arten der Geometrie ergeben sich am einfachsten, wenn man von der projectiven Geometrie ausgeht.

Der parabolischen Geometrie liegt der Kugelkreis als Fundamentalgebilde zu Grunde; derselbe stellt nach der in der genannten Vorlesung gebrauchten Terminologie einen nullteiligen Kegelschnitt dar, d.h. einen Kegelschnitt mit reeller Gleichung, aber ohne reelle Punkte. Die hyperbolische Geometrie dagegen legt eine ovale Fläche 2ten Grades, d.h. ein Ellipsoid oder auch eine Kugel, zu Grunde, die uns umschließt, die elliptische Geometrie endlich eine nullteilige Fläche 2ten Grades, d.h. wieder eine Fläche mit reeller Gleichung, jedoch ohne reelle Punkte. Wie man nun die Entfernung zweier Punkte wie den Winkel zweier Ebenen in diesen verschiedenen Geometrieen definirt, dies möge hier unerörtert bleiben. Uns kommt es vornehmlich auf die Bewegungen des Raumes an. Mag man die parabolischer, hyperbolische oder elliptische Geometrie haben, immer giebt es ∞^6 Bewegungen des Raumes.

Was zunächst die Euklidischen Bewegungen angeht, so bilden dieselben jedenfalls eine 6gliedrige continuirliche Gruppe von Collineationen, bei welchen

der Kugelkreis in sich selbst übergeht. Doch liegt hierin noch keine ausreichende Charakterisirung der Bewegungen. Denn eine einfache Abzählung zeigt, dass der Kugelkreis (wie jeder Kugelschnitt) durch ∞^7 Raumcollineationen in sich übergeführt wird. Zu den Bewegungen kommen nämlich noch die Aehnlichkeitstransformationen hinzu, die durch $x_i' = \lambda . x_i$ gegeben werden, wo λ ein Parameter ist.

Wie werden wir nun aus dieser 7 gliedrigen Gruppe die 6 gliedrige Gruppe aller Bewegungen ausscheiden? Legen wir rechtwinkliche Coordinaten x, y, z zu Grunde, so werden die Bewegungen durch solche Substitutionsformeln

$$x' = ax + by + cz + d$$
$$y' = a'x + b'y + c'z + d'$$
$$z' = a''x + b''y + c''z + d'', \text{ die den Kegelkreis}$$

in sich überführen, nur unter der Bedingung gegeben sein, dass die Determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 1$ ist,

d.h. dass wir uns auf unimodulare lineare Substitutionen der x, y, z beschränken. Doch besser wird es sein, ein geometrisches Kennzeichen zu haben. Wir wollen zu dem Zwecke einmal alle die Trans-

formationen unserer Gruppen betrachten, die den Anfangspunkt O, der übrigens beliebig gewählt sein soll, fortlassen. Beschränken wir uns auf die Gruppe der Bewegungen, so haben wir es nur mit einfachen Drehungen um eine beliebige durch O gehende Axe zu thun. Wählen wir letztere speciell als z-Axe, so wird die Drehung durch die Formeln:

$$x' + iy' = e^{i\varphi}(x + iy)$$
$$z' = z$$

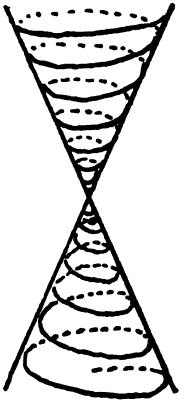
gegeben sein. Wenn wir aber Aehnlichkeitstransformationen hinzunehmen, so werden die Abstände der einzelnen Raumpunkte von O entweder sämtlich vergrößert oder verkleinert werden können. Dann haben wir entsprechende Formeln der folgenden Art:

$$x' + iy' = \alpha . e^{i\varphi}(x + iy)$$
$$z' = \alpha . z.$$

Wenn wir uns nun fragen, wie insbesondere eine solche Transformation durch beständige Anwendung einer ∞ kleinen Transformation erzeugt wird, so erkennen wir, daß jeder einzelne Punkt des Raumes sich auf einer offenen Spirale bewegt, die immer fort um die Axe herumläuft und sich um so mehr

zusammengiebt, je näher sie dem Anfangspunkt verläuft.

Diese Spirale ist natürlich auf einem von O aus, strahlenden Rotationskegel gelegen, ihre eine Hälfte ist rechts, die andere links geworden.



Man wird also die 6 gliedrige Gruppe der Bewegungen aus der 7 gliedrigen Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen dadurch ausscheiden, daß man die Spiraltransformationen bei Seite läßt, was Bewegungen um einen festen Punkt angeht, d.h. also nur solche Transformationen beibehält, die jeden anderen Punkt auf einer geschlossenen Bahn herumführen.

So liegt die Sache in der parabolischen Geometrie. Demgegenüber sind die 6 gliedrigen Bewegungsgruppen der hyperbolischen und der elliptischen Geometrie direct zu definieren als diejenigen continuirlichen Transformationsgruppen von Collineationen, welche die zugehörige fundamentale Fläche 2ten Grades in sich überführen. Auf Grund dieser Erörterungen modificiren wir nun die anfängliche Fragestellung. Wir werden die Unterschiede, wel-

ske unsere 3 Bewegungsgruppen unter einander zie. gen, bald näher besprechen. Daraufhin werden wir dann fragen: wie unsere 3 Bewegungsgruppen zusammengenommen sich unterscheiden von der Gesammtheit aller 6 gliedriger continuirlicher Grup. pen des Raumes, die es giebt.

So. 1 VII 93.] Um zunächst Unterschiede zwischen unseren dreierlei Gruppen zu haben, fragen wir uns, giebt es ausgezeichnete Untergruppen in unseren Bewegungs. gruppen (und zwar handelt es sich selbstverständlich nur um reelle ausgezeichnete Untergruppen, wie denn überhaupt nur reelle Bewegungen in Frage kommen.) Wir richten unsere Aufmerksamkeit damit auf ei. nen Punkt, der unabhängig ist von der besonde. ren Coordinatenwahl, die wir getroffen haben mö. gen.

a). In der parabolischen Geometrie haben wir eine ausgezeichnete G_3, dies ist die Gesammtheit aller Translationen des Raumes.

b.) In der elliptischen Geometrie dagegen fin. den sich 2 ausgezeichnete G_3, die wie folgt näher zu charakterisieren sind. Die Fundamentalfläche 2. Grades enthält 2 Systeme gradliniger Erzeugende.

Man kann dann diejenigen Bewegungen des Raumes betrachten, bei denen jede Erzeugende der ersten Art sich in sich selbst verschiebt, und solche, bei denen jede Erzeugende der zweiten Art sich in sich selbst verschiebt. Beiderlei Bewegungen bilden in ihrer Gesammtheit eine 3 gliedrige Gruppe, die sich im Band 37 der Annalen (1890) „Schiebungen" genannt habe. Des Näheren sei auf diese angeführte Arbeit verwiesen.

c) In der hyperbolischen Geometrie findet sich dagegen keine ausgezeichnete G_3 vor.

Im Vorstehenden haben wir also eine Untersuchung der 3 Geometrieen vom Standpunkte der Gruppentheorie aus. Nach anderer Seite werden wir sehr leicht eine Reihe gemeinsamer Eigenschaften zusammenstellen können:

1) Alle 3 Gruppen sind 6 gliedrig, d. h. bestehen aus 6fach ∞ vielen Transformationen.

2). Sie sind innerhalb unseres ausgezählten Raumstückes transitiv, man kann jeden Raumpunkt in jeden anderen überführen.

3). Bei festgehaltenem Punkt ergiebt sich eine G_3 als Untergruppe, welche von den dreifach unendlich vielen Drehungen um diesen Punkt gebildet

wird.

4). Zwei Punktepaare kann man nur dann zur Drehung bringen, wenn ihre Entfernungen beidemal dieselben sind. Gegenüber der Mannigfaltigkeit der Punktepaare ist also die G_6 eine intransitive Gruppe.

5) Bei festgehaltenem einzelnen Punktepaar bleibt eine G_1 übrig.

6). Aus den Coordinaten $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ zweier Punkte läßt sich ein Ausdruck $\Delta(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ construieren, der gegenüber allen Transformationen der G_6 eine Invariante darstellt.

7) Bei festgehaltenem Punktetripel ist, um allgemein zu reden, eine einzelne Transformation, die Identität, möglich, d.h. wenn wir 3 Punkte festhalten, dann ist der ganze Raum festgelegt.

8). Es giebt keine Spiraltransformationen; jeder Punkt beschreibt bei den Drehungen um irgendwelchen festzuhaltenden Punkt unseres Raumstücks je eine geschlossene Bahn.

Helmholtz drückt diese Eigenschaft dahin aus, daß er die Gruppe als „monodrom" bezeichnet. (In der That liegt hier eine gewisse Aehnlichkeit vor mit dem, was die Functionentheorie unter „monodromen Ge-

halten" einer Function in einem Punkte versteht, indem der Functionswert sich reproducirt, wenn das Argument einen Umlauf um den betreffenden Punkt ausführt.)

Dies Alles sind Eigenschaften, die wir gemeinsam bei unseren G_6 bemerken. Daß wir gerade 8 Eigenschaften aufgezählt haben, ist dabei zufällig, denn es ist klar, daß 2 und 3 sowie 4, 5 und 6 dasselbe besagen. Helmholtz kommt nun zu dem Resultate, daß durch die hiermit aufgeführten Eigenschaften unsere 3 Bewegungsgruppen geradezu definirt werden können, natürlich gegenüber der Gesammtheit aller anderen 6fach ∞ Transformationsgruppen.

Hier will ich nun die Aufmerksamkeit vor Allem auf die Eigenschaft der Monodromie lenken.

Helmholtz hat die Forderung der Monodromie um so mehr mit auf die Liste gesetzt, als er sich im Falle zweier Variablen überzeugt hatte, daß die Monodromie keine Folge der vorangehenden Voraussetzungen sei.

Wollen wir doch diese Behauptung für 2 Variable zunächst beweisen: Die Gesammtheit aller

Bewegungen bildet hier eine G_3; diese wird wieder in Bezug auf die einzelnen Punkte transitiv, in Bezug auf die Punktepaare intransitiv sein. Bei festgehaltenem Punkte giebt es eine G_1 als Untergruppe, bei festgehaltenem Punktepaare nur die Identität.

Je zwei Punkte haben gegenüber aller Transformationen der G_3 eine bleibende Entfernung, die wir wieder als Invariante $\lambda(x, x_2 \; y, y_2)$ gegenüber den Transformationen der Gruppe angusehen haben. Die Drehung um 0 wird in Gebiet der Euklidischen Geometrie beim Gebrauch rechtwinkeliger Coordinaten durch die Formel gegeben:

$x' + iy' = e^{i\varphi} \cdot (x + iy)$ oder indem wir $\varphi = \beta t$ setzen durch: $x' + iy' = e^{i\beta t}(x + iy)$ gegeben, wo. selbst β irgendwelche (natürlich reelle) Constante, t der Parameter sein möge. Für continuirlich sich ändernde Werte des t haben wir gerade die continuirliche Drehung des Systems um den Anfangspunkt vor uns. Wenn wir dann schreiben:

$x' + iy' = e^{i\beta t}(x + iy) + a + ib$, mit den weiteren Parametern a und b, so haben wir zu der Drehung noch eine beliebige Verschiebung der Ebene hinzugenommen. Dies ist die allbekannte For-

mel für die allgemeine Bewegung in der Euklidischen Ebene. Jetzt aber wollen wir die Formel betrachten:

$x'+iy' = e^{(\alpha+i\beta)t}(x+iy)+a+ib$, wieder mit den 3 Parametern t, a u. b und der Constanten α und β. Diese Formel stellt wieder eine G_3 für 2 Variable dar. Lassen wir insbesondere $a=0$ u. $b=0$ sein, so haben wir bei festgehaltenem Punkte je. doch eine Spiraltransformation um 0 als Centrum, d.h. eine Transformation, welche jeden anderen Punkt auf einer Spirale um den festgehaltenen Punkt herumführt.

Dies hindert jedoch nicht, daß diese G_3 eine Invariante I besitzt für je 2 Punkte (die wir daher als Entfernung derselben definieren können). Um einen solchen invarianten Ausdruck zu finden, wählen wir den einen der Punkte zunächst als den Anfangspunkt, den anderen als den Punkt x, y und gehen aus von den beiden Formeln:

$x'+iy' = e^{(\alpha+i\beta)t}\cdot(x+iy)$,

$x'-iy' = e^{(\alpha-i\beta)t}\cdot(x-iy)$, von denen die zweite eine Folge der ersten ist. Dann logarithmieren wir beiderseits und erhalten:

$\log(x'+iy') = \lg(x+iy)+(\alpha+i\beta)\cdot t$.

$$\log(x'-iy') = \log(x-iy) + (\alpha-i\beta)t.$$

Aus diesen beiden Gleichungen eliminieren wir ferner den Parameter t, so daß sich ergiebt:

$$(\alpha-i\beta)\log(x'+iy') - (\alpha+i\beta)\log(x'-iy') = (\alpha-i\beta)\log(x+iy) - (\alpha+i\beta)\log(x-iy).$$

Wir haben hier auf beiden Seiten denselben Ausdruck und damit in der That eine Invariante. Doch haben wir noch den Coordinatenanfangspunkt festgehalten, wir müssen jetzt noch die Verschiebungen in Betracht ziehen. Wir thun dies, indem wir für 2 beliebige Punkte x, y und x_1, y_1 den folgenden Ausdruck zu bilden:

$$(\alpha-i\beta)\log((x+x_1)+i(y-y_1)) - (\alpha+i\beta)\log((x-x_1)-i(y-y_1))$$

Dieser stellt dann ganz allgemein eine Invariante gegenüber allen Transformationen der G_3 vor.

<u>Dieses Beispiel einer Trivial-G_3 zeigt ohne Zweifel, daß bei 2 Dimensionen die Monodromie der Gruppe keine Folge der vorangehenden Prämisse ist, sondern ausdrücklich, wenn man sie haben will, postulirt werden muß.</u>

Ich will nun weiter vortragen, daß ich vorerst einiges Persönliche erwähne. Zwischen Lie und Helmholtz hat sich nämlich eine Discussion entwickelt, an der ich selbst bis zu gewissem Grade

betheiligt bin, und ich will in dieser Vorlesung ausdrücklich angeben, wie ich zur Zeit die sämmtlichen hier in Betracht kommenden Fragen auffasse.

Es war gegen Ende der 70er Jahre, als ich Sie auf die Arbeit von Helmholtz aufmerksam machte mit dem Bemerken, dass in ihr eine Gruppenfrage vorliege, und dass ich Schwierigkeiten finde mir in R_3 eine sechsgliedrige Gruppe von den sonst vorausgesetzten Eigenschaften zu bilden, die nicht monodrom sei. Meine damalige Aufforderung an Sie, diese ganze Frage doch einmal mit Hülfe seiner gruppentheoretischen Methoden zu behandeln, hat dann dieser entsprochen und zwar zuerst im Jahre 1886, woselbst er vor der Berliner Naturforscher Versammlung über diese Sache vortrug. Er hat eben damals in den Leipziger Berichten eine vorläufige Mittheilung veröffentlicht. Dann folgen im Jahre 1890 2 grössere Arbeiten von Lie, gleichfalls in den Leipziger Berichten, und schliesslich 1892 kritische Bemerkungen, auch in den Leipziger Berichten und in den Comptes Rendus (1892. I p. 461 ff.). — Ich meinerseits habe in der Zwischenzeit einmal die Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie 1889-90 gehalten, in der

wird über die Arbeit von Helmholtz referirt I pag 250 ff. Insofern Lie nun Helmholtz' Arbeit angreift, wendet er sich auch gegen mein Referat.

Ferner habe ich in den Math. Ann. Bd. 37 (1890) einen Aufsatz über Nicht-Euklidische Geometrie veröffentlicht, in dem ich insbesondere auch zu der Frage der Monodromie Stellung nehme. Die Lie'schen Arbeiten von 1890 und dieser Aufsatz in Band 37 sind durchaus unabhängig von einander entstanden, jeder Autor hat die Darstellung des anderen erst kennen gelernt, als sie publicirt waren. Nun beziehen sich die kritischen Bemerkungen von Lie einmal auf Helmholtz' ganze Theorie und dann auch auf meine Auffassung der Monodromie bei 3 Dimensionen. Die Einwürfe von Lie gegen Helmholtz muss ich gelten lassen, wie ich schon andeutete, und es war insbesondere ein Fehler meiner Vorlesung von 1889-90, dass ich Lie's vorläufige Note von 1886 nicht hinreichend beachtet hatte, dagegen scheinen mir die Ausführungen von Lie gegen meine Auffassung der Monodromie in Bd. 37 auf einem blossen Missverständnisse zu beruhen, hervorgerufen durch die Kürze meiner Ausdrucksweise.

Wollen wir nun des Näheren diese Verhältnisse darlegen.

Das Hauptresultat zunächst, dass Lie in seiner Arbeit 1886 angiebt und 1890 ableitet, ist dieses, dass durch unsere ersten Eigenschaften im Raum von 3 Dimensionen unsere 3 Bewegungsgruppen in der That eindeutig charakterisirt sind, ohne dass man von Monodromie ausdrücklich zu sprechen braucht, vorausgesetzt, dass unsere 1. Eigenschaften ausnahmslos für alle Punktepaare des endlichen Raumstückes gelten sollen. Wenn man dagegen nur im allgemeinen ihre Geltung verlangt, wenn man beispielsweise zugiebt, dass es besondere Punktepaare giebt, die bei mehr als einfach ∞ vielen Bewegungen festbleiben, dann giebt es noch andere G_6 und unter ihnen nicht monodrome.

Steht nun dieses Resultat von Lie mit dem von Helmholtz nicht so sehr im Widerspruch, so tadelt jener um so mehr die Methode von Helmholtz. Nämlich Helmholtz macht, in unserer Terminologie ausgesprochen, folgenden Ansatz: Er hält einen Punkt fest und sieht zu, wie die von dem Punkte auslaufenden Linienelemente dx, dx_2 dx_3 sich bei unseren

Bewegungsgruppen umsetzen. Bei jeder einzelnen der 3fach ∞ vielen Transformationen, welche einen Punkt festlassen, erleiden diese Linienelemente offenbar lineare Transformationen:

$$dx_1' = a_{11}\,dx_1 + a_{12}\,dx_2 + a_{13}\,dx_3,$$
$$dx_2' = a_{21}\,dx_1 + a_{22}\,dx_2 + a_{23}\,dx_3,$$
$$dx_3' = a_{31}\,dx_1 + a_{32}\,dx_2 + a_{33}\,dx_3.$$

Man kann nun jedoch nicht ohne weiteres den Schluss machen, dass die dx_1, dx_2, dx_3 auf 3fach ∞ viele Weise linear transformirt werden. Denn es kann doch unter den infinitesimalen Transformationen unserer G_3 solche geben, die in der Nähe des festgehaltenen Punktes infinitesimal von 2. oder höherer Ordnung sind und bei dieser erleiden dann die dx_1, dx_2, dx_3 einfach die identische Substitution, und es bleiben dann event. nur noch 2fach ∞ viele eigentliche Substitutionen für die dx_1, dx_2, dx_3 übrig oder noch weniger. Nun braucht Hr. Holly aber für seine Schlussweise nicht nur, dass die dx_1, dx_2, dx_3 selbst sich auf dreifach ∞ viele Weisen linear umsetzen, sondern auch, dass ihre Verhältnisse dies auf dreifach ∞ viele Weisen thun.

Dies würde schon unrichtig sein, wenn unter

den dreifach ∞ vielen Substitutionen der dx_i eine Substitution der Art:

$$dx_1' = \lambda\, dx_1$$
$$dx_2' = \lambda\, dx_2$$
$$dx_3' = \lambda\, dx_3,$$ welche eine reine Aehnlichkeitstransformation ist, auftrete.

Da Helmholtz diese beiden Möglichkeiten nicht erörtert, sondern ohne weiteres annimmt, daß bei der G_3 sich die Verhältnisse der dx_1, dx_2, dx_3 auf dreifach ∞ viele Weisen projectiv transformieren, so betrachtet Lie den Helmholtz'schen Beweis als wesentlich unvollständig.

[VII 93] Auf diesen angegebenen Einwand könnte Helmholtz nun allerdings erwidern, daß er nicht ein abstractes mathematisches Problem, sondern eine bestimmte Frage der Erkenntnisstheorie behandelt, eben die Frage, wie sich unsere Raumvorstellung aufbaut. Damit sei dann von vornherein die Auflösung gegeben, daß die Beweglichkeit des Raumes im unendlich Kleinen ohne weiteres denselben Gesetzen genügt, wie die Beweglichkeit im Endlichen. Wenn also allgemein 2 festgehaltene Punkte nur noch eine Drehung des Raumes um ihre Verbindungslinie zulassen, so gelte dieser Satz

auch dann noch, wenn die beiden Punkte einan. der unendlich nahe gerückt seien. Darauf wird Lie wieder antworten, dass die voraus gesetzten Ver. hältnisse im unendlich Kleinen eben keine mathe. matische Folge der vorausgesetzten Verhältnisse im Endlichen sind und dass man bei der Dar. stellung dieses jedenfalls ausdrücklich constatie. ren solle, um jeden Schein einer anderen Auffas. sung zu vermeiden.

Nun, wir wollen nicht länger hierbei ver. weilen, sondern uns dazu wenden, die Lie'schen Arbeiten des Jahres 1890 in ihren Grundgedan. ken näher zu betrachten.

In der ersten Arbeit stellt sich Lie die Frage, wie sich die Helmholtz'schen Prämissen einfacher u. präciser fassen lassen, um die Bewe. gungsgruppen vollständig zu charakterisieren. Er nimmt zu dem Zweck die Verhältnisse im un. endlich Kleinen bez. die Transformation de dx, dx, dx, als Grundlage seiner Voraussetzu. gen u. kommt hierbei zu folgendem Resultat:

Wenn bei einer G_6 von Punktransformatio. nen des R_3 noch eine G_3 übrig bleibt, sofern der einzelne Punkt festgehalten wird, dagegen eine G_1

sofern das einzelne durch den Punkt gehende Li-
nienelement festgehalten wird, endlich nur noch
die Identität (d.h. eine G_0) bleibt, sofern noch das
einzelne durch das Linienelement gelegte Flächen-
element festgehalten wird, dann sind durch die-
se Voraussetzungen über das Infinitesimale
auch unsere 3 Bewegungsgruppen unter allen
überhaupt möglichen G_∞ gerade vollständig cha-
rakterisirt. jedoch ist ausdrücklich zu verlangen,
dass diese Voraussetzungen hinsichtlich aller von
einem Punkte auslaufenden Linienelemente bezw.
Flächenelemente ausnahmslos gelten. — Der
Gang der Lie'schen Untersuchungen ist nun ein-
fach der folgende: Wir setzen voraus dass die Li-
nienelemente dx_1, dx_2, dx_3 durch 3fach unendlich
viele Transformationen projectiv transformirt wer-
den, dass also eine Formelgruppe gilt:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, dx'_1 &= a_{11}\,dx_1 + a_{12}\,dx_2 + a_{13}\,dx_3 \\ \varrho\, dx'_2 &= a_{21}\,dx_1 + a_{22}\,dx_2 + a_{23}\,dx_3 \\ \varrho\, dx'_3 &= a_{31}\,dx_1 + a_{32}\,dx_2 + a_{33}\,dx_3 \end{aligned}\right\} \text{die 3 Para-}\atop\text{meter enthält.}$$

Zugleich wissen wir aus den Voraussetzungen, dass
bei der einzelnen Transformation niemals ein Linien-
element und ein durch dieses gelegtes Flächenelement
gleichzeitig festbleiben können, ohne dass die Trans-

formation die Identität darstellt. Nun haben wir seiner Zeit die sämmtlichen projectiven Gruppen an der Hand der von Franz Meyer gegebenen Tabelle aufgezählt. Aus ihr entnehmen wir direct, dass es nur eine einzige G_3 giebt, welche die angegebenen Eigenschaften besitzt, und zwar ist dies diejenige dreigliedrige Gruppe, die einen vom festgehaltenen Punkte aus strahlenden, nulltheiligen Kegel $\sum_i \sum_k f_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$ unverändert lässt. (Man beachte eben, dass die Geometrie im Punkte mit den Coordinaten dx_1, dx_2, dx_3 identisch ist mit der Geometrie der Ebene mit 3 homogenen Coordinaten.) Also wird auch die gesuchte G_6 die Eigenschaft haben, eine Gleichung 2ten Grades für die dx_i $\sum\sum f_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$ invariant zu lassen, wobei die linke Seite eine definite quadratische Form vorstellt und die f_{ik} übrigens irgendwelche, uns noch unbekannte Functionen der $x_1\, x_2\, x_3$ vorstellen.

Damit ist dann ein Punkt erreicht, zu dem auch Helmholtz in seiner Arbeit gelangt. Von hier kann man dann, wie Helmholtz es thut, alles weitere auf die Untersuchung der quadratischen Differentialausdrücke $\sum\sum f_{ik}\, dx_i\, dx_k$ werfen, indem man auf die Litteratur Bezug nimmt, die ich diesbezüg-

lich auf Seite 426 ff etc. des ersten Teiles der „Höheren Geometrie“ gegeben habe. Insbesondere findet Helmholtz solcher Weise den Anschluss an Riemanns hierher gehörige Untersuchungen. Es handelt sich dann einfach um die Frage, welche quadratischen Differentialausdrücke gehen durch eine G_6, wie sie hier vorliegt in sich selbst über. Dieses ist an sich eine schwierige Theorie, deren Erledigung ein grosses Verdienst von Riemann ist. — Lie dagegen hat es vorgezogen, in anderer Weise weiter zu gehen, indem er bei der Gruppentheorie bleibt. Er hat bereits im 10. Bande des norwegischen Archivs (1885) alle Gruppen von Raumtransformationen bestimmt, durch welche eine Gleichung $\sum\sum f_{ik}\, dx_{ik}\, dx_k$ in sich übergehen kann, bei geeigneten Werten der f_{ik}. In dieser Hinsicht kommt Lie zu folgendem Resultat. Erstens giebt es eine G_{10}, welche eine solche Gleichung in sich überführt, das typische Beispiel hierfür ist die Gruppe der conformen Transformationen des R_3 mit der wir uns im Texte soviel beschäftigten. Dann giebt es eine G_7, die von den Euklidischen Bewegungen zusammen mit den Aehnlichkeitstransformationen repräsentiert wird. Endlich giebt es die dreierlei Arten

der G_6, wie sie bei unseren dreierlei Bewegungsgruppen auftreten. Da dieses dieses die sämmtlichen Gruppen sind, durch welche eine Gleichung $\sum\sum f_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$ in sich übergehen kann, so folgt, dass nur die 3 letzten Möglichkeiten übrig bleiben, sofern man sich auf Gruppen mit 6 Parametern beschränken will. Damit sind wir am Ziele.

In dieser ersten Arbeit von Lie, die gewissermassen an Stelle der ursprünglichen Darstellung von Helmholtz zu setzen ist, ist nun gar nicht davon die Rede, dass man hinsichtlich der Monodromie der Gruppe ein besonderes Axiom formulieren müsse.

Wir kommen nun zu der 2ten Arbeit von Lie in den Leipziger Berichten. In dieser stellt Lie sich das Problem, die bekannten Voraussetzungen hinsichtlich der Beweglichkeit des Raumes nur im Endlichen gelten zu lassen, während er bestehend das unendlich Kleine alle damit verträglichen Möglichkeiten zulässt, und uns besonders interessiert auch in Betracht, dass die Verhältnisse im Endlichen nun im allgemeinen gelten sollen, nicht allgemein. Er betrachtet z. B. solche Fälle, in denen bei der G_6 ein bestimmtes System von

∞^2 Curven des Raumes in sich selbst übergeht, wo-
rauf 2 Punkte, die einer solchen Curve angehören, ge-
wiss bei 2fach ∞ vielen Transformationen der Grup-
pe festbleiben und also der Satz, dass das eingelne Punk-
tepaar nur durch einfach unendlich viele Transfor-
mationen in sich verwandelt wird, für diese beson-
deren Punktepaare nicht richtig ist. Dabei lässt also
Sie die philosophische Fragestellung ganz aus den Au-
gen, und gliedern dafür die mathematischen Entwicke-
lungen von den obersten Prämissen ausgehend in al-
ler Strenge und in allen ihren Einzelheiten. Der Wert
der Arbeit beruht daher darin, dass sie das Beispiel
eines durchgeführten Problems der Gruppentheorie
giebt. Die Ergebnisse, zu denen Sie gekommen ist,
sind nun kurz die folgenden:

Wenn man die bekannten Prämissen, hinsicht-
lich der G_6 ausnahmslos aufrecht erhalten will, dann
kommt man auch hier nur auf unsere 3 Bewegungs-
gruppen und braucht hinsichtlich der Monodromie
der Gruppe keinerlei weiteren Voraussetzungen zu for-
mulieren. Wenn man aber die Prämissen nur im
allgemeinen gelten lässt, dann giebt es noch eine
Reihe weiterer Fälle von Transformationsgruppen
und unter ihnen sind auch nicht monodrome.

Nun will ich dazu übergehen, meine eigenen Monodromiebetrachtungen in Ann. Bd. 37 pag. 565 in ihrem wesentlichen Punkte zu erklären und dieselben namentlich gegen den Lie'schen Angriff in den Leipziger Berichten 1892 (pag. 111) zu verteidigen, der in der That nur auf einem Missverständniss beruht, aber freilich die Nothwendigkeit zeigt, dass ich ausführlicher sage, was ich meine. *)

Bei 2 Dimensionen giebt es, wie wir wissen, als Seitenstück zu den anderen Bewegungsgruppen, die G_3 mit Spiraltransformationen, wie sie die Formel giebt:

$$(x'+iy') = e^{(\alpha+i\beta)t}\cdot(x+iy)+a+ib.$$

Ich behaupte nun l.c. das, dass bei 3 Dimensionen eine solche Gruppe unmöglich ist, dies soll heissen: es giebt dort keine Bewegungsgruppe, keine G_6, welche Spiraltransformationen enthielte. Lie aber liest hieraus, im R_3 gäbe es überhaupt keine Gruppe mit Spiraltransformationen bei festgehaltenem Punkte! Eine solche Behauptung wäre freilich so unvernünftig, wie möglich. Denn dass es solche Gruppen giebt, die

*) Ich sehe übrigens diese meine Betrachtungen nun mehr als ein Aperçu an, durch welches deutlich wird, dass hier zwischen 2 und 3 Dimensionen wirklich ein Unterschied besteht, durch welches aber die eingehenden Lie'schen Untersuchungen keineswegs überflüssig gemacht werden

doch ohne Weiteres zu Tage; man construire die einfachen Formeln: $x'+iy' = e^{(\alpha+i\beta)t}\cdot(x+iy)$

$h' = e^{\alpha t}\cdot h$, mit dem Parameter t. Wenn ich dies hätte leugnen wollen, so ist der Sinn der Ueberlegungen, die ich l. c. folgen lasse, vollkommen dunkel. Um so mehr muss ich auseinandersetzen, wie dieselben verstanden sein sollen. Ich werde dabei, um allen Einwürfen zu entgehen, die man aus dem Begriff des Unendlich-Kleinen ableiten könnte, meine Voraussetzungen so eng fassen, wie möglich. Der Kernpunkt meines Gedankens, auf den es mir allein ankommt, tritt dann um so deutlicher hervor.

Bei 2 Dimensionen haben wir neben die Gruppe der Euklidischen Bewegungen:

$$x'+iy' = e^{\alpha+\beta t}(x+iy)+a+ib$$

die Spiralumformation gesetzt:

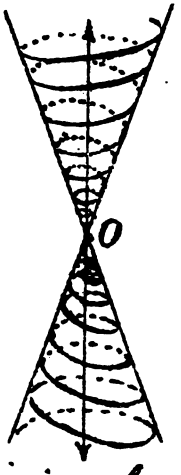
$$x'+iy' = e^{(\alpha+i\beta)t}\cdot(x+iy)+a+ib.$$

Beide G_3 sind in der G_4 enthalten, die aus den Euklidischen Bewegungen und den Aehnlichkeitsumformationen sich zusammensetzt, d. h. aus denjenigen Collineationen, welche die beiden Kreispunkte festlassen.

Gehen wir nun zu 3 Dimensionen. Wir haben dann eine G_7 derjenigen Collineationen, die den Kugelkreis festlassen. Nun wollen wir uns fragen, was giebt es in dieser G_7 für Gruppen G_6, welche die von einem Punkte auslaufenden Linienelemente genau so verlaufsicht, wie die G_6 der Euklidischen Bewegungen. Ich behaupte, dass innerhalb einer solchen G_6 bei festgehaltenem Punkte keine Spiral-transformationen auftreten können.

[i. 4 VII 93] Wir wollen einen Raumpunkt O und ein Linienelement, die von ihm einseitig nach bestimmter Richtung auslauft, festgehalten denken. Dann giebt es doch zunächst allemal auch das entgegengesetzt gerichtete Linienelement, und vermöge unserer G_6 sind der Voraussetzung nach alle Linienelemente, die vom Punkte O ausstrahlen, gleichberechtigt und insbesondere also auch die 2 entgegengesetzten Linienelemente gleichberechtigt, d.h. man kann vermöge unserer Gruppe bei festgehaltenem Punkte (durch eine Drehung um 180°) jedes Linienelement in sein entgegengesetztes überführen. Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf die G_1, die bei festgehaltenem Linienele-

ment des Punktes O noch übrig bleibt. Gesetzt nun die G_1 bestände aus Spiraltransformationen. Dann werden wir uns also etwa einen Rotations-kegel um jenes Linienelement von O aus laufend denken und auf ihm würden die Bahncurven auf seiner oberen Hälfte etwa aus rechts gewun-denen Schrauben, auf seiner unteren Hälfte aus links gewundenen Schrauben bestehen. Dies aber widerspricht unmittelbar der Gleichberechtigung der beiden entgegengesetzten Linien-elemente in der Axe des Kegels, indem bei einer geeigneten Dre-hung um 180° nicht nur das ei-ne Linienelement in das andere übergehen muss, sondern auch die Bahncurven, die das eine Ele-ment umgeben, in die Bahncurven, die das ent-gegengesetzte Linienelement umgehen, was un-möglich ist. (Denn eine rechtsgewundene Schrau-benlinie kann nie durch Drehung oder Aehn-lichkeitstransformation in eine linksgewun-dene verwandelt werden.) Also kann es kei-ne Spiraltransformation sein, und es ist über-



flüssig ausdrücklich unseren G, auch die Be-
dingung aufzuerlegen, dass sie keine Spiralbau-
formationen enthalten solle. –

Ich will nun noch ein Wort über den sonsti-
gen Zweck meiner Arbeit in Ann Bd. 37 hinzufü-
gen. Wir haben wollen wir voraus setzen, unsere
dreierlei Gruppen in einem begrenzten Raum-
stück charakterisirt, haben aber die Transforma-
tionen nur in soweit betrachtet als sie in der Nä-
he der Identität liegen, aber doch sich in unse-
rem begrenzten Raumstücke abspielen.

Es ist nun die Frage, was eintritt, wenn
man die Betrachtung über das begrängte Raum-
stück hinaus unbegrängt fortsetzt? Die Fragestel-
lung stimmt durchaus mit den Gedanken, die
immerfort in dem ersten Theile der Höheren Geo-
metrie hervortreten, dass wir eben der Geometrie
in der Umgebung des einzelnen Punktes die Geo-
metrie im Gesammtraume gegenüberstellen sol-
len. Mein Resultat in Bd. 37 ist dann, dass in
dieser Hinsicht noch sehr verschiedene Möglich-
keiten vorliegen. Ich kann natürlich auf
keine Einzelheiten hier eingehen.

Hieran schliesst sich dann die Aufgabe,

ung, in ähnlicher Weise alle anderweitig aufgestellten continuirlichen Gruppen zu discutieren.

Es ist dies eine neue weitreichende Fragestellung.-

Wir wenden uns weiter zu dem vierten Gegenstande, den wir hier erläutern wollen, derselbe handelt von den Differentialinvarianten einer Gruppe. Da muss ich zunächst einige Betrachtungen über allgemeine Invariantentheorie vorausschicken, die an die früher entwickelten Gedanken anknüpfen. Wir hatten seiner Zeit Variable, die wir damals $A_0, A_1 \ldots A_n$ nannten, 3 infinitesimalen Transformationen $Y_1 - Y_4, Y_2, Y_3$ unterworfen: Wir bezeichneten eine Funktion $f(A_0 A_1 \ldots A_n)$ dann als eine Invariante, wenn für sie $Y_1 - Y_4 = 0$, $Y_2 = 0$, $Y_3 = 0$ war.

2.) Dies gilt es nun zu verallgemeinern. Es seien die Variabeln $x, x_1 \ldots x_n$ zu Grunde gelegt, und die r infinitesimalen Transformationen $X_1, X_2, \ldots X_r$. Dann werden wir die Funktion $f(x, x_1 \ldots x_n)$ eine Invariante nennen, wenn sie den Transformationen der aus der $X_1, X_2 \ldots X_r$ sich zusammensetzenden Gruppe gegenüber unverändert ist, d.h. wenn für diese Function $X_1(f) = 0$, $X_2(f) = 0$ $\ldots X_r(f) = 0$ ist. Nun haben wir noch eine Eingang-

zung hinzuzufügen. Zwischen den X_r^k soll zwar keine lineare Relation mit constanten Coefficienten bestehen, wohl aber kann eine Relation der Form: $\omega_1 X_1^k + \omega_2 X_2^k + \dots + \omega_r X_r^k = 0$ gelten, wo die ω selbst Functionen der Variabeln sind.

Nehmen wir einmal an, dass vermöge solcher Gleichungen die Zahl der in diesem erweiterten Sinne linear unabhängigen X^k gleich s sei, wo, selbst $s \leqq r$ ist. Dann werden die r Gleichungen $X_1^k(f) = 0 \dots X_r^k(f) = 0$ offenbar aequivalent sein mit einem vollständigen System von s Differential-Gleichungen. Nun wissen wir aber, wie ein solches vollständiges System zu integrieren ist. Man suche zunächst $n-s$ particuläre Integrallösungen $f_1, f_2 \dots f_{n-s}$. Dann stellt eine willkürliche Function $F(f_1 f_2 \dots f_{n-s})$ die allgemeine Lösung des Systems dar. In geometrischer Denkweise ist dieses so zu verstehen. Entsprechend den vorliegenden s Differentialgleichungen gehen von jedem Raumpunkte charakteristische M_s aus und zwar wird der ganze Raum von ∞^{n-s} solchen charakteristischen M_s gerade ausgefüllt.

Diese M_s sind analytisch definirt durch die Gleichungen: $f_1 = c_1, f_2 = c_2 \dots f_{n-s} = c_{n-s}$ woselbst

die c_i willkürliche Constante sind. Das allge-
meine Integral $J(f_1 \dots f_{n-5}) = \text{Const}$ giebt uns da-
rauf hin eine Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimen-
sionen, die von lauter M_5 gebildet wird. Dies ist
ja nur eine Recapitulation von bereits früher Ent-
wickeltem. Verstehen wir also unter einer Invarian-
te eine beliebige Function, die sich bei der vorgeleg-
ten Gruppe nicht ändert, so werden die Invarian-
ten einer Gruppe schlechtweg durch die Lösungen
eines vollständigen Systems von linearen Diffe-
rentialgleichungen definirt sein, und unsere frü-
heren allgemeinen Erörterungen über die Lösun-
gen eines vollständigen Systems sind also eben so
viele Beiträge zur Invariantentheorie.

3) Nun wollen wir noch einen neuen Gedan-
ken hinzufügen.

Wir können den Begriff „Invariante" auch all-
gemeiner auffassen und sagen: wir wollen unter
der Invariante eine Function f verstehen, für die

$$X_1'(f) = c_1 \cdot f$$
$$X_2'(f) = c_2 \cdot f$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$X_r'(f) = c_r \cdot f$$

ist, woselbst die Coefficienten
c beliebige Functionen von $x, x_1 \dots x_n$ sein mögen.
Also f stellt dann eine Function dar, die sich nur

um gewisse Factoren ändert. Wir nennen solche f relative Invarianten im Gegensatz zu den absoluten Invarianten, die wir vorhin ausschließlich betrachteten. Sie betrachtet insbesondere die Gleichung $f = 0$ und nennt diese eine invariante Gleichung.

Wir stellen uns die Aufgabe, bei gegebener Gruppe alle invarianten Gleichungen zu finden. Es kommt dieses darauf hinaus, alle solche Functionen f zu finden, welche $\mathfrak{A}'_1(f) = 0, \ldots \mathfrak{A}'_s(f) = 0$ vermöge $f = 0$ befriedigen. Eine solche Gleichung $f = 0$ stellt dann eine M_{n-1} im R_n vor, und wir verlangen daher in unserer Aufgabe nicht nur die Schaaren der M_{n-1} des R_n, von denen die einzelnen M_{n-1}, welche unsere Differentialgleichungen befriedigen.

Nun bekommen wir sofort unendlich viele Beispiele solcher invarianten Gleichungen, wenn wir bliebige absolute Invarianten f der Gruppe gleich C, d. h. gleich einer beliebigen Constante setzen. — Es handelt sich jedoch um die Frage, ob durch die solchermaßen entstehenden M_{n-1}, die der allgemeinen Lösung unseres vollständigen Systems entsprechen, alle invarianten Gleichungen erschöpft werden, oder aber es noch besondere Auflösungen, singuläre M_{n-1} giebt, die nicht in dieser allgemeinen Vorschrift enthalten

sind. Von jedem Raumpunkt strahlen doch 5 Charakteristiken aus, die zu den 5 - linear unabhängigen Differentialgleichungen $H_1'(f) = 0, \ldots H_5'(f) = 0$ gehören. Diese 5 Charakteristiken zusammen bestimmen in einzelnen Punkte allgemeiner Lage ein Bündel von ∞^{5-1} Fortschreitungsrichtungen, welche eben in ihrer Fortsetzung die von unserem Punkte auslaufende charakteristische M_5 definieren. Auf dieser bestimmten M_5 wird dann unser ausgewählte Punkt vermöge der Transformationen der vorliegenden Gruppe beliebig verschoben.

Soll daher unsere M_{n-1}, die durch die invariante Gleichung gegeben ist, einen Punkt in allgemeiner Lage enthalten, so muss sie auch die ganze charakteristische M_5 enthalten, die von diesem Punkte ausgeht. Wenn also unsere M_{n-1} überhaupt Punkte allgemeiner Lage enthält, dann wird sie vollständig überdeckt sein von den M_5, die von diesen Punkten ausstrahlen, d.h. aus lauter M_5 erzeugt sein und somit unter die M_{n-1} der allgemeinen Lösung fallen. Hieraus können wir nun sogleich schliessen, in welcher Weise sich singuläre Lösungen ergeben werden. Als specielle Punkte werden wir zunächst solche Raumpunkte zu bezeichnen haben,

für die von den Differentialgleichungen $\mathfrak{X}'_1(f) = 0 \ldots \mathfrak{X}'_r(f) = 0$ weniger als s linear unabhängig sind. Die charakteristischen Mannigfaltigkeiten, die von solchen Punkten ausstrahlen, werden unter Umständen weniger als s Dimensionen besitzen können, wenn sie nämlich ganz im Gebiet der singulären Punkte verlaufen. Um nicht in Weitläufigkeiten zu gerathen, werden wir in jedem Falle untersuchen, ob es Mannigfaltigkeiten $(n-1)$ster Dimensionen giebt, die aus lauter solchen speciellen Punkten bestehen und alle unsere Differentialgleichungen befriedigen. Diese Frage wird nun noch genauer analytisch zu formulieren sein. Jedenfalls werden diese singulären M_{n-1} nichts mit den absoluten Invarianten zu thun haben, sondern uns nur relative Invarianten liefern.

[6 [VI 93]] Gegeben ist das System der r infinitesimalen Transformationen der Gruppe

$$\mathfrak{X}'_1 = \xi_{11}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_{1n}\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$\mathfrak{X}'_2 = \xi_{21}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_{2n}\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{X}'_r = \xi_{r1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_{rn}\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf die Matrix, die durch die Coefficienten ξ dargestellt wird: $\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \dots & \xi_{1n} \\ \dots & & \dots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} \dots & \xi_{rn} \end{vmatrix}$. Wenn von den r Transformationen K' nur s, wo $s \leqq r$, im allgemeinen Sinne, linear unabhängig sind, so besagt dies einfach, dass alle $(s+1)$ gliedrigen Determinanten, die sich aus dieser Matrix bilden lassen, verschwinden müssen, und zwar ist dieses der Fall für jeden beliebigen Raumpunkt. Für die singulären Punkte aber, von denen am Schlusse der letzten Stunde die Rede war, wird noch eine höhere Abhängigkeit der Transformationen K' statt haben müssen. das Mindeste, was eben weiter eintreten kann, wird dann sein, dass alle s-reihigen Determinanten gleich null sind. Umgekehrt bekommt man daher geradezu die Mannigfaltigkeit aller singulären Punkte des Raumes, indem man alle s-reihigen Determinanten unserer Matrix gleichzeitig gleich 0 setzt. Um dann weiter alle relativen Invarianten zu finden, die nicht mit der Aufstellung der

absoluten Invarianten von selbst gegeben sind, sowird man zunächst zusehen, ob unsere singulären Punkte vielleicht eine M_{n-1} ausfüllen, deren Gleichung $f = 0$ ist. Ist dieses der Fall, dann fragt man schließlich, ob für diese Function f vielleicht $\mathfrak{X}'(f) = 0$, $\mathfrak{X}'_2(f) = 0$ .... $\mathfrak{X}'_n(f) = 0$ wird eben vermöge $f = 0$. Denn dann ist eben f eine relative Invariante und $f = 0$ eine invariante Gleichung.

Sie werden nun natürlich auch ein Beispiel für diese Theorie wünschen; Sie finden dieselben in größerer Zahl in dem Buche Lie - Scheffers (1891) Hier wollen wir uns begnügen, das einfachste Beispiel anzuführen. Es sei:

$x' = ax$

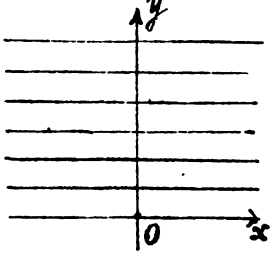
$y' = y$ die vorgelegte Gruppe mit dem Parameter a. Die einzige infinitesimale Transformation derselben giebt $\delta x = x . \delta a$

$\delta y = 0$ oder das Symbol

$\mathfrak{X}'(f) = x . \frac{\partial f}{\partial x}$.

Wir stellen daher die Differentialgleichung auf: $x \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und betrachten, um sie zu integrieren, die einzelnen charakteristischen Mannigfaltigkeiten, die vom einzelnen Punkte x, y auslaufen. Diese Charakteristiken, auf denen

die Punkte durch die Transformationen hin und her geschoben werden, werden einfach durch sämtliche Horizontallinien dargestellt, d.h. durch die Curven $y = const.$ Indem nun die allgemeine Lösung aus lauter charakteristischen M_2 zusammengesetzt ist, ergibt sich als ihre Gleichung $F(y) = const$, wo F eine beliebige Function bezeichnet, d.h. die allgemeinen Lösungen unseres vollständigen Systems werden durch beliebige Functionen von y gebildet. Diese beliebigen $F(y)$ bilden daher auch die absoluten Invarianten der Gruppe. Die Frage wird nun sein, ob es neben ihnen noch besondere relative Invarianten giebt. Wir bilden, um sie zu finden die Determinantenmatrix der Coefficienten, diese lautet einfach $|x|$. Sollen dann auch sämmtliche eingliedrigen Determinanten verschwinden, d.k. in diesem einfachen Falle, soll auch $x = 0$ sein, so liefert diese Gleichung die Punkte der y-Axe.



Diese bilden eine M_1, und die einfache Prüfung zeigt uns schließlich sofort, <u>daß in der That $x = 0$ eine invariante Gleichung von einzelnen Stellung, x selbst eine relative Invariante ist.</u>

Die Curve $x = c$ bleibt eben invariant, weil ihre einzelnen Punkte invariant sind, und steht damit im Gegensatz zu den Curven $y = \text{const}$, welche als Bahncurven der infinitesimalen Transformation invariant sind.

Haben wir bisher nur von Invarianten gesprochen, welche von den Coordinaten $x_1, x_2 \ldots x_n$ eines einzelnen Punktes abhängen, so wird man weiterhin versuchen, die Invarianten eines Punktepaares, eines Punktetripels etc aufzustellen. Diese Theorie ist nun im Grunde von der bisherigen gar nicht verschieden. Haben wir nämlich neben dem ersten Punkt $x_1, x_2 \ldots x_n$ noch einen zweiten $x_1', x_2' \ldots x_n'$, so können wir die Coordinaten $x_1, x_2 \ldots x_n, x_1', x_2' \ldots x_n'$ nebeneinander als ebensoviele neue Coordinaten eines höheren Raumes betrachten und sie den Transformationen $X_1 f + X_1' f, X_2 f + X_2' f, \ldots X_n f + X_n' f$ unterworfen denken. Dann hat es gar keine Schwierigkeit für das Punktepaar genau nach der früheren Methode, absolute Invarianten und relative Invarianten aufzustellen. Ebenso ist es weiter für das Punktetripel u.s.w. fort. Da aber die Zahl der Variabeln dann immer wächst, während die Zahl der Operationen $X f$ con-

stand gleich x bleibt, so wird hier gewiss eine immer wachsende Zahl von Invarianten hervorkommen, (während für das einzelne Werthsystem x möglicher, weise überhaupt noch keine Invarianten existiren).

Auch hier wollen wir wieder ein ganz einfaches Beispiel betrachten:

Die Gruppe sei durch die Substitution

$$x_1 \| \alpha x_1 + \beta x_2$$
$$x_2 \| \gamma x_1 + \delta x_2 \text{ gegeben *)}$$

Diese Formeln stellen eine 4 gliedrige Gruppe dar, ihr liegen die 4 infinitesimalen Transformationen zu Grunde.: $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}, x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}, x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$. Für ein Punktepaar: x_1, x_2, x_1', x_2' welches wir diesen Transformationen unterwerfen, haben wir daher die Symbole: $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1' \frac{\partial f}{\partial x_1'}, x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2' \frac{\partial f}{\partial x_1'}, x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_1' \frac{\partial f}{\partial x_2'}$,

$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2' \frac{\partial f}{\partial x_2'}$ zu nehmen.

Wollen wir nun die absoluten Invarianten der Punktepaare finden, so setzen wir die 4 letzten Aus-

*) Um weitere Indices zu vermeiden, ist hier diese andere Schreibweise einer Transformation benutzt.

drücke gleich. Wir bekommen die 4 Differentialgleichungen: $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1' \frac{\partial f}{\partial x_1'} = 0$, $x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2' \frac{\partial f}{\partial x_1'} = 0$,

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_1' \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 0 \qquad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 0.$$

Die Determinantenmatrix der einzelnen $\frac{\partial f}{\partial x}$ lautet hier:

$$\begin{array}{|cccc|} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_1'} & \frac{\partial f}{\partial x_2'} \\ x_1 & 0 & x_1' & 0 \\ x_2 & 0 & x_2' & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_1' \\ 0 & x_2 & 0 & x_2' \end{array}$$

. Diese Matrix ist zufällig gerade eine 4 gliedrige Determinante Da diese im allgemeinen nun nicht verschwindet, wie sofort zu sehen, so folgt aus den obigen 4 Gleichungen allgemein zu reden das Bestehen der folgenden 4 einfachen Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_1'} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 0$$

Diese Gleichungen führen auf $f = \text{const}$, dies aber besagt, <u>daß es keine absoluten Invarianten der Punktepaare für unsere Gruppe giebt.</u> Um nun zu sehen, ob es singuläre Lösungen giebt, setzen wir die Determinante gleich 0; dies führt ausgerechnet zu der Gleichung: $(x_1 x_2' - x_2 x_1')^2 = 0$ oder:

$$x_1 x_2' - x_2 x_1' = 0$$

Diese Gleichung genügt aber in der That unmittelbar den vier Bedingungen:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1' \frac{\partial f}{\partial x_1'} = 0 \quad \ldots\ldots \quad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2' \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 0$$

Wir haben also eine einzige relative Invariante, das ist $x_1 x_2' - x_2 x_1'$.

Von der Invariantentheorie der Punktepaare, Punktetripel u. s. w. gelangt man nun leicht zu der Theorie der Differentialinvarianten. Man kann nämlich die Differentialinvarianten auffassen als Grenzfälle der Invarianten eines Punktepaares, Punktetripels u. s. w., die entstehen, wenn man die beiden Punkte des Paares oder die drei Punkte des Tripels u. s. w. consecutiv werden lässt.

Wollen wir diesen Gedanken jetzt für die Ebene noch weiter ausgestalten. In der Ebene mögen wir die Coordinaten x, y haben. Wir nehmen dann y als abhängige, x als unabhängige Variable und bilden uns demgemäss die Differentialquotienten y', y'', y''' u. so fort. Nun ist der erste Schritt, dass wir unsere gegebenen Transformationen $X(f)$, die sich zunächst nur auf die Variabelen x und y beziehen, zu allgemeineren Symbolen erweitern, in welchen die Differential-

quotienten y', y'', y''' u. s. w. als Variable mit auf, genommen sind. Wir haben diesen ersten Schritt, was das y' angeht, schon vor einiger Zeit gelegent, lich ausgeführt, indem wir von der unsymmetrischen Transformation $\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$, woselbst ξ und η belie, bige Funktionen von x und y darstel, len, zu der ersten erweiterten Transformation über, gingen:

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2 \Big) \frac{\partial f}{\partial y'};$$

Die Differentialinvarianten der gegebenen Gruppe werden sich nun ergeben, wenn wir für die Variabelen $x, y, y' \ldots$ unter Zugrundelegung der erweiterten Sym, bole die gewöhnlichen Invarianten suchen.

Analog ist es, wenn von Anfang an nicht zwei Verän, derliche, x und y, vorgegeben sind, sondern beliebig vie, le. Hier wird man dann sich noch verschiedene Annah, men machen können, welche von ihnen als abhängige, welche als unabhängige Variable beim Differentiren gelten sollen.

Diese allgemeinen Angaben über Differen. tial, invarianten will ich nun durch den Hinweis auf die bezügliche Literatur ergänzen. Was zunächst Beispie, le von Differentialinvarianten der Ebene angeht, so

beziehe ich mich auf Autographie meiner ersten Vorlesung über „Höhere Geometrie", woselbst auf pag. 340 von den „metrischen Differentialinvarianten" und auf pag. 341 ff. von den „projectiven Differentialinvarianten der Ebene" gehandelt wird. Die „metrischen" Differentialinvarianten sind dort speziell solche, die bei den Euklidischen Bewegungen ungeändert bleiben. Hierher gehören beispielsweise als relative Invarianten die Ausdrücke $1+y'^2$ und y''; denn $1+y'^2=0$ besagt, daß die gerade Linie, die das Integral dieser Gleichung darstellt, durch die beiden Kreispunkte geht, und $y''=0$, daß man überhaupt mit einer geraden Linie zu thun habe; — Beides sind doch aber Eigenschaften, die den Euklidischen Bewegungen gegenüber unveränderlich sind; ja die Gleichung $y''=0$ bleibt sogar bei allen Collineationen der Ebene unverändert. Aus diesen beiden Ausdrücken setzt sich dann als absolute metrische Invariante der Krümmungsradius ρ zusammen: $\rho=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$. — Was dann ferner allgemein projective Invarianten angeht, so habe ich damals ausführlich von den betreffenden Untersuchungen von Halphen berichtet, auf die ich mich hier wieder beziehe.

[Fr. f. VII 93] Ich berichte nun noch kurz über Arbeiten von Lie und Sylvester.

Die hauptsächliche Arbeit von Lie, die wir hier nennen müssen, findet sich im Archiv Bd. 8 (1883) und ist in Annalen 32 abgedruckt, unter dem Titel: Ueber Classification und Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zwischen x und y, welche eine Gruppe gestatten. Man vergleiche dazu die Abhandlung Lies in Ann. 24, wo Differentialinvarianten insbesondere auch für „unendliche" Gruppen betrachtet werden, und die Erläuterungen in Lie-Engel I, Kap. 25.

Die Untersuchungen von Sylvester andererseits, die 1884 beginnen, ohne daß Sylvester damals von den Lie'schen Untersuchungen irgendwie Kenntniß hatte, sind in den Jahren 1886-88 im American Journal Bd. 8-10 im Zusammenhange veröffentlicht worden, unter dem Titel: Vorlesungen über Reciprokanten.

Um von letzteren zunächst zu sprechen, so werden wir vorerst fragen, woher die Bezeichnung „Reciprokante" stammt. Der Name ist anfangs von Sylvester weit specieller gebraucht worden als späterhin, da seine Untersuchungen sich weiter ausdehnten. Sylvester ging, wie er selbst sagt, ursprünglich aus von dem Ausdruck: $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\frac{(y'')^2}{y'}$.

Dieser Ausdruck ist bekanntermaßen in der Funktionentheorie sehr vielfach gebraucht, besonders in den Untersuchungen von Schwarz, von Cayley und Sylvester wird daher als der „Schwarz'sche Differentialparameter" bezeichnet. Sylvester vergleicht nun insbesondere diesen Ausdruck $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$, den ich abkürzend gern mit $[y]_x$ bezeichne, mit dem umgekehrten Ausdruck $[x]_y$: Man findet leicht, daß hier die Gleichung besteht: $[y]_x = -y'^2 \cdot [x]_y$.

Diese Gleichung kann man dann auch so schreiben: $\frac{y''' y' - \frac{3}{2} y''^2}{y'^3} = -\left(\frac{x''' x' - \frac{3}{2} x''^2}{x'^3}\right)$, wo natürlich die Differentialquotienten x', x'', x''' der rechten Seite so zu bilden sind, daß man y als unabhängige, x als abhängige Variable ansieht. Hierauf bezieht sich nun das Wort Reciprocante. Sylvester versteht nämlich unter einer Reciprocante eine solche rationale Funktion der Differentialquotienten y', y'', y''' u. s. w. fort, welche ungeändert bleibt bis auf einen Factor, wenn man y mit x vertauscht.

Bei welchen Operationen bleibt nun eine solche Reciprocante überhaupt bis auf einen Factor unge-ändert? Zunächst offenbar bei der Gruppe der Translationen: $\begin{matrix} x_1 = x + a \\ y_1 = y + b \end{matrix}$, für die jeder Differen-

tialquotient unverändert bleibt. Dann jedoch kommen noch weiter wegen der Voraussetzung von x und y hinzu die Transformationen: $x_1 = y + b$

$y_1 = x + a$ Diese bilden mit den Translationen zusammen eine gemischte Gruppe, d.h. eine Gruppe, die aus anderen, discontinuirlich neben einander stehenden continuirlichen Scharen von Transformationen zusammengesetzt ist. Für Laue sind daher die Reciprocanten die Differentialinvarianten einer gemischten Gruppe.

Bei seinen weiteren Untersuchungen ist Sylvester nun ganz von selbst dazu geführt worden, an Stelle der anfänglichen gemischten Gruppe allgemeine continuirliche Gruppen linearer Transformationen $\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ y_1 &= \alpha' x + \beta y + \gamma' \end{aligned}\right\}$ oder auch projectiver Transformationen in Betracht zu ziehen und deren Differentialinvarianten zu studieren.

Wenn dann aber Sylvester für diese weiteren Differentialinvarianten das Wort Reciprocante beibehalten hat, so ist diese Bezeichnung doch eigentlich ungrammatisch; denn die Bezeichnung „Reciprocante" verliert dabei immer mehr ihre ursprüngliche specielle Bedeutung.

Nun wäre die Frage, wie die Untersuchungen von Sylvester sich zu denen von Lie verhalten. Hier werden wir sagen, dass die begriffliche Grundlage bei Lie weit allgemeiner gehalten ist; dagegen führt Sylvester die Betrachtungen viel weiter explicit durch. Haben wir z. B. bei Lie beliebige Gruppen, so legt Sylvester von vornherein nur lineare Gruppen zu Grunde und nimmt auch bei ihnen nur Beispiele. Insbesondere aber beschränkt sich Sylvester auf rationale ganze Differentialinvarianten und fragt bei ihnen nach vollen Systemen von Differentialinvarianten, d. h. solchen Systemen, aus denen alle anderen Differentialinvarianten durch bestimmte Prozesse deriviert werden können.

An jene Vorlesungen von Sylvester haben sich nun sehr viele englische Arbeiten angeschlossen, die ich nicht näher aufzählen will, sondern betreffs deren ich auf das ausführliche Referat verweise, welches Franz Meyer in Bd. I der Jahresberichte der deutschen mathematischen Vereinigung über die Entwickelung der Invariantentheorie gegeben hat. (die Differentialinvarianten finden sich daselbst pag. 230 ff.) Leider ist nun die Sache die, dass die englische Schule bis jetzt die allge-

meineren Grundlagen der Lie'schen Theorie in keiner Weise aufgenommen hat, während Lie wieder versäumt, auf die Entwickelungen der Engländer irgend näher einzugehen.

Ich will nun in Kürze noch die Anwendung der Theorie der Differentialinvarianten auf die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen: $f(x, y, y', y'', y''' \dots) = 0$, wie sie Lie in der genannten Arbeit giebt, erwähnen. Wir nehmen an, dass eine solche Differentialgleichung durch eine bestimmte Gruppe von Transformationen in sich übergeht. Die Integration dieser Differentialgleichung werden wir dann in zwei Schritte zerlegen können. Wir nehmen erstlich 2 unabhängige Differentialinvarianten Φ_1, Φ_2 der Gruppe an Stelle von x u. y als Veränderliche und bekommen eine Differentialgleichung $\varphi\left(\Phi_1, \Phi_2, \frac{d\Phi_2}{d\Phi_1}, \frac{d^2\Phi_2}{d\Phi_1^2}, \dots\right) = 0$, welche die beiden neuen Veränderlichen verbindet, und die allgemein zu reden einfacher sein wird als die ursprüngliche Differentialgleichung. Haben wir dann eine Hülfsgleichung integrirt, so ergiebt sich etwa Φ_2 als Function ω von Φ_1, und wenn wir in dieser einfachen Gleichung $\Phi_2 = \omega(\Phi_1)$ wieder x und y als Veränderliche ansehen, so ist dies eine zweite

Differentialgleichung, die ebenfalls integrirt werden muss. Die Integration der Differentialgleichung ist also in 2 Schritte zerlegt. Als Litteratur sei an dieser Stelle noch das Buch von Lie-Scheffers genannt (1891), welches ja den Titel trägt: Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Im übrigen wollen Sie das Vorstehende nur als blosse Andeutung betrachten, die weiter ausgeführt eine specielle Vorlesung über Differentialgleichungen bilden würden.

Schliesslich wollen wir als letzte Anwendung der continuirlichen Transformationsgruppen 5) weitere Integrationsprobleme behandeln, doch werde ich mich auch hier auf die Besprechung einzelner Punkte beschränken müssen. Neben die gerade besprochene Theorie der Differentialgleichungen $f(x\ y, y', y'' \ldots) = 0$ stellt sich die Verallgemeinerung zunächst die von Lie immer wieder behandelte Theorie derjenigen vollen Systeme linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, welche eine bekannte Gruppe gestatten. (Was ein volles System ist haben wir ja zu Anfang des Semesters bereits erörtert.) Diese Untersuchungen

finden sich in den Annalen Bd. 11 und Bd. 25; ebendarauf bezieht sich die Schlussbemerkung des Buches von Lie-Scheffers.

Es ist jedoch noch ein anderes Beispiel, welches in neuerer Zeit im Mittelpunkte des Interesses steht. Dieses betrifft die homogenen linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit 2 Variabeln. Ihre allgemeine Form ist:

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^m y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m \cdot y = 0.$$

Für die Integration solcher Differentialgleichung hat man in besonders schöner Weise die Gruppentheorie herangezogen. Es ist dies zuerst geschehen von Picard im Jahre 1887 im ersten Bande der Annales de Toulouse, in der Arbeit: „Sur les équations différentielles linéaires et les groupes algébriques de transformations" sowie ganz neuerdings von Vessiot, der ein Schüler von Lie im Jahre 1892 in Paris mit einer These promovirte, die dann in den Annales de l'École normale veröffentlicht ist. Der Titel derselben ist einfach: sur l'intégration des équations différentielles linéaires. Diese Arbeit von Vessiot hat nun eine ganz besondere Beachtung des mathemat. Publikums gefunden

und zwar aus folgendem Grunde: Sie spricht bei seinen allgemeinen Betrachtungen über die Integration von Differentialgleichungen allerdings sehr vielfach davon, ob man eine Gleichung durch Quadraturen lösen kann, ob man sie auf eine Gleichung zurückführen kann u. s. w. Aber er bezeichnet die Functionsklasse, welche er dabei als bekannt ansehen will, nicht näher; es bleibt eben unbestimmt, über welche Functionen z. B. die Quadraturen zu nehmen ist. Solchermaßen behalten seine Entwickelungen etwas Unbestimmtes. Es findet hier etwas Analoges statt wie bei den allgemeinen Galois'schen Sätzen über die Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen, solange man nicht mit Kronecker die Rationalitätsbereiche genau bezeichnet, in denen diese Sätze über die Auflösung der Gleichungen im einzelnen Falle gelten sollen. Die Dissertation von Vessiot bedeutet den Lie'schen Untersuchungen gegenüber gerade einen Schritt analog diesen Kronecker'schen Untersuchungen, indem ausdrücklich unterschieden wird, ob eine Gleichung durch Quadraturen <u>rationaler</u> Functionen integrirbar ist oder nicht u. s. w. fort.

Ein weiterer Grund, weswegen wir ganz be-

sonders auf Vessiot's Arbeit eingehen wollen, wird für uns dann noch der Umstand sein, daß ich ohnehin beabsichtige im nächsten Semester die Theorie der linearen Differentialgleichungen zwischen y und x zum Gegenstand einer Vorlesung zu machen.

Mo. 10 VII 93. Wir beginnen heute mit dem Referat über Picard und Vessiot, daß wir jedoch ganz freigeben wollen. Der Gegenstand, um den es sich handelt, gehört zwar nicht ganz an diese Stelle der Vorlesung; denn es werden auch discontinuirliche Gruppen vorkommen, die doch erst später uns beschäftigen werden. Zunächst haben wir zu erläutern, was unter dem Begriff einer algebraischen Gruppe linearer oder projectiver Transformationen zu verstehen ist. (Unter projectiven Transformationen seien allgemein die gebrochen linearen, unter linearen Transformationen dagegen homogene Transformationen ohne Nenner verstanden.)

Wir werden eine Gruppe dann algebraisch [illegible] $y_{n\,n}$ [illegible] $\mathfrak{s}_i$ durch A [illegible] a [illegible] braischer [illegible] luter Invarianten Alg. $(x_1, \ldots x_n)$ definirt werden kann. Gehen durch eine Substitution unserer Gruppe aus den x_i neue Coordinaten x_i' hervor,

dann sollen die Gleichungen gelten:

$$Alg\, F(x_1', x_2', \ldots x_n') = Alg.\, F(x_1, x_2 \ldots x_n),$$

und durch diese Gleichungen sollen die x' als Functionen der x definirt sein. Setzen wir aber in diese Gleichung für $x_1', x_2' \ldots x_n'$ ihre Werthe aus den Substitutionsformeln ein, dann erhalten wir durch Coefficientenvergleichung eine Anzahl bestimmter algebraischer Gleichungen für die n^2 Coefficienten a_{ik} der Substitutionen. Wollen wir doch dieses Ergebniss geometrisch auffassen, indem wir die Coefficienten $a_{11} \ldots a_{nn}$ als n^2 Coordinaten der Punkte eines R_{n^2} denken. <u>In diesem R_{n^2} haben wir dann ein algebraisches Gebilde aus einem oder mehreren irreduciblen Stücken bestehend.</u> Besteht das Gebilde nur aus einem Stücke, so werden sich die Coordinaten $a_{11} \ldots a_{nn}$ der Punkte derselben als <u>algebraische</u> Functionen einer gewissen Anzahl unabhängiger Parameter $t_1 \ldots t_\nu$ darstellen lassen:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \varphi_{11}(t_1 \ldots t_\nu) \\ a_{12} &= \varphi_{12}(t_1 \ldots t_\nu) \\ &\vdots \\ a_{nn} &= \varphi_{nn}(t_1 \ldots t_\nu). \end{aligned}$$

Das Entsprechende gilt, wenn mehrere irreducible

Stücke vorliegen; wir werden dann eben für jedes einzelne derselben eine solche Formelgruppe haben. Die Anzahl dieser Formelgruppen wird aber immer endlich sein. Also: eine endliche Anzahl von Substitutionsformeln, deren jede eine endliche Anzahl von Parametern und zwar in algebraischer Form enthält.

Jetzt gehen wir gleich dazu über, <u>alle algebraischen Gruppen projectiver Transformationen einer Veränderlichen η aufzuzählen</u>.

a, Wir fragen zunächst nach den <u>continuirlichen</u> algebraischen Gruppen. Wir wissen von früher, dass es überhaupt insgesammt 4 Typen continuirlicher Gruppen giebt, die durch die folgenden Gleichungen gegeben sind:

$$1)\ \eta_1 = \eta + \beta,$$
$$2)\ \eta_1 = \alpha\eta,$$
$$3)\ \eta_1 = \alpha\eta + \beta,$$
$$4)\ \eta_1 = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}.$$

Die Gruppen 1. u. 2 haben je einen, die Gruppe 3 hat zwei, die Gruppe 4 drei Parameter. Alle diese 4 Typen stellen von selbst zugleich <u>algebraische Gruppen</u> vor. Dies ist keineswegs auch bei mehr als

einen Veränderlichen der Fall, dass alle continuirlichen Gruppen linearen oder projectiven Transformationen zugleich algebraisch sind, wie wir für den Fall zweier Variabelen schon oben hervorgehoben haben.

b.) Was nun die <u>discontinuirlichen</u> Gruppen betrifft, so fällt bei ihnen der Begriff der algebraischen Gruppe zusammen mit dem Begriff der <u>endlichen Gruppe</u>, d.h. aus einer endlichen Zahl von Transformationen entstehenden Gruppe.

Es giebt, (was projective Gruppen einer Veränderlichen angeht) 6 Typen <u>endlicher Gruppen</u>, wie wir dies freilich erst in einer der späteren Nummern begründen werden. Diese sind:

1) die Identität $\eta_1 = \eta$, also eine G_1.
2) die Kreisteilungsgruppe $\eta_1 = \varepsilon^r \cdot \eta$, wo $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{\nu}}$ und r eine beliebige ganze Zahl ist. Dieser Typus hängt daher noch von dem Werte von r ab. Die Gruppe ist eine G_ν.
3) die Diedergruppe: $\eta_1 = \varepsilon^r \eta$ oder $\frac{\varepsilon^r}{\eta}$, eine $G_{2\nu}$.
4) die Gruppe des regulären Tetraeders, eine G_{12}.
5) die Gruppe des regulären Oktaeders,

von denen wir jetzt verlangen, dass sie eine gemischte Gruppe bilden sollen. Da wird also jedes einzelne Σ_i mit jedem einzelnen Σ_k verbunden irgend ein anderes Σ, sagen wir, ein Σ_λ liefern. Der Index λ kann dabei nur von den Indices i und k, nicht von der Auswahl der einzelnen Σ_i, Σ_k abhängig sein; denn die Σ_i, wie die Σ_k, bilden in ihrer Gesammtheit je ein Continuum, und es werden daher die sämmtlichen $\Sigma_i \Sigma_k$ ihrerseits ein Continuum vorstellen.

Insbesondere wird $\Sigma_i \Sigma_0 \Sigma_i^{-1}$ allemal ein Σ_0 ergeben; ist dies doch der Fall, sobald wir für Σ_0 die Identität 1 setzen (die ja in der That unter den Σ_0 enthalten sein muss). Die continuirliche Gruppe der Σ_0, d.h. der T, wird daher innerhalb der Gesammtheit der Transformationen der gemischten Gruppe nothwendig ausgezeichnet sein.

Hiernach ergiebt sich nun der folgende Weg zur Aufstellung aller gemischten Gruppen:

Man nehme die einzelnen continuirlichen Gruppen T, und frage jedesmal, ob dieselben so durch Hinzunahme weiterer Transformationen erweitert werden können, dass sie innerhalb der erweiterten Gruppe ausgezeichnet sind. Diese

zweideutigen Gruppen sind dann vielleicht an sich bereits gemischte Gruppen, vielleicht auch continuirliche Gruppen. Jedenfalls wird die Aufgabe sein, aus ihnen alle Untergruppen auszuscheiden, welche die Gruppe der Tenthalben, und von dieser Untergruppen dann eben alle diejenigen beizubehalten, welche gemischte Gruppen sind.

Diese allgemeine Regel werden wir sogleich bei unseren continuirlichen Gruppen der Transformationen einer veränderlichen bestätigt sehen. Wir wollen sogleich das sich ergebende Resultat, welches wir in nächster Stunde im einzelnen zu entwickeln haben, hier noch angeben. Auf Grund der mitgetheilten Regeln werden den bisher aufgezählten 4 continuirlichen und 6 discontinuirlichen Gruppen von η noch 2 (und nicht mehr) gemischte Gruppen hinzutreten. Dieselben sind gegeben durch die Formeln: 1) $\eta_1 = \varepsilon^{\nu}\cdot\eta + \beta$, woselbst ε wieder eine ν^{te} Einheitswurzel u. β ein will-kürlicher Parameter ist.

und 2) $\eta_1 = \alpha\eta$ oder $= \frac{\alpha}{\eta}$. Während wir unter 1 r ∞^1 continuirliche Scharen von Transformationen in der gemischten Gruppe haben, besteht unsere gemischte Gruppe 2 aus 2 Scharen.

Di. 4 VII. 93. Wir wollen jetzt das am Schlusse der letzten

Grunde angeführte Resultat ableiten. Wir hatten gesehen, daß es die folgenden 4 continuirlichen Gruppen I projectiver Substitutionen giebt:

I	II	III	IV
$\eta_1 = \eta + \beta$	$\eta_1 = \alpha\eta$	$\eta_1 = \alpha\eta + \beta$	$\eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\delta\eta + \sigma}$

Wir werden uns jetzt zunächst zu fragen haben, ob wir diese Gruppen zu höheren Gruppen projectiver Transformationen erweitern können, innerhalb deren erstere ausgezeichnet sind. Zu dem Zwecke bedienen wir uns einer Methode, welche wir als das Princip der Fixpunkte bezeichnen wollen. Wir sehen die Gruppen I u. III haben je den Unendlichkeitspunkt als Fixpunkt, die Gruppe II hat den Nullpunkt u. den Unendlichkeitspunkt als Fixpunkt, während die Gruppe IV keine allgemeinen Fixpunkte besitzt. Die Gruppe IV kommt übrigens nicht weiter in Betracht, da sie ja keine Erweiterung mehr gestattet. Nun nehmen wir an, daß Σ irgend eine eingliedrige Operation der erweiterten Gruppe sei, und daß: $\Sigma T_\alpha \Sigma^{-1} = T_\beta$ sei, woselbst T_α u. T_β zwei Operationen der Gruppe I seien, unter der wir uns eine der genannten Gruppen I II oder III zu denken haben. Letzteres besagt ja eben, daß die Gruppe T_α eine ausgezeichnete Untergruppe bildet.

Aus $\Sigma T_a \Sigma^{-1} = T_b$ folgt: $\Sigma T_a = T_b \Sigma$. Ich sage nun, dass in Folge dieser Formel aus einem Fixpunkt von T vermöge Σ nothwendig wieder ein Fixpunkt von T hervorgeht. Wäre das nämlich nicht der Fall, so würde die Aufeinanderfolge ΣT_a ihnen bei verschwindenden T_a eine continuirliche Reihe von Lagen anweisen, während sie doch vermöge $T_b \Sigma$ in eine einzige wohlbestimmte Lage übergeht.

Wir wiederholen: <u>Jeder Punkt, der bei den Operationen T Fixpunkt ist, wird bei einer beliebigen Operation Σ der erweiterten Gruppe entweder ebenfalls festbleiben, oder sich in einen anderen Fixpunkt von T verwandeln müssen.</u>

Auf Grund dieses Satzes können wir nun sofort für die einzelnen Gruppen I, II, III die Form des Σ angeben, die in der erweiterten Gruppe vorkommen können. Im Falle der Gruppe I, für die der Punkt ∞ fest bleibt, können die Σ nur die allgemeine Form $\alpha\eta + \beta$ haben. Im Falle der Gruppe II, für welche die Punkte 0 und ∞ Fixpunkte sind, kann nur die doppelte Möglichkeit eintreten, dass Σ entweder auch diese Punkte 0 und ∞ festlässt oder sie miteinander vertauscht; daher gilt als allgemeine Form für Σ neben einander $\alpha\eta$ und $\frac{\beta}{\eta}$. Im

Falle der Gruppe III endlich, für die der Punkt ∞ wieder ein Fixpunkt ist, kann wieder Σ nur die allgemeine Form $\alpha\eta+\beta$, d.h. die Form der Transformationen der Gruppe selbst haben. Dieser Fall scheidet also aus. Es bleiben demnach nur die beiden Möglichkeiten zur Bildung gemischter Gruppen bestehen:

1) Die Gruppe $\eta+\beta$ wird durch Hinzunahme von Operationen $\alpha\eta+\beta$ erweitert: Aus solchen Operationen $\alpha\eta+\beta$ wollen wir jetzt also eine gemischte Gruppe zusammensetzen, welche $\eta+\beta$ als Untergruppe enthält. Aber gleichzeitig mit $\alpha\eta+\beta$ tritt $\alpha^2\eta+\beta$, $\alpha^3\eta+\beta$ ... ein. Daher muss α als Einheitswurzel gewählt werden. Umgekehrt bilden für $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{\tau}}$ die Substitutionen $\eta+\beta$, $\varepsilon\eta+\beta$, ... $\varepsilon^{\tau-1}\eta+\beta$ in der That eine gemischte Gruppe. <u>Unser Princip der Fixpunkte führt uns daher mit Notwendigkeit im Falle der Gruppe I zu der erweiterten Gruppe $\eta_1=\varepsilon^\nu\eta+\beta$ für $\nu=1,2\ldots\tau$, woselbst $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{\tau}}$ ist und τ irgend eine projective ganze Zahl bedeutet.</u> Es giebt auch keine allgemeinere hier in Betracht kommende Gruppe. Denn wenn wir zwei Gruppen $\varepsilon^\nu\eta+\beta$ und $\varepsilon'^\nu\eta+\beta$ (mit verschiedenen Einheitswurzeln) combiniren, so kommt das darauf hinaus, als ob ε und ε' eine

erweiterten Gruppen sind dann vielleicht an sich bereits gemischte Gruppen, vielleicht auch continuirliche Gruppen. Jedenfalls wird die Aufgabe sein, aus ihnen alle Untergruppen auszuscheiden, welche die Gruppe der T enthalten, und von diesen Untergruppen dann eben alle diejenigen beizubehalten, welche gemischte Gruppen sind.

Diese allgemeine Regel werden wir sogleich bei unseren continuirlichen Gruppen der Transformationen einer Veränderlichen bestätigt sehen. Wir wollen sogleich das sich ergebende Resultat, welches wir in nächster Stunde im einzelnen zu entwickeln haben, hier noch angeben. Auf Grund der mitgeteilten Regeln werden den bisher aufgezählten 4 continuirlichen und 6 discontinuirlichen Gruppen von η noch 2 (und nicht mehr) gemischte Gruppen hinzutreten. Dieselben sind gegeben durch die Formeln: 1) $\eta_1 = \varepsilon^{\nu} \cdot \eta + \beta$, woselbst ε wieder eine ν^{te} Einheitswurzel u. β ein willkürlicher Parameter ist.

und 2) $\eta_1 = \alpha \eta$ oder $= \frac{\alpha}{\eta}$. Während wir unter 1 continuirliche Schaaren von Transformationen in der gemischten Gruppe haben, besteht unsere gemischte Gruppe 2 nur aus 2 Schaaren.

Di. 11 VII. 93. Wir wollen jetzt das am Schlusse der letzten

Stunde angeführte Resultat ableiten. Wir hatten gesehen, dass es die folgenden 4 continuirlichen Gruppen T projectiver Substitutionen giebt:

I	II	III	IV
$\eta_1 = \eta + \beta$	$\eta_1 = \alpha\eta$	$\eta_1 = \alpha\eta + \beta$	$\eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$

Wir werden uns jetzt zunächst zu fragen haben, ob wir diese Gruppen zu höheren Gruppen projectiver Transformationen erweitern können, innerhalb deren erstere ausgezeichnet sind. Zu dem Zwecke bedienen wir uns einer Methode, welche wir als „das Princip der Fixpunkte" bezeichnen wollen. Wir sehen die Gruppen I u. III haben je den Unendlichkeitspunkt als Fixpunkt, die Gruppe II hat den Nullpunkt u. den Unendlichkeitspunkt als Fixpunkt, während die Gruppe IV keine allgemeinen Fixpunkte besitzt. Die Gruppe IV kommt übrigens nicht weiter in Betracht, da sie ja keine Erweiterung mehr gestattet. Nun nehmen wir an, dass Σ irgend eine einzelne Operation der erweiterten Gruppe sei; und dass: $\Sigma T_\alpha \Sigma^{-1} = T_\beta$ sei, woselbst T_α u. T_β zwei Operationen der Gruppe T seien, unter der wir uns eine der genannten Gruppen I II oder III zu denken haben. Letzteres besagt ja eben, dass die Gruppe T_α eine ausgezeichnete Untergruppe bildet.

Aus $\Sigma T_a \Sigma^{-1} = T_b$ folgt: $\Sigma T_a = T_b \Sigma$. Ich sage nun, daſs in Folge dieser Formel aus einem Fixpunkt von T vermöge Σ nothwendig wieder ein Fixpunkt von T hervorgeht. Wäre das nämlich nicht der Fall, so würde die Aufeinanderfolge ΣT_a ihm beiwechselnden T_a eine continuirliche Reihe von Lagen anweisen, während er doch vermöge $T_b \Sigma$ in eine einzige wohlbestimmte Lage übergeht.

Wir wiederholen: <u>Jeder Punkt, der bei den Operationen T Fixpunkt ist, wird bei einer beliebigen Operation Σ der erweiterten Gruppe entweder ebenfalls festbleiben, oder sich in einen anderen Fixpunkt von T verwandeln müſsen.</u>

Auf Grund dieses Satzes können wir nun sofort für die einzelnen Gruppen I, II, III die Form des Σ angeben, die in der erweiterten Gruppe vorkommen können. Im Falle der Gruppe I, für die der Punkt ∞ fest bleibt, können die Σ nur die allgemeine Form $\alpha\eta + \beta$ haben. Im Falle der Gruppe II, für welche die Punkte 0 und ∞ Fixpunkte sind, kann nur die doppelte Möglichkeit eintreten, daſs Σ entweder auch diese Punkte 0 und ∞ festläſst oder sie miteinander vertauscht; daher gilt als allgemeine Form für Σ neben einander $\alpha\eta$ und $\frac{\beta}{\eta}$. Im

Falle der Gruppe III endlich, für die der Punkt ∞ wieder ein Fixpunkt ist, kann wieder Σ nur die allgemeine Form $\alpha\eta+\beta$, d.h. die Form der Transformationen der Gruppe selbst haben. Dieser Fall scheidet also aus. Es bleiben demnach nur die beiden Möglichkeiten zur Bildung gemischter Gruppen bestehen:

1) Die Gruppe $\eta+\beta$ wird durch Hinzunahme von Operationen $\alpha\eta+\beta$ erweitert: Aus solchen Operationen $\alpha\eta+\beta$ wollen wir jetzt also eine gemischte Gruppe zusammensetzen, welche $\eta+\beta$ als Untergruppe enthält. Aber gleichzeitig mit $\alpha\eta+\beta$ tritt $\alpha^2\eta+\beta$, $\alpha^3\eta+\beta\ldots$ ein. Daher muss α als Einheitswurzel gewählt werden. Umgekehrt bilden für $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{\tau}}$ die Substitutionen $\eta+\beta$, $\varepsilon\eta+\beta,\ldots\varepsilon^{\tau-1}\eta+\beta$ in der That eine gemischte Gruppe. Unser Princip der Fixpunkte führt uns daher mit Notwendigkeit im Falle der Gruppe I zu der erweiterten Gruppe $\eta_1=\varepsilon^\nu\eta+\beta$ für $\nu=1,2\ldots\tau$, woselbst $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{\tau}}$ ist und τ irgend eine projective ganze Zahl bedeutet. Es giebt auch keine allgemeinere hier in Betracht kommende Gruppe. Denn wenn wir zwei Gruppen $\varepsilon^\nu\eta+\beta$ und $\varepsilon'^\nu\eta+\beta$ (mit verschiedenen Einheitswurzeln) combiniren, so kommt das darauf hinaus, statt ε und ε' eine

neue Einheitswinkel einzuführen.

2.) Die Erweiterung der Gruppe II ist noch viel einfacher. Zu der Gruppe $\eta_1 = \alpha\,\eta$ tritt hinzu $\eta = \frac{\beta}{\eta}$ oder $\eta_1 = \frac{1}{\eta}$, indem der Parameter β ja schon in dem Parameter α enthalten ist. Wir haben daher an zweiter Stelle ohne weiteres die gemischte Gruppe $\eta_1 = \alpha \cdot \eta^{\pm 1}$.

Stellen wir nun noch einmal alle discontinuierlichen, continuierlichen und gemischten Gruppen projectiver Umformungen, die wir erhalten haben, welche sämmtlich algebraische sind, zusammen: Insgesammt ergeben sich die 12 Typen, wie sie die folgende Tabelle angiebt:

1) $\eta_1 = \eta$
2) $\eta_1 = \varepsilon^{\nu}\eta$. (Kreisteilungstypus).
3) $\eta_1 = \varepsilon^{\nu}\eta$; $\eta = \frac{\varepsilon^{\nu}}{\eta}$ (Diedertypus)
4) Tetraedergruppe
5) Oktaedergruppe
6) Icosaëdergruppe.
7) $\eta_1 = \eta + \beta$
8) $\eta_1 = \varepsilon^{\nu}\eta + \beta$.
9) $\eta_1 = \alpha\,\eta$
10) $\eta_1 = \alpha\,\eta$; $\eta = \frac{\alpha}{\eta}$.
11) $\eta_1 = \alpha\,\eta + \beta$.
12) $\eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$

Was wir nun hiermit bei den projectiven Transformationen einer Veränderlichen ausgeführt haben, dies wäre weiterhin natürlich auch bei den projectiven Transformationen von 2, 3, 4.... Veränderlichen zu versuchen. Andererseits würde man auch die homogenen linearen Transformationen von 2, 3, 4.. Variablen in analoger Weise behandeln können.

Die nächste Aufgabe würde also sein, zunächst für die homogenen linearen Transformationen zweier Veränderlichen die Aufzählung der algebraischen Gruppen zu machen, dann für die projectiven Transformationen von 2 Veränderlichen und die homogenen linearen Transformationen von 3 Veränderlichen u. s. w. fort. Ich will doch auch die Hülfsmittel angeben, die uns hierfür ohne weiteres zur Hand sind.

Um z. B. die algebraischen Gruppen der projectiven Transformationen von 2 Veränderlichen aufzuzählen, entnehmen wir zuerst aus der Tabelle von Frang Meyer die continuirlichen Gruppen, jedoch nur diejenigen, in welchen die Parameter algebraisch auftreten. Andererseits hätten wir uns die discontinuirlichen Gruppen zu verschaffen; diese sind in einer Arbeit von C. Jordan aufgezähl

worden, die wir später noch genauer zu besprechen haben. Dann wäre das Princip der Fixpunkte anzuwenden, um aus den genannten Gruppen erweiterte Gruppen zusammenzusetzen, aus denen dann schliesslich die gemischten Gruppen ausgeschieden werden müssen. Die hier angedeutete Zusammenstellung, die bisher noch nicht durchgeführt ist, ist eine gewiss dankenswerthe Arbeit.

Wir gehen nun zurück zu dem Referat über Vessiot, indem wir an die von uns aufgestellte Tabelle weiter anknüpfen. Unsere weitere Aufgabe sei es jetzt, für jede der dort aufgezählten Gruppen die fundamentalen Differentialinvarianten aufzustellen, d.h. diejenigen Differentialinvarianten, aus denen sich alle anderen rational oder durch Differentiation berechnen lassen. Diese Restorànkung auf die Gruppen unserer Tabelle ist natürlich nur eine vorläufige, man wird fordern müssen, dass später analoge Betrachtungen für die Gruppen mit $r, 3 \ldots$ Veränderlichen angestellt werden. Wir denken uns y in der Tabelle als Function von x; y' y'' y''' u.s.w. sind dann die Differentialquotienten dieses y nach x. Nun wollen wir der Reihe nach die 11 Typen unserer Gruppen durchgehen

und uns jedesmal fragen, welches die einfachste Invariante für jede desselben ist, die sich aus η und seinen Differentialquotienten zusammensetzt.

Aus diesen einfachsten Invarianten, welche wir für diese 12 Fälle bekommen, werden sich alle anderen Invarianten rational bezw. durch Differentiation berechnen lassen.

Wir finden leicht die folgenden Ausdrücke als einfachste Invarianten bezw. Differentialinvarianten:

Fall 1. η selbst *)
Fall 2. η^r
Fall 3 $\eta^r + \frac{1}{\eta^r}$

Fall 4. $r_{12}(\eta)$
Fall 5 $r_{24}(\eta)$
Fall 6. $r_{60}(\eta)$

} d.h. rationale Functionen 12, 24 resp. 60. Grades. Näheres betreffs derselben sehe man in meinen Vorlesungen über das Ikosaëder.

Fall 7. η'
Fall 8. η'^r
Fall 9. $\frac{\eta'}{\eta}$

*) Wir nennen auch die Ausdrücke hier Differentialinvarianten, die gar keine Differentialquotienten enthalten, aus leicht verständlichen Gründen.

Nd 10. $\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^2$

Nd 11. $\frac{\eta''}{\eta'}$

Nd 12. $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$ (Schwarz'schen Differential-parameter.)

Das diese Ausdrücke in der That in jedem Falle die einfachsten Invarianten sind, ist ja klar; dass man hieraus aber alle anderen rational resp. durch Differentiation ableiten kann, muss eine Specialbetrachtung zeigen, bei der wir jedoch jetzt nicht verweilen wollen.

Nun zeigt sich in der vorstehenden Zusammenstellung das folgende einfache Princip. Ist die Gruppe g in der Gruppe G enthalten, woselbst g u. G irgend welche Gruppen unserer Tabelle sein mögen, und sind die Invarianten von g u. G entspr. φ u. Φ, dann lässt allemal Φ sich aus φ rational ev. durch Differentiation ableiten. Um dies zu beweisen, braucht man ja nur die einzelnen Fälle der Reihe nach durchzugehen. Die Gruppe 1 ist z. B. in allen folgenden enthalten; demgemäss leiten sich auch alle folgenden Invarianten aus der ersten Invariante η durch Differentiation und rationale Zusammensetzung ab. Ebenso ist die Gruppe 2 in der Gruppe 3 enthal-

.en, daher leitet sich auch die Invariante η^{r+1} rational aus η^r ab. Schließlich wollen wir noch die zu der Gruppe 12 u. der in ihr enthaltenen Gruppe 11 gehörenden Invarianten mit einander in Beziehung setzen. Dies ist sofort geschehen, wenn wir nur $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$ in der Form schreiben $\frac{d\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$.

Von diesem Zusammenhang der 12 Invarian. ten wollen wir nun eine Anwendung auf die Classi. fication gewisser Differentialgleichungen machen.

Wir betrachten allemal die Gl. $y = R(x)$ woselbst y die eingeln Invariante, $R(x)$ irgend eine ratio. nale Function von x bezeichnet. Die erste Gl. lau. tet daher $y = R(x)$ *), die letzte $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = [\eta]_x = R(x)$. Der Satz, daß sich die Invariante $\bar{y}$ aus der Invariante y berechnet, läßt sich jetzt dahin wenden, daß von unseren 12 Typen von Differential. gleichungen die ersten 11 als specielle Fälle des letz. ten Typus angesehen werden können. Solchergestalt erhalten wir für diese letzte Differentialgleichung

*) Wieder wollen wir eine solche Gl. eine Differentialgleichung nennen, wenn auch keine Differentialquotienten vorkommen.

$[\eta]_x = R(x)$ ein gruppentheoretisches Princip der rationellen Classification. Wir werden die Gleichungen $[\eta]_x = R(x)$ eintheilen, jenachdem sie bereits bei einem der 11 vorangehenden Typen auftreten, oder dem Typus 12 eigentlich angehören.

c. 11 VII. 93. Diese Eintheilung unserer Differentialgleichungen 3. Ordnung trifft in der That das Wesen der Sache, insofern die Gleichungen jeder einzelnen Categorie ihre eigene Theorie der Auflösung, ihre eigene „Integrationstheorie" haben. (Das Wort „Integration" ist hier wieder in der allgemeinen Bedeutung zu verstehen, wie oben das Wort „Differentiation")

Gehen wir nun die einzelne Differentialgleichung einmal daraufhin der Reihe nach durch.

Die erste Gleichung $\eta = R(x)$ ist bereits in sich aufgelöst. Die folgenden Gleichungen 2–6 haben das gemeinsame, daß sie zu discontinuirlichen Gruppen gehören und also nur algebraische Operationen verlangen. Zunächst haben wir in der Gleichung 2 $\eta^r = R(x)$ die einfachste algebraische Normalgleichung vor uns, die es überhaupt giebt; ihre Auflösung wird durch einfaches Wurzelziehen geschehen. Diese Operation des Wurzelziehens werden wir fortan als eine ausführbare Operation postulieren.

Dann sind auch die Fälle 3, 4, 5 d.h. die Dieder, Te-
traeder u. Oktaedergleichung direct zu lösen, näm-
lich durch wiederholtes Wurzelziehen, z. B. die Gleichung
3. $\eta^r + \frac{1}{\eta^r} = R(x)$ läßt als eine r^{te} Wurzel aus einem
Ausdrucke berechnen, der selbst eine Quadratwurzel
enthält. Dagegen giebt der Fall der Gleichung 6,
die Ikosaëdergleichung, das erste Beispiel eines hö-
heren algebraischen Normalproblems, das eben
nicht mehr durch einfaches Wurzelausziehen erle-
digt werden kann. Früher fragte man in der Theo-
rie der algebraischen Gleichungen überhaupt nur,
ob eine vorliegende Gleichung durch Wurzelziehen auf-
lösbar ist oder nicht, und war letzteres der Fall, so
sprach man von einer nicht auflösbaren Gleichung.
Der gereiftere Standpunkt ist aber der, nicht alle, nicht
auflösbaren Gleichungen einfach bei Seite zu lassen,
sondern vielmehr aus ihrer Gesammtheit die einfach-
sten Gleichungen aufsuchen, deren Lösung man wieder
adjungieren wird, um mit ihrer Hülfe in der Theorie
der übrigen algebraischen Gleichungen weiter zu kom-
men. In diesem Sinne bietet sich zunächst eben die
Ikosaëdergleichung dar und es gilt zu untersuchen, wie
weit man in der Theorie der algebraischen Gleichungen
kommt, wenn man die Auflösung der Ikosaedergle-
chung, die ebenso wie das Wurzelziehen durch einfache
Reihenentwickelung geleistet wird, hinzunimmt.

Die vorstehenden Angaben hängen übrigens auf's Genaueste mit der Structur der Gruppen, der G_n, G_{2n}, G_{11}, G_{24}, G_{60}, zusammen, die den einzelnen Gleichungen zugehören. Während sich die übrigen Gruppen noch in einfachere zerlegen lassen, ist die G_{60} der Ikosaëdergleichung eine einfache, ungerlegbare Gruppe, und hieraus erklärt sich eben die besondere Stellung dieser Gleichung. Dieses haben wir ja schon neulich einmal angedeutet, als wir von C. Jordan sprachen. Vergl. übrigens hierüber meine Vorlesung über algebraische Gleichungen vom Winter 91 - 92.

Gehen wir nun weiter zur Differentialgleichung z. B. $y' = R(x)$. Die Lösung derselben giebt man an, indem man $y = \int R(x)\,dx$ setzt. Diese Operation des Integrirens, die Quadratur betrachtet man ja als etwas ganz Gewöhnliches, als eine Operation, die man jederzeit ausführen kann. Aber die nähere Ueberlegung zeigt, daß hier auch wieder nur das erste Glied einer Kette vorliegt. Es ergiebt sich eine ganz ähnliche Abstufung, wie bei der Auflösung der algebraischen Gleichungen. Die Quadratur stellt eben den einfachsten Prozeß dar, den man überhaupt adjungieren muß (entsprechend dem

Wurzelgleichen der Algebra.) um von Lösungen irgend welcher Differentialgleichungen sprechen zu können. Durch Wiederholung von Quadraturen integrirt man dann je eine ganze Reihe von Differentialgleichungen. Man hat nun wieder lange Jahrzehnte hindurch sich begnügt, alle die ∞ vielen Differentialgleichungen, die sich nicht auf Quadraturen zurückführen lassen, schlechtweg als nicht auflösbare Gleichungen zu betrachten. Der moderne Standpunkt dagegen ist es, diese nicht auflösbaren Gleichungen nicht einfach bei Seite zu lassen, sondern weiter zu classificiren: Man wird unter ihnen den einfachsten Fall als einen zweiten Fundamentalfall gelten lassen, dessen Lösung man postulirt, um ferner zu untersuchen, wie weit man mit diesem Resultat kommt. Unter den Gleichungen, die dann noch unerledigt bleiben, wird man abermals die einfachste herausgreifen u. ihre Lösung verlangen u. s. weiter fort.

Sehen wir uns nun in Rücksicht auf diese allgemeinen Bemerkungen die folgenden Differentialgleichungen unserer Tabelle an. Da zeigt sich denn, daß wir die Gleichungen 8–11 gleichfalls durch Quadraturen lösen können, wenn wir noch

algebraische Operationen (oder die nicht viel weiter gehende Operation der Exponentialfunction) hinzunehmen. Die Lösung der Gleichung 8 wird dann fast durch das Integral eines Wurzelausdrucks $\eta = \int \sqrt[r]{R(x)}\,dx$ gegeben, die Lösungen der Gleichungen 9, 10 u. 11 durch $\eta = e^{\int R(x)\,dx}$, resp. $\eta = e^{\frac{1}{r}\int \sqrt{R}(x)\,dx}$ und $\eta = \int e^{\int R(x)\,dx}\,dx$. Dagegen erweist es sich als unmöglich, die Gleichung (12) in entsprechender Weise zu erledigen. Es besteht da eine vollständige Analogie mit der Theorie der ersten 6 Gleichungen. Wie die 6te Gleichung, die Icosaedergleichung, ein vollständiges Problem bot, so läßt sich auch die letzte Gleichung $[\eta]_x = R(x)$ nicht auf Quadraturen zurückführen, sondern bietet einen neuen Typus für die Integration der Differentialgleichungen dar, den man als Fundamentaltypus gelten lassen wird. Man wird in der ferneren Theorie der Differentialgleichungen zu untersuchen haben, wie weit man kommen kann, sofern man die Integration von (12) als einen durchführbaren Prozeß betrachtet.

Fragen wir uns nun wieder, woran es liegt, daß die Gleichungen 8–11 sich wie die Gleichung 7 durch Quadraturen erledigen lassen, während die Gleichung 12 eine Sonderstellung einnimmt.

Dieses Verhalten der Gleichungen kommt ebenfalls zurück auf die Structur der zugehörigen Substitutionsgruppe. Die Gruppe der Gleichung 7 ist die Translationsgruppe. Die Gruppe der Gleichung 8 ist eine gemischte Gruppe, in der die Gruppe 7 als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist, dies entspricht genau dem Umstande, dass man das Integral 8 durch ein Wurzelziehen und eine Quadratur erhält. Die Gruppe der Gleichung 9 $\eta' = \alpha\eta$ geht in die Translationsgruppe über, wenn man $\log\eta$ als neue Variable an Stelle von η eingeführt denkt, wie denn in der Lösung 9 die Exponentialfunction auftritt, deren Exponent die Gestalt eines einfachen Integrals hat.

So gilt ähnliches von der Gruppe der Gleichungen 10 und 11. Die Gruppen der Gleichungen 8–11 sind eben, so weit sie continuirlich sind, aus lauter Bestandtheilen zusammengesetzt, die entweder selbst Translationsgruppen sind oder einer Translationsgruppe ähnlich sind. Die Gleichung 12 dagegen lässt sich nicht auf Quadraturen zurückführen, weil ihre Gruppe eine einfache Gruppe ist.

Indem wir die Gleichung 12 als Definition

eines besonderen Integrationsprozesses auffassen, entsteht dann die Aufgabe, dass wir uns das Wesen dieses letzteren möglichst klar machen. Die Gleichung 2 schon führte uns zu einer neuen Operation, dem Wurzelausziehen, dessen numerische Durchführung auf der Schule gelernt wird. Dann tritt die Icosaedergleichung als neues Problem hinzu. Es ist im einzelnen in meinen Vorlesungen über das Icosaeder gezeigt, welche numerischen Prozesse man auszuführen hat, um die Lösungen der Icosaedergleichung zu finden. Ebenso weiss man, welcher Art der Grenzprozess ist, um das $\int R(x)\,dx$ der Gleichung f zu bestimmen; man hat das bekannte Verfahren der mechanischen Quadratur, um jedes Integral wirklich numerisch auszuwerten. Genau so werden wir im Falle unserer allgemeinen Gleichung 3. Ordnung (11) verlangen, dass man sich auch hier genau die Grenzprozesse überlegt, die uns diesen Fall bewältigen lassen, dass man insbesondere geradezu Anweisungen zur numerischen Rechnung giebt. Dabei empfiehlt es sich, dies sogleich in einer Weise auszuführen, die sich sofort auf alle höheren Probleme ausdehnt, welche

entstehen, indem man die Differentialinvarian-
ten irgend welcher Gruppe als gegeben ansieht.
Diese Gedanken sind von mir in den Sächsischen
Berichten 1883 u. in den Annalen 23 (1884) näher aus-
einander gesetzt worden, worauf ich hier verweise.

Uebrigens kann man für die Gleichung 12 im-
mer eine sogenannte Riccati'sche Differentialglei-
chung 1 Ordnung setzen und vice versa, so daß
wir den Typus, den wir nächst der Gleichung f
als zweite Art von normalen Differentialgleichun-
gen aufführen, auch als den Typus der Riccati'schen
Differentialgleichung bezeichnen können, wie es
vielfach geschieht. Zum Beispiel werden Sie etwa
bei Lie oder bei französischen Autoren oft lesen
können, daß eine vorliegende Gleichung sich sa-
gen wir durch 4 Quadraturen und 2 Riccatische
Gleichungen lösen lasse.

Nun müssen wir noch lernen, welcher Art
allgemein der Zusammenhang der linearen
Differentialgleichungen 2. Ordnung mit unserer
Differentialgleichung 3. Ordnung ist. Es sei die
allgemeine Form der linearen Differentialglei-
chung 2. Ordnung: $y'' + p y' + q y = 0$, woselbst
wir y als Function von x ansehen und p u. q natür-

nale Functionen von x seien. Eine solche Differentialgleichung hat 2 unabhängige Particularlösungen y_1 u. y_2, aus denen selbst sich die allgemeinsten Paare unabhängiger Particularlösungen als lineare Verbindungen $\alpha y_1 + \beta y_2$, $\gamma y_1 + \delta y_2$ zusammen. Führt man nun den Quotienten $y = \frac{y_1}{y_2}$ als unabhängige Variable ein, dann berechnet sich für dieses y eine Differentialgleichung dritter Ordnung vom Typus (12): $[\eta]_x = R(x)$, woselbst die rationale Function $R(x) = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}$ wird. Kennt man nun die Lösung dieser Differentialgleichung 3. Ordnung, so findet man rückwärts folgendermaßen die Lösungen y_1, y_2 der zugehörigen Differentialgleichung 2. Ordnung.

Es ist $\eta' = \frac{y_2 y_1' - y_1 y_2'}{y_2^2}$. Ferner kann man nach einem Abelschen Satze schließen, daß $y_2 y_1' - y_1 y_2' = C \cdot e^{-\int p\,dx}$ ist. Aus beiden Gleichungen folgt dann $y_2^2 = \frac{C}{\eta'} \cdot e^{-\int p\,dx}$ oder:

$$y_2 = \sqrt{\frac{C}{\eta'}} \cdot e^{-\int p\,dx} \quad \text{d. h.}$$

Hat man die Differentialgleichung 3. Ordnung integrirt, so erledigt sich die lineare

Differentialgleichung 2. Ordnung durch eine Quadratur und eine Quadratwurzel.

Wie wir nun unsere Differentialgleichung 3. Ordnung für y in 12 Categorien eingetheilt haben, so wird man auf Grund des dargelegten Zusammenhangs für die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit rationalen Coefficienten eine analoge Classification erhalten. Diese nämliche Classification der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung werden wir, anstatt sie auf der Eintheilung der Differentialgleichung 3. Ordnung aufzubauen, direct bekommen, wenn wir von der Gruppe der homogenen linearen Substitutionen $\alpha y_1 + \beta y_2 \,|\, \gamma y_1 + \delta y_2$ ausgehen und bei ihnen alle algebraischen Untergruppen suchen. Es handelt sich zunächst um eine geeignete Auffassung der Differentialgleichung $y'' + py' + qy = 0$.

Setzen wir die Particularlösungen y_1 u. y_2 [Fr. 14 VII 93] in die allgemeine Gleichungsform $y'' + py' + qy = 0$ ein, so bekommen wir die Gleichungen:

$$\begin{cases} y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \\ y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \end{cases}$$

Aus ihnen berechnet sich

dann:

$$p = -\frac{y_1'' y_2 - y_2'' y_1}{y_1' y_2 - y_2' y_1} \quad \text{und}$$

$$q = +\frac{y_1'' y_2' - y_2'' y_1'}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}, \quad \text{d.h. die Werte von } pu.q,$$

ausgedrückt durch die Particularlösungen y_1 u. y_2 und ihre Ableitungen.

Setzen wir für y_1 und y_2 beliebige lineare Combinationen derselben ein, so bleiben die Ausdrücke für p und q völlig unverändert. Dies besagt soviel, als dass p u. q Differentialinvarianten sein mögen. Offenbar die einfachsten Differentialinvarianten sind, welche y_1 u. y_2 aufgefasst als Functionen von x gegenüber der homogenen linearen Gruppe besitzen. Die Classification der Differentialgleichung 2. Ordnung wird nun hiernach ganz einfach in der Weise zu machen sein, dass wir neben die allgemeine homogene Gruppe $\alpha y_1 + \beta y_2$ ihre sämmtlichen algebraischen Untergruppen setzen und nun der Reihe nach für jede dieser Untergruppen uns diejenigen
$\gamma y_1 + \delta y_2$

fachsten Differentialinvarianten gegeben den ken. So erhalten wir eine Reihenfolge von Proble men, die immer complicirter werden, je compli cirter die gewählte Gruppe ist, bis wir eben zu der allgemeinen Gruppe der linearen Trans for mationen das Problem der allgemeinen hierher gehörigen Differentialgleichung 2. Ordnung erhal ten. Und in der Aufzählung dieser Probleme liegt dann die Classification der linearen Differential gleichung 2. Ordnung, die wir anstreben.

Wenn wir nun noch einen letzten Schritt ausführen u. an Stelle der linearen Differential gleichung 2. Ordnung mit rationalen Coefficien ten eine solche n^{ter} Ordnung setzen, dann ha ben wir die Untersuchungen von Vessiot in ih rer Allgemeinheit. Es sei:

$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0$, woselbst die $p_1, p_2 \dots p_n$ rationale Functionen von x sein sol len. Wir betrachten dann wieder ein System von n unabhängigen Particularlösungen $y_1, y_2 \dots y_n$. Diese können wieder durch n unabhängige lineare Verbin dungen $\sum_1^n \alpha_{1k} y_k, \sum_1^n \alpha_{2k} y_k \dots \sum_1^n \alpha_{nk} y_k$ ersetzt werden.

Diese Ausdrücke geben uns zugleich die allge meine lineare Gruppe der n Veränderlichen y_i. Wenn

wir jetzt die Particularlösungen $y_1 \cdots y_n$ in unsere Differentialgleichungen einsetzen, dann erhalten wir n solche Gleichungen; aus ihnen berechnen sich die $p_1 \cdots p_n$ als Quotienten von Determinanten n^{ter} Ordnung. Man sieht leicht, daß diese Ausdrücke für $p_1 \cdots p_n$ die einfachsten Differentialinvarianten der allgemeinen homogenen linearen Gruppe sind. Hiernach wird man jetzt auch die Classification der Differentialgleichungen durchführen, indem man sämmtliche algebraische Untergruppen der allgemeinen homogenen linearen Gruppe für n Veränderliche aufsucht u. für jede einzelne derselben das System der einfachsten Differentialinvarianten bestimmt.

Vessiot behauptet geradezu: *Zu jeder vorgelegten linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung gehört eine und nur eine algebraische Untergruppe hinzu, welche folgende characteristische Eigenschaft hat:*

1) *Alle rationalen Functionen der $y, y_1 \cdots y_n$ und ihre n Differentialquotienten, welche bei der Operation der Untergruppe ungeändert bleiben, sind rationale Functionen von x.*

2) *Umgekehrt bleibt jede rationale Function von $x, y_1 y_2 y_3 \cdots y_n$ u. ihren Differentialquotienten, wel*

die gleich einer rationalen Function von x ist, bei der genannten algebraischen Gruppe ungeändert.

Sie sehen, diese Vessiot'schen Sätze behaupten etwas ganz Aehnliches, als was in der Galois'schen Theorie der algebraischen Gleichungen bekannt ist. Sind $y, y_1 \dots y_n$ Wurzeln einer vorliegenden algebraischen Gleichung, so wird die Galois'sche Gruppe doch durch gewisse Voraussetzungen dieser Wurzeln gegeben. Die Galois'sche Gruppe hat dabei gerade die entsprechenden beiden Eigenschaften. Eine rationale Function der y_i, welche bei der Gruppe ungeändert bleibt, ist rational bekannt, u. umgekehrt bleibt eine rationale Function der y_i, die rational bekannt ist, bei der Gruppe ungeändert. Von hier aus beherrscht bekanntlich die Structur der Galois'schen Gruppe den ganzen Auflösungsprozess der zugehörigen algebraischen Gleichung. Die Integration einer vorgelegten Gleichung wird wieder genau von der Structur der Vessiot'schen Gruppe abhängen.

Man denke sich nämlich die Vessiot'sche Gruppe nach ausgezeichneten Untergruppen zerlegt. Jeder einzelne Zerlegungsfactor, welcher dabei auftritt, wird einen bestimmten Schritt im Ver-

tegrationsgeschäft bedeuten, und insbesondere wird man die vorgelegte Gleichung durch eine gewisse Reihenfolge von Quadraturen erledigen können, wenn alle Zerlegungsfactoren eingliedrig sind.

Im übrigen muss man für jeden mehrgliedrigen Zerlegungsfactor eine eigene Integrationstheorie sich zurecht legen, genau so wie ich dies in Bd. 23 der Annalen für die allgemeine Differentialgleichung 3. Ordnung gethan habe; ich deutete dies bereits soeben an.

In der That hat Volterra für den Fall, dass die allgemeine homogene lineare Gruppe vorliegt, die betreffenden Erläuterungen in seiner italienischen Arbeit 1886/87 gegeben, die in den Memorie dell' Academia dei XL t. 6 veröffentlicht ist.

Wie Volterra die Integrationstheorie für diesen allgemeinen Fall gegeben hat, so wäre eben eine entsprechende Durchführung der einzelnen speciellen Fälle zu wünschen. –

Ich habe nun meinem Referat über Vessiot noch einige Bemerkungen hinzuzufügen. Ich will voraussetzen, dass ich mit den Beweisen von Vessiot nicht zufrieden bin, so sehr ich glaube, dass seine Resultate richtig sind. Um dies zu

ständlich zu machen, muss ich wieder an die Ga-
lois'sche Theorie anknüpfen. Bei Galois versteht
man unter der Unveränderlichkeit einer rationa-
len Function $\pi(y_1, y_2 \cdots y_n)$ der Wurzeln einer vor-
liegenden algebraischen Gleichung bei irgendwel-
chen Vertauschung der y_i deren numerische Un-
veränderlichkeit, und eben hierauf bezieht sich die
Leistung von Galois, von der man nur eine sehr
unvollständige Darstellung bekommt, wenn
man von formaler Unveränderlichkeit reden woll-
te. Trotzdem geschieht dies letztere in manchen
Lehrbüchern, z. B. in Netto's Substitutionstheorie.
Dies hat neuerdings Bolza in dem Bulletin
of the New York Math. Society II 1893 pag. 33 ff. über-
zeugend hervorgehoben in der Besprechung ei-
ner englischen Bearbeitung des genannten Buches.

Genau das Entsprechende gilt nun von den Pes-
ci'schen Zügen. Es wird sich derselbe Unter-
schied von numerischer und formaler Unverän-
derlichkeit irgendwelcher Functionen der $y, y', \ldots$
hier einstellen, insofern doch unsere $y, y_2 \ldots y_n$
Functionen der einen Variablen x sind. Es kann
daher eine rationale Function der $y_1 y_2 \ldots y_n$ und
$y_1' y_2' \ldots y_n'$ sehr wohl bei einer linearen Trans-for-

mation der y ungeändert bleiben, ohne daß sie es formal thut. Diesen Punkt hat Vessiot, wie mir scheint, bei Aufstellung seiner Sätze nicht hinreichend berücksichtigt, und man wird seine Beweise deshalb umändern müssen, etwa so wie Picard 1887 ursprünglich seine Betrachtungen begann, die er freilich nicht bis zu Ende durchgeführt hat.

Eine andere Bemerkung, die ich noch hinzufügen möchte, ist diese: In der Algebra geht man über das allgemeine Schema von Galois hinaus, in der Art, daß man bei jeder vorgelegten Gleichung entscheiden kann, in welche Galois'sche Kategorie sie bei gegebenem Rationalitätsbereich gehört, und daß man geradezu alle Gleichungen aufstellen kann, die bei gegebenem Rationalitätsbereich in eine bestimmte Galois'sche Kategorie gehören, wozu Kronecker vielfach die Mittel gegeben hat.*) Entsprechend wünschen wir bei den Differentialgleichungen eine Durchführung der Vessiot'schen Theorie an concreten Beispielen, zunächst den niedrigsten concreten Beispielen.

---

*) Vergleiche z. B. Aufstellung aller ganzzahligen Gleichungen, die sich durch Wurzelzeichen lösen lassen.

Das einfachste Beispiel der Differentialgleichung 2. Ordnung für y, y_2 oder der Differentialgleichung 3. Ordnung für y, welches es hier überhaupt giebt, ist die Theorie der hypergeometrischen Functionen.

Ein erster Beitrag zu unserer Forderung wäre daher die Verteilung der hypergeometrischen Functionen resp. der zugehörigen y. Functionen auf die 12 bezüglichen Typen unserer Tabelle. Hier müßte dann alles das seine Stelle finden, was uns historisch überkommen ist, z.B. die algebraisch integrirbaren Fälle. Insbesondere sind hier auch einzuordnen die alten Untersuchungen von Euler, Joh. Fr. Pfaff etc über diejenigen Fälle hypergeometrischer Differentialgleichungen, die durch Quadraturen erledigt werden können, Untersuchungen, welche Markoff noch neuerdings in den Ann. 28, 29 zu einem gewissen Abschluß gebracht hat. Die betreffenden Untersuchungen von Pfaff, die ich hier besonders betonen möchte, finden sich in seinen Disquisitiones analyticae (Helmstedt 1797, zweiter Band), dort werden eine ganze Reihe von „casus integrabiles" für die hypergeometrische Differentiale.

zeichnung aufgezählt. Es wäre insbesondere zu prüfen, in wie weit seine Angaben vollständig sind oder nicht, etc. etc.

[Mo. 17. III 93] Jetzt sollte in dieser Vorlesung zunächst noch ein Abschnitt über endliche continuirliche Gruppen von Berührungstransformationen, sowie sodann ein weiterer Abschnitt über unendliche continuirliche Gruppen folgen. Doch da uns die Zeit fehlt, so müssen wir auf die nähere Behandlung dieser Kapitel verzichten, wir begnügen uns für die genannten Gegenstände einige Literaturangaben zu machen. Was die endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen betrifft, so finden Sie dieselben im Zusammenhange behandelt in dem zweiten Bande des Buches von Lie-Engel.

An dieser Stelle würden sich dann auch die Beispiele der endlichen Gruppen von Berührungstransformationen einreihen, die wir ausführlich im letzten Semester besprochen haben, wie z.B. die $\infty 15$ Kugeltransformationen. Was dann

die unendlichen Gruppen angeht, so hat Lie ein, mal in den Ann. Bd. 24, dann in den Leipziger Berichten 1891 hierauf bezügliche Zusammenstellungen gegeben.

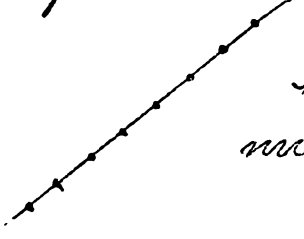
Wir wenden uns nunmehr, in Uebereinstimmung mit der anfänglichen Disposition dieser Sommervorlesung, zu dem zweiten Theil derselben, zu den discontinuirlichen Gruppen.

Man sollte dieselben vielleicht in der Weise in Angriff nehmen, dass man vorerst alle continuirlichen Gruppen betrachtet und dann aus ihnen die discontinuirlichen Untergruppen herausgreift. Doch ist die so allgemeine Problemstellung erst in soweit behandelt worden, als man von projectiven oder von homogenen linearen continuirlichen Gruppen ausging, durch welche natürlich die Gesammtheit aller continuirlichen Gruppen keineswegs erschöpft ist. Die genannten Gruppen wollen auch wir hier zu Grunde legen. Wir beginnen wieder mit einem speciellen Falle, indem wir zunächst die „Hauptgruppe" der räumlichen Transformationen, insbesondere die Gruppe aller Bewegungen, in dem angegebenen Sinne untersuchen. Die hierin liegende Fragestellung hat unmittelbar elementargeometrisches Interesse, und

wir werden bald auch lernen, wie sich die Krystallographie auf diese gruppentheoretischen Untersuchungen aufbaut.

Wir beginnen mit der Gruppe der Ebene. Hier liefert uns zunächst die continuirliche Gruppe aller Translationen die folgende discontinuirliche Gruppe:

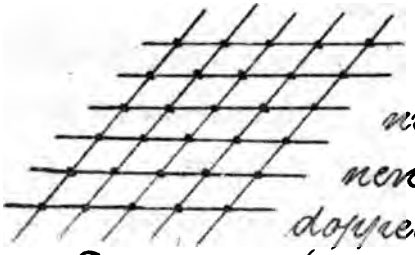
$$1)\quad \begin{cases} x' = x + m\,a \\ y' = y + m\,b \end{cases}$$ woselbst m alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen mag und a, b irgendwelche Constante bezeichnen. Insbesondere stellen diese Formeln eine eigentlich discontinuirliche Gruppe dar, da ∞ kleine Coordinatenänderungen nicht auftreten können. Dem einzelnen Punkt der Ebene ordnen sich eine ganze Reihe ae, quivalenter Punkte vermöge der Gruppe zu, die sämtlich in gleichen Intervallen auf einer geraden Linie liegen.



Neben diese erste Gruppe stellt sich nun sofort die zweite:

$$2)\quad x' = x + m\cdot a + n\cdot c$$
$$y' = y + m\,b + n\cdot d,$$ wo für m u. n wieder alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ gelten. Wir werden hier jedenfalls eine discon-

unwirkliche, von der Gruppe 1 verschiedene Gruppe erhalten, sobald das Verhältniss $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ ist, was wir voraussetzen wollen. Dem einzelnen Punkte der Ebene sind dann 2 fach ∞ viele Punkte zugeordnet, die wie die Figur andeutet, sich auf 2 Parallelschaaren gerader Linien in gleichen Intervallen verteilen.



Gewöhnlich lernt man diese Verhältnisse nicht in der Geometrie, sondern in der Functionentheorie kennen, wenn von doppelt periodischen Functionen die Rede ist. Dann werden die beiden Gleichungen 2 in die eine zusammengefasst:

$$(x' + iy') = (x + iy) + m(a + ib) + n(c + id) \text{ oder}$$

$$x' = x + m \cdot \omega + n \cdot \omega' .$$

Aus der Theorie der elliptischen Functionen ist weiter auch der folgende Satz bekannt, dass dreifach periodische eindeutige Functionen einer complexen Veränderlichen unmöglich sind. Dieser Satz wird hier wieder in einfache geometrische Form sich umsetzen. Seien $a + ib$, $a' + ib$, $a'' + ib''$ die 3 Perioden, zwischen ihnen soll keine ganzzahlige lineare Gleichung stattfinden, d. h. es soll nicht gelten:

$k(a+ib)+k'(a'+ib')+k''(a''+ib'')=0$, woselbst k, k', k'' ganze Zahlen bezeichnen. Denn anderenfalls könnte man allemal zwei neue Perioden einführen aus denen die 3 Perioden sich ganzzahlig linear zusammensetzen liessen. Nun besteht der bekannte Satz von Jacobi, dass man aus derartig charakteristischen Grössen $(a+ib), (a'+ib'), (a''+ib'')$ alle, mal eine lineare Combination

$k(a+ib)+k'(a'+ib')+k''(a''+ib'')$ bilden kann mit ganzzahligen Coefficienten, die kleiner als jede beliebig vorgegebene Grösse δ wird.

Dies aber liefert geometrisch das einfache Resultat: <u>Wollten wir eine Gruppe mit 3 linear unabhängigen Verschiebungen in der Ebene bilden, so würden wir auch ∞ kleine Transformationen heraus bekommen; die Gruppe würde also aufhören eigentlich discontinuirlich zu sein und kommt eben darum hier zuvörderst nicht in Betracht.</u>

Gehen wir nun zu den <u>Drehungen in der Ebene</u> über. Es ist auch hier bequem, mit den complexen Variabeln $z = x+iy$ zu operieren.

Die Drehungen um den Anfangspunkt O wer den dann gegeben durch $z' = e^{i\varphi}\cdot z$, woselbst φ den Drehungswinkel bezeichnet.

Wir haben bereits in der Einleitung dieser Vorlesung gesehen, daß die Formel

$x' = e^{i\nu} \cdot x$ für $\nu = -\infty, \ldots +\infty$ allgemein eine uneigentlich discontinuierliche Gruppe vorstellt, wenn nicht ν commensurabel ist mit 2π. Soll daher eine Gruppe von Drehungen um ein festes Centrum eigentlich discontinuierlich sein, so wird sie endlich sein und die Gestalt haben:

$x' = \varepsilon^{\nu} \cdot x$, für $\nu = 0, 1 \ldots n-1$, woselbst $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ eine Einheitswurzel ist. In unserer Untersuchung treten hier also die Einheitswurzeln in entscheidender Weise ein.

Die Größe ε kann natürlich hier eine beliebige Einheitswurzel sein. Wie gestaltet sich aber die Sache, wenn wir noch Translationen hinzunehmen? Wir wollen wieder rein geometrisch vorgehen. Es sei die Drehung T durch den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ um den Punkt O gegeben, sowie die Translation T, der zufolge O in einen neuen Punkt O' übergeht. Dann ist zunächst sicher, daß um den aequivalenten Punkt O' innerhalb unserer Gruppe auch eine Drehung T' durch den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ stattfindet, und zwar setzt sich, wie leicht zu übersehen ist, und ebenso früher ausgeführt wurde T' aus T u. T nach der For-

mel zusammen:

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{S}.$$

Nun wollen wir die Transformation betrachten $\mathfrak{T}^{\nu}\,\mathfrak{T}'^{-\nu}$, die jedenfalls auch in unserer Gruppe enthalten sein muß, d. h. wir wollen zunächst um O durch den Winkel $\frac{2\pi}{n}\cdot\nu$ in positivem Sinne, darauf um O wieder durch den Winkel $\frac{2\pi}{n}\cdot\nu$ je. doch in negativem Sinne die Ebene gedreht den. ken. Dies kommt offenbar auf eine reine Transla. tion hinaus. Diese Translation wollen wir nun be. rechnen. Es ist:

die Operation $\mathfrak{T}^{\nu}$ gleich $x' = \varepsilon^{\nu}\cdot x$

$\mathfrak{T}'^{-\nu}$ gleich $(x' - \xi) = \varepsilon^{-\nu}(x - \xi)$,

wenn wir dem Punkte O' das Argument ξ geben. Statt der letzten Gleichung schreiben wir die neue mit anderen Accenten:

$(x'' - \xi) = \varepsilon^{\nu}(x' - \xi)$ und setzen nun aus der ersten Gleichung für x' seinen Wert ein. Dann kommt: $x'' = x + \xi(1 - \varepsilon^{-\nu})$, also in der That eine reine Translation. Nun kann ν alle Werte $0, 1, \ldots n-1$ bekommen.

<u>Enthält daher eine Gruppe neben einer Verschie. bung ξ eine Drehung um ε, dann enthält sie überhaupt alle Verschiebungen $\xi\cdot\varepsilon^{\nu}$ für $\nu = 0, 1, 2 \ldots n-1$.</u>

Dies sind insgesammt n Verschiebungen. Nun gilt aber der oben angeführte Jacobi'sche Satz, dass in einer eigentlich discontinuirlichen Gruppe nur 2 ganzzahlige von einander linear unabhängige Translationen enthalten sein können, d.h. zwischen den Grössen $1, \varepsilon, \varepsilon^2 \ldots, \varepsilon^{n-1}$ müssen $(n-2)$ unabhängige ganzzahlige, lineare Gleichungen stattfinden, wenn anders wir eine brauchbare Gruppe haben wollen. Damit haben wir das folgende richtige Resultat abgeleitet: <u>Aus einer Rotation ε und Verschiebungen lässt sich nur dann eine eigentlich discontinuirliche Gruppe zusammensetzen, wenn sich die Grössen $1, \varepsilon, \varepsilon^2 \ldots \varepsilon^{n-1}$ linear u. ganzzahlig aus 2 Hülfsgrössen zusammensetzen lassen.</u>

Gehen wir nun die einzelnen Drehungen ε der Reihe nach daraufhin durch,

Für <u>$n=2$</u> ist $\varepsilon^\nu = +1$ u. -1, dies sind überhaupt 2 ganze Zahlen, die Drehung um den Winkel π lässt sich daher jedenfalls mit Verschiebungen zusammensetzen.

Für $n=3$ ist $\varepsilon^\nu = 1, \alpha, \alpha^2$, wo wir $\alpha = e^{\frac{2\pi}{3}}$ als Abkürzung eingeführt haben.

Nun ist $1+\alpha+\alpha^2 = 0$, (wie überhaupt

jedesmal eine derartige Relation für die Einheitswurzeln gilt). Die dritte Größe ist also eine lineare Combination der beiden anderen, daher ist auch diese Drehung in unserem Sinne zu gebrauchen.

Wir sehen dies noch deutlicher, wenn wir die Zahlenwerte einführen: es ist:

$$\alpha^0 = 1.$$

$$\alpha^1 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$\alpha^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}, \text{ diese}$$

3 Größen lassen sich daher aus $1/2$ u. $\frac{\sqrt{-3}}{2}$ linear und ganzzahlig zusammensetzen.

Für $n=4$ ist $\varepsilon^\nu = \pm 1, \pm i$; aus 1 u. i lassen sich daher alle Wurzeln zusammensetzen, auch dieser Fall ist also brauchbar.

Für $n=6$ ist: $\varepsilon^\nu = \pm 1, \pm \alpha, \pm \alpha^2$. Diese 6 Größen setzen sich wieder aus zweien (z. B. $+1$ u. $+\alpha$) linear u. ganzzahlig zusammen, also ist auch diese Drehung hier zulässig.

Mit diesen Beispielen sind wir aber auch am Ende; denn z. B. für $n=8$ ist $\varepsilon^\nu = \pm 1, \pm i, \frac{1\pm i}{\sqrt{2}}, \frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$, diese Größen setzen sich aus 1, i, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ u. $\frac{i}{\sqrt{2}}$ ganzzahlig zu-

nur zusammen, niemals aber aus nur 2 Größen.

Der Fall $n = 3$ ist also ausgeschlossen, u. dasselbe gilt für alle weiteren Fälle. Es bleiben daher nur 4 Fälle von Drehungen übrig, die wir mit Translationen zu einer eigentlich discontinuirlichen Gruppe zusammensetzen können, d.h. es können nur 2, 3, 4 oder 6-zählige Drehpunkte in solchen Gruppen vorhanden sein.

Dieses merkwürdige Theorem hat weiterhin in der Krystallographie seine große Bedeutung, weil es die Zahl der Drehungen, die möglich sind, außerordentlich einschränkt. Im übrigen ist nun nichts leichter, als betreffende Gruppen jetzt wirklich zu bilden:

Wir haben $x' = x + m \cdot \omega$ oder

$$x' = x + m\omega + n\omega' \text{ gesetzt.}$$

Nehmen wir jetzt die Drehung um den Winkel π, d.h. den Fall $n = 2$ hinzu, dann lauten die ev. weiteren Gruppen:

$$x' = \pm x + m \cdot \omega$$

$x' = \pm x + m\omega + n \cdot \omega'$, beide Formeln geben brauchbare Gruppen, d.h. jede einfach oder zweifach periodische Gruppe läßt sich durch die Operation $x' = -x$ zu einer ebenfalls eigentlich discontinuirlichen, doppelt so großen Gruppe erweitern.

Für $n = 3$ gilt, daß mit der Periode A auch die

Periode $\alpha . A$ in der Gruppe enthalten sein muss, d.h. wir müssen notwendig von einer zweifach periodischen Gruppe ausgehen, deren Perioden in der hiermit bezeichneten Weise verknüpft sind. Es ist die erste Gruppe gegeben durch:

$$z' = \alpha^{\nu} . z + m A + n . \alpha A \text{ oder:}$$

$$z' = \alpha^{\nu} . z + (m + n\alpha) . A \text{ für } \nu = 0, 1, 2.$$

Für $\underline{n = 4}$ lautet die entsprechende Formel in derselben Weise:

$$z' = i^{\nu} . z + (m + n i) A \text{ für } \nu = 0, 1, 2, 3$$

und für $\underline{n = 6}$

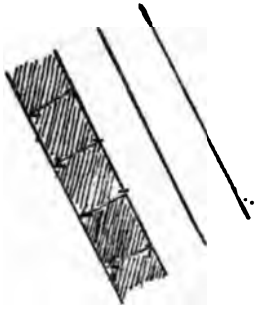
$$z' = \pm \alpha^{\nu} . z + (m + n\alpha) . A \text{ für } \nu = 0, 1, 2.$$

Dieses sind dann alle eigentlich discontinuirlichen Gruppen, die gleichzeitig aus Translationen u. Drehungen bestehen, sie bilden eben nur eine ganz beschränkte Zahl.

18 VII 93. Wir gehen nun zu der Darstellung der hier mit besprochenen discontinuirlichen Gruppen du das wichtige Hülfsmittel der Fundamentalbereiche über. Diese sind dadurch definirt, dass für eine vorliegende Gruppe jeden Punkt der Ebene in dem Bereiche einen aequivalenten Punkt besitzt, andererseits aber keine 2 Punkte des Fundamental

bereiches selbst aequivalent sind. Wir wollen in der Weise vorgehen, dass wir der Reihe nach die einzelnen Beispiele besprechen.

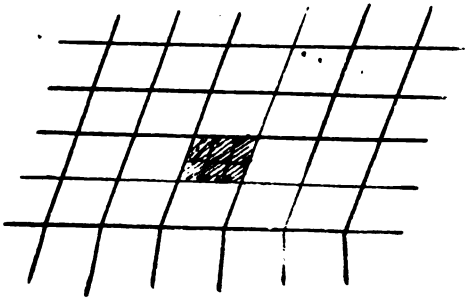
Was die aus reinen Translationen sich zusammensetzenden Gruppen betrifft, so kann für die einfach periodische Gruppe ein geeigneter Parallelstreif der Ebene als Fundamentalbereich gewählt werden. Man bekommt denselben sehr leicht, indem man durch zwei benachbarte aequivalente Punkte zwei Parallellinien zieht. An diesen einfachen Fall werden wir nun sogleich noch einige wichtige Bemerkungen knüpfen können. An diesen ersten Parallelstreif wird sich sogleich ein zweiter anschliessen, indem wir auf den ersten die gegebene Translation anwenden, u. so wird es fortgehen.



Die ganze Ebene ist sonach in lauter Parallelstreifen zerlegt, welche einzeln aus nicht aequivalenten Punktgebieten bestehen. Eben hierein tritt der Charakter der Parallelstreife als Fundamentalbereich hervor. Der Genauigkeit halber müssen wir noch eine bestimmte Verabredung betreffend der Ränder des einzelnen Parallelstreifens

treffen. Indem die Punkte der einen Randcurve denen der anderen Randcurve aequivalent sind, so werden wir offenbar von den beiden Randcur, ven entweder nur die eine dem Fundamentalbe, reich zuzählen dürfen, oder aber wir müssen die Zugehörigkeit der beiden Randcurven uns fortge, setzt vor Augen halten. Dementsprechend empfiehlt es sich, in der Zeichnung die Zuordnung der Rand, curven durch Pfeile anzudeuten, wie es vorstehend auch geschehen ist. —

Gehen wir weiter zu der doppeltperiodischen Trans, lationsgruppe $h' = h + m w + n w'$, so haben wir bei ihr anknüpfend an die Figur der letzten Stunde ei, ne Einteilung der ganzen Ebene in lauter Paralle, logramme, deren jedes wieder einen Fundamental, bereich der Gruppe darstellt. Die Kanten des ein, gelnen Parallelogramms sind vermöge der gege, benen Translationen in einfachster Weise wieder ei, nander zugeordnet.

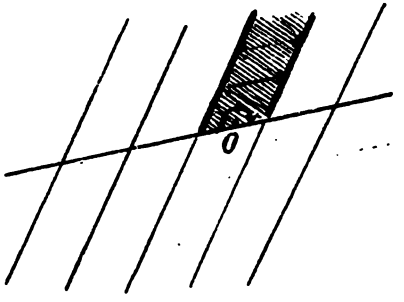


Welcher Art ist jedoch der Fundamentalbereich der erweiterten Gruppe für $n = 2$:

$$z' = \pm z + m\omega$$

und $z' = \pm z + m\omega + n\omega'$?

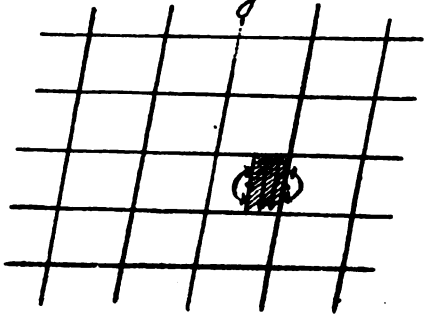
Was zunächst die Gruppe $z' = \pm z + m\omega$ betrifft, so wollen wir ausgehen von dem Parallelstreifen der zugehörigen Translationsgruppe, denselben jedoch so gezeichnet denken, daß der Drehpunkt O von beiden Randcurven gleich weit absteht. Dann wird der zu der erweiterten Gruppe gehörige Fundamentalbereich durch die Hälfte des Parallelstreifens gegeben, dessen Ränder jetzt wie die Figur es



zeigt, einander zugeordnet sind: Für die Parallellinien bleibt die frühere Zuordnung, dagegen werden die beiden Hälften des durch O gehenden Randes durch die gegebene Drehung einander punktweise zugeordnet.

In derselben Weise zeichnen wir für die Gruppe $z' = \pm z + m\omega + n\omega'$ das einzelne Parallelogramm der zugehörigen Translationsgruppe zunächst wieder so, daß der Drehpunkt O in der Mitte desselben zu liegen kommt und zerlegen dann durch eine weitere

durch 0 hindurchlaufende Gerade, welche wir am bequemsten als Parallele zu einer der Seiten des Parallelogramms wählen, dieses in zwei Hälften, deren jede für sich den neuen Fundamentalbereich darstellt. Die Zusammenordnung der Begrenzung ist dann analog wie vorhin; zwei der Seiten sind

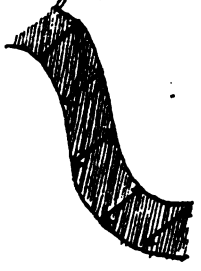


durch die Translation einander zugeordnet, in den beiden anderen Seiten sind die Hälften einer jeden durch die Drehung einander zugeordnet.

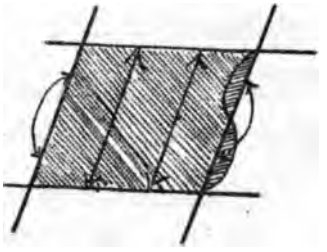
In ähnlicher Weise lassen sich auch die Fundamentalbereiche der übrigen erwähnten Gruppen behandeln, wie wir nicht weiter ausführen wollen.

Nun ist jedoch zu beachten, <u>dass keineswegs die bislang betrachteten Fundamentalbereiche in sich eindeutig bestimmt sind</u>, vielmehr können dieselben noch in mannigfacher Weise durch Abänderung der Begrenzungscurven modificirt werden. (<u>„Prinzip der erlaubten Abänderung“</u>). Z. B. kann man im Falle des einfachen Parallelstreifens den Fundamentalbereich auch von 2 beliebigen gekrümmten Linien begrenzt sein lassen, die zu einander von

möge der gegebenen Translation zugeordnet werden, (v. Fig.)

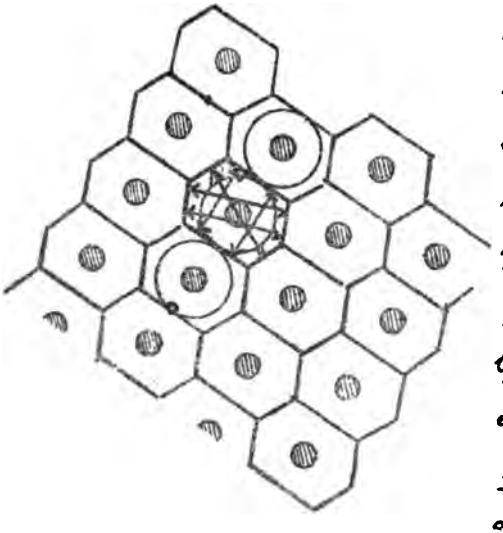


Oder aber bei dem zuletzt betrachteten Fundamentalbereich läßt sich etwa an der einen Hälfte einer der in zwei Hälften geteilten begrenzenden Strecke ein beliebiges Stück vom Fundamentalbereich fortnehmen, dafür aber an der zugehörigen Hälfte ein aequivalentes Stück anlegen u. so fort.



Doch giebt es eine Art, hier, bei den Bewegungsgruppen, in eindeutiger Weise zu gesetzmäßigen Fundamentalbereichen zu gelangen. Diese werden wir in Rücksicht auf die Methode, welche sie uns liefert, „centrirte Fundamentalbereiche" nennen. Nehmen wir, pour fixer les idées, als Beispiel eine doppelperiodische Gruppe an. Wir denken uns dann zu einem beliebigen Punkte der Ebene seine sämmtlichen aequivalenten Punkte gezeichnet. Um den ersten Punkt construiren wir jetzt eine kleine Kreisscheibe; diese denken wir wieder auf alle anderen aequivalenten Punkte

übertragen. Nun lassen wir die Kreisscheiben immer mehr wachsen. Dann wird es sehr bald eintreten, dass die Kreisscheibe des ausgewählten Punktes an eine (oder mehrere) der benachbarten Kreisscheiben stösst. Allemal wo eine Berührung stattfindet, soll das Wachsthum der Scheiben dann so stattfinden, dass sie sich geradlinig an einander abplatten. In unserem Beispiel entsteht solchergestalt, wie die nähere Ueberlegung zeigt als Fundamentalbereich ein bestimmtes Sechseck, um welches herum sich weitere aequivalente Sechsecke gruppieren.

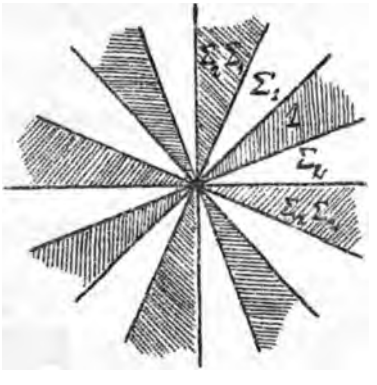


Allgemein gilt der Satz, dass solche centrirte oder natürliche Fundamentalbereiche immer von geraden Linien begrenzt sind, und dass sie lauter concave Winkel haben, endlich dass bei ihnen im einzelnen Punkte der Ebene (wenn dieses nicht gerade im Drehcentrum ist) höchstens 3 solcher Bereiche zusammenstossen

Die Operationen, welche wir bisher zur Zusammensetzung der Gruppen benutzten, waren gewöhnliche Bewegungen. Nun können wir, indem wir einen Schritt weiter gehen, die Frage aufwerfen, was es für Gruppen mit Operationen zweiter Art giebt? Operationen 2ter Art werden dabei allgemein diejenigen genannt werden, die sich aus Bewegungen und Spiegelungen zusammensetzen.

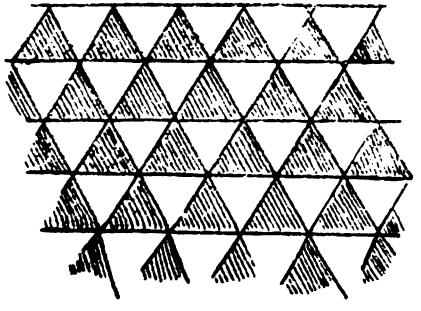
Als einfaches Beispiel, für welches wir sogleich von dem Fundamentalbereich ausgehen wollen, sei ein Winkelraum $\frac{\pi}{n}$ gewählt. Wir denken uns denselben an seinen Kanten wiederholt gespiegelt, dann wird derselbe sich insgesamt um den Scheitelpunkt 2n mal wiederholen.

Die einzelnen Sectoren werden teils congruent, teils invers congruent sein, d.h. eine beliebige Figur im ersten Sector findet sich im zweiten als Spiegelbild, im dritten als congruente Figur u.s.w. wieder. Die beiden erzeugenden Operationen, die Spiegelungen Σ_1 u. Σ_2 bilden also in ihrer Com-



bination eine eigentlich discontinuirliche Gruppe. Nun tritt hier im Gegensatz zu unseren früheren Beispielen der Fundamentalbereiche die charakteristische Eigenschaft auf, dass unser Bereich notwendig bezüglich seiner Begrenzung eindeutig gegeben ist, d.h. keine Abänderung seiner Begrenzung zulässt. Etwas Aehnliches wird immer stattfinden, wenn unter den Operationen der Gruppe eine Spiegelung auftritt. Die Spiegelkante muss allemal notwendig den Fundamentalbereich begrenzen.

Unser soeben behandeltes Beispiel stellte eine reine Spiegelungsgruppe dar, d.h. die ergenzenden Operationen der Gruppe waren sämmtlich Spiegelungen. Dies braucht natürlich keineswegs immer der Fall zu sein, wenn es auch bequem ist solche Beispiele vorauszustellen. Ein sehr schönes Beispiel einer Spiegelungsgruppe entsteht z.B. auch, wenn man ein gleichseitiges Dreieck durch Spiegelung an seinen Kanten fortgesetzt reproducirt.



Das allgemeinste Problem, das sich hier darbietet, wird dann sein, alle eigentlich discontinuirlichen Gruppen aufzuzählen, welche sich aus Bewegun-

gen und Operationen 2ter Art in der Ebene zusammensetzen. In dieser Hinsicht sei auf die Arbeit von Lohnke in Crelle Bd. 27 (1843) hingewiesen: „Ueber die regelmässigen Punktsysteme in der Ebene". Derselbe spricht in dieser Abhandlung nicht von dem Gruppenbegriff als solchem, sondern er verfährt viel mehr rein empirisch-geometrisch, wodurch die Discussion sehr umständlich wird. Dementgegen ist zu nennen C. Jordan, dessen Verdienst es überhaupt ist, den Gruppenbegriff nach den verschiedensten Seiten hin zur Geltung gebracht zu haben, er hat bereits in den Annali di Mat. II 1868-69 (ser.2) („Sur les groupes de mouvements") das genannte Problem unter gruppentheoretischen Gesichtspunkt. den in Angriff genommen und zwar in allgemeiner Weise, indem er in dm dreidimensionalen Raum geht, und doch ebensowohl continuirliche als discontinuirliche Gruppen aufzählt, leider lässt er dabei aber Operationen zweiter Art bei Seite.

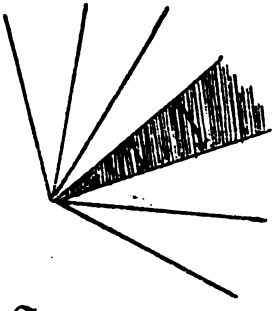
Wir könnten jetzt noch einen zweiten Schritt aus, führen und Aehnlichkeitstransformationen zu den Bewegungen u. Spiegelungen hinzunehmen und zusehen, was sich dann für eigentlich discontinuirliche Gruppen ergeben. Damit erst würden wir

der gesammten „Hauptgruppe" der räumlichen Transformationen Rechnung getragen haben.

Doch wollen wir lieber unsere Aufmerksamkeit sogleich einem anderen Punkte zuwenden. In der Functionentheorie betrachtet man doch „Riemann'sche Flächen", die sich über der z-Ebene ausbreiten, eventuell sogar aus ∞ vielen Blättern bestehen. Diese Riemann'schen Flächen sind aber nicht nur in der Functionentheorie ein gutes geometrisches Hülfsmittel, sondern beanspruchen an und für sich auch rein geometrisches Interesse und eröffnen geradezu ein neues Forschungsgebiet für die Geometrie selbst. Dementsprechend können wir hier nicht nur in der schlichten Ebene, sondern auch auf solchen Riemann'schen Flächen reguläre Gebietseinteilungen betrachten, wir können studieren, wie sie von den Fundamentalbereichen einer Gruppe überdeckt werden u. dergl. Da zeigt sich denn, besonders, dass man für jede discontinuierliche Gruppe Gebietseinteilungen construieren kann, auch wenn die Gruppe nicht eigentlich discontinuierlich ist.

Ein einfaches Beispiel bietet uns hier wieder die discontinuierliche Gruppe, die sich aus der Wieder-

holung einer bestimmten Drehung $z' = e^{i\varphi} z$ zusammensetzt. Wir wissen diese Gruppe ist nur dann eigentlich discontinuierlich, wenn $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ ist. Diese Bedingung soll jetzt aber bei Seite bleiben. Wir wählen viel mehr allgemein als Fundamentalbereich einfach den Winkelraum φ aus, dessen Kanten einander durch die Drehung zugeordnet sind, und denken diesen beliebig oft nach der positiven Seite wie nach der negativen Seite wiederholt. Wir bekommen dann auf alle Fälle eine Gebietseinteilung in einer Riemann'schen Fläche, die sich um O herumwindet. Ist φ



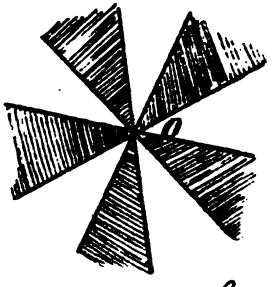
incommensurabel mit π, so wird niemals der Fundamentalbereich bei seiner Wiederholung durch die Drehung sich mit seiner Ausgangslage genau decken, d. h. die Riemann'sche Fläche wird eine ∞ Zahl von Blättern enthalten.

Ist dagegen φ commensurabel, so wird nach einer endlichen Zahl von Wiederholungen der Fundamentalbereich in seine ursprüngliche Lage zurückgelangt sein. Die Riemann'sche Fläche besteht daher aus einer endlichen Blätterzahl und nur dann, wenn φ ein aliquoter Teil von 2π ist, stellt sich die

schlichte Ebene ein.

Es bietet sich nun die allgemeine Aufgabe dar, diese Gedanken in der angegebenen Richtung weiter zu verfolgen.

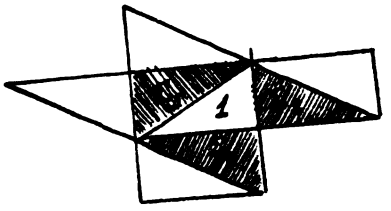
[So. 20. VII 93] Wir wollen dem zuletzt betrachteten Fundamentalbereich jetzt den ihm gestaltlich gleichen Fundamentalbereich zur Seite stellen, welche der aus den



Spiegelungen an 2 durch O gehenden Geraden sich zusammensetzenden Gruppe entspricht. Für ihn entsprechen daher die Punkte der Begrenzungen sich selbst, d.h. letztere sind notwendige Begrenzungen. Hier werden wir dann die sich um O gruppierenden Winkelräume abwechselnd zu schraffieren haben. Wieder entsteht im allgemeinen eine unendlichfach überdeckte Fläche.

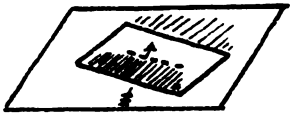
In analoger Weise kann man von einem beliebigen geradlinigen <u>Polygon</u> ausgehen und dieses fortgesetzt an den Kanten durch Spiegelung wiederholen. Wählen wir z.B ein Dreieck A.B C als Ausgangspunkt aus, so lagern sich um diese zunächst drei symmetrische Dreiecke, die wir schraffieren werden, dann an jedes von den letzteren weitere nicht schraf-

vierte Dreiecke u. so fort.



Bezeichnen wir die ersten Syste-
gelungen mit $\Sigma_1, \Sigma_2 \Sigma_3$, so
wird die Gruppe, welche durch
die Gesammtheit aller sich an-
einander lagernder Dreiecke be-
stimmt ist, durch die Wiederholung u. Combination
dieser drei ergenzenden Operationen $\Sigma_1, \Sigma_2 \Sigma_3$
entstehen. Hier ist nun wieder zunächst gar keine
Rede davon, ob diese Dreiecke in ihrer unendlichen
Wiederholung sich schlicht in der Ebene ausbreiten,
oder ob dabei in ihren Ecken Windungspunkte
von im allgemeinen ∞ hoher Ordnung auftreten
werden, so dass sie eine ∞ blättrige Riemann'sche
Fläche erfüllen. Man ist ja in der Theorie der auto-
morphen Functionen gewöhnt, auch derartige Drei-
ecke oder Polygone zu betrachten, deren Wiederho-
lung die einfache Ebene gerade lückenlos bedeckt;
doch sind diese Fälle keineswegs nicht die einzi-
gen, welchen eine functionentheoretische Bedeutung
zukommt. Vielmehr gilt letzteres auch von der all-
gemeinen Aggregaten der Dreiecke oder Polygone,
die wir hier vor uns haben, man vergleiche bei-
spielsweise meine Vorlesungen über lineare Differen-

Nun sei noch auf ein anderes Beispiel einer Gebietseinteilung auf einer unendlichblättrigen Rie. mann'schen Fläche aufmerksam gemacht, wie es die Theorie der Abelschen Functionen darbietet. (Des Näheren ausgeführt in meinen Vorlesungen über Riemann'sche Flächen 1891-92.) Man gehe aus von einem gewöhnlichen Parallelogramm und denke auf dasselbe ein zweites Parallelogramm vermittels eines Verzweigungsschnittes befestigt, der zwei Win. dungspunkte erster Ordnung verbindet, wie die Figur angiebt. Die 4 Seiten dieser Paral



lelogramme werden wir als com. plexe Grössen ω_1 ω_2 ω_3 ω_4 bezeich. nen, gerade wie im einfacheren Falle des Periodenparallelogramms der ellipti. schen Functionen. Wir wollen ferner festsetzen (um gleich den allgemeinen Fall zu haben), dass zwischen diesen 4 Grössen keine lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten $k_1\omega_1 + \ldots + k_4\omega_4 = 0$ bestehe. Von jener Ausgangsfigur aus denken wir nun zunächst das grosse Parallelogramm in bekannter Weise wiederholt, so dass ein ganzes Netz von grossen Parallelogrammen entsteht, welche

eine Ebene gerade schlicht erfüllen, genau wie im analogen Falle der elliptischen Functionen. Auf jedem dieser grossen Parallelogramme sitzt hier jedoch ein kleines Parallelogramm in der bezeichneten Weise auf. Auch dieses können wir dann beliebig wiederholt denken, so dass jedes der kleinen Parallelogramme zu einer neuen Ebene anwächst, die in kleine Parallelogramme zerlegt ist. In solcher Weise werden wir dann die auf den kleinen Parallelogramme aufsitzenden grossen Parallelogrammen weiter behandeln u. so fort.

Es entsteht eine ∞ blättrige Riemann'sche Fläche mit einer Gebietseinteilung, welche wir als 4fach periodische bezeichnen dürfen, insofern eine Verschiebung um ω_1, ω_2, ω_3 u. ω_4 die ganze Fläche in sich selbst überführt. (Es sei daran erinnert, dass jener Jacobische Satz, der 3 oder mehrfach periodische Functionen einer complexen Variabelen ausschloss, sich ja ausdrücklich auf eindeutige Functionen bezieht; es sei ferner noch functionentheoretisch bemerkt, dass auf diese Gebietseinteilung die Umkehr eines überall endlichen hyperelliptischen Integrals vom Geschlecht 2 führt).

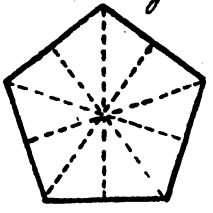
Nun wollen wir dazu übergehen, Gruppen

im Raume zu betrachten, und zwar wollen wir wieder zunächst die Frage aufwerfen, was es für discontinuirliche Gruppen giebt, die sich aus Bewegungen erster und zweiter Art aufbauen und einen bestimmten Anfangspunkt festlassen.

1.) Was die reinen Drehungsgruppen betrifft (d.h. die Gruppen, welche keine Operationen 2. Art enthalten), so will ich hier zuerst historisch referieren. Wir haben es mit den Drehungen der regulären Körper zu thun, die ich in meinen Vorlesungen über das Ico. sæder ausführlich dargestellt habe. Und zwar giebt es insgesammt 5 Typen. Auf den Beweis, daß es nicht mehr giebt als diese wollen wir nicht näher eingehen, doch werden wir bald darauf zurückkommen. Zunächst sind zu nennen die cyclischen Gruppen. Diese bestehen einfach in der Wiederholung einer und derselben Drehung, die nach n-maliger Ausführung zur Identität führt.

Wir bezeichnen diese G_n mit C_n für $n = 1, 2 \ldots \infty$. Weiter kommen die Diedergruppen. Unter einem Dieder verstehen wir folgendes: Denken wir uns in ein reguläres Polygon von n Seiten, etwa ein Fünfeck, eine Membran ausgespannt, so hat diese eine Oberseite u. eine Unterseite, und diese

wollen wir als die Fläche eines regulären Körpers auffassen. In der That sind alle Bedingungen eines regulären Körpers, Gleichheit der Flächenwinkel u. s. w., erfüllt, nur dass der Körper einen verschwindenden Inhalt hat. Man kann dann dieses „Ding" um die in seinen Mittelpunkt, die errichtete Axe durch n verschiedene Drehungen mit sich zur Deckung bringen, ebenso wird



dasselbe durch halbe Drehungen um seine Symmetrielinien in sich selbst übergehen. Diese Operationen zusammen bilden eine G_{2n}, die wir als D_n bezeichnen. Endlich kommt noch hinzu die G_{12} des Tetraeders, die G_{24} des Oktaeders oder des Würfels, die G_{60} des Ikosaëders oder des Pentagondodekaëders, die wir mit T, O u. Ik bezeichnen wollen. Denn das reguläre Tetraeder geht doch durch 12, das Oktaeder durch 24, das Ikosaëder durch 60 Drehungen in sich über.

2.) Nun ist weiter die Frage, wie man diese reinen Drehungsgruppen durch Operationen zweiter Art erweitern kann. Diese Untersuchung habe ich in meinen Vorlesungen über das Ikosaëder nur beiläufig berührt. Ausführlich wird

dieselbe behandelt von Schoenflies in seinem Bu-
che: Ueber Krystallsysteme und Krystallstruktur
(1891). Ich will doch die Liste der Gruppen 2. Art,
die Schoenflies aufstellt, hier wiedergeben. Die-
selbe findet sich in der Tabelle auf pag. 146 seines
Buches, allerdings bereits nach krystallographischen
Gesichtspunkten zurechtgemacht. Schoenflies ge-
braucht die folgenden Abkürzungen als Indices:

h bedeutet die Spiegelung an der horizontalen Ebene,
v die Spiegelung an einer verticalen Ebene,
d die Spiegelung an einer diagonalen Ebene,
i die Inversion an O, welche jeden Punkt durch
den zu ihm diametralen ersetzt.

Man hat sich eben z. B. das Dieder so gestellt zu
denken, dass seine Mittellaxe vertikal ist. Dann kann
man entweder an der Horizontalebene (h) oder an
einer Vertikalebene gespiegelt denken, und man wird
bei einem Dieder mit einer geraden Eckenzahl
noch Verticalebenen durch 2 Gegenecken (d) und
solche durch die Mitten zweier Gegenseiten (v) un-
terscheiden können.

Ferner muss ich noch das Wort Drehspiege-
lung erklären. Unter derselben versteht Schoenflies
einfach die Operation, welche sich aus einer Drehung

um eine Axe und der Spiegelung an der durch den festgehaltenen Punkt gehenden Normalebene zusammensetzt. Es gilt dann der Satz, dass jede Operation 2 Art in vorliegendem Falle, wo ein Punkt festgehalten ist, eine Drehspiegelung ist.

Nun gehen wir zu der Zusammenstellung der erweiterten Gruppen. Wir wollen allemal die durch Spiegelungen erweiterte Gruppe mit einem horizontalen Strich in ihrer Abkürzung versehen.

a.) Die Y_k liefert die erweiterte Gruppe Y_k^h, eine $\overline{G}_{120}$; man denke sich eben das Icosaëder in gewohnter Weise aufgestellt, und dann nehme man die Spiegelung an der Horizontalebene zu den Drehungen hinzu. (Wir würden diese Gruppe ebensowohl Y_k^v oder Y_k^c nennen können, wie wir nicht weiter verfolgen).

b.) In derselben Weise wird aus der Gruppe des Octaeders eine O^h oder $\overline{G}_{48}$.

c.) Aus der Gruppe des Tetraëders dagegen entstehen 2 erweiterte Gruppen, die wir als T^h und T^d oder als $\overline{G}'_{24}$ u. $\overline{G}''_{24}$ unterscheiden wollen.

Hier haben eben die Indices h u. d die Bedeutung, dass man die Spiegelung an der Horizontalebene resp. einer Verticalebene hinzu-

nehmen soll.

d.) Die Gruppe D_n^c liefert gleichfalls 2 erweiterte Gruppen, die $D_n^{ch} = \bar{G}'_{4n}$ und die $D_n^{cd} = \bar{G}''_{4n}$.

e.) Die Gruppe C_n liefert die Erweiterungen

$$\bar{G}'_{2n} = C_n^{\nu}, \quad \bar{G}''_{2n} = C_n^{\nu}, \quad \bar{G}'''_{2n} = C_{2n}.$$

Hier soll C_{2m} diejenige cyclische Gruppe bedeuten, welche durch eine Wiederholung einer Drehspiegelung von der Amplitude $\frac{\pi}{n}$ entsteht. Ist n ungerade, so kann man C_{2n} auch durch C_n^i bezeichnen.

3) Aus dieser Gesammtheit der erweiterten Gruppen, die Schoenflies findet, kann man dann nach irgendwelchen Gesichtspunkten die eine oder die andere Art herausgreifen. Wir wollen dieses einmal in Rücksicht auf functionentheoretische oder auf krystallographische Betrachtungen ausführen.

Was letzteres betrifft, so bietet doch der Krystall um einen Punkt herum, um eines seiner Molecüle gewisse Symetrieen dar, d.h. durch bestimmte Drehungen um diesen Punkt oder Operationen jener Art geht die Molecülanordnung des Krystalls oder besser gesagt, da wir ja nicht von der Begrenzung des Krystalls handeln, das krystallinische Medium in sich über. (Des Weiteren wird es sich

in der Krystallographie natürlich nicht nur um die Translationsgruppen 1. u. 2. Art handeln, welche einen Punkt festlassen, sondern man wird überhaupt die discontinuirlichen Gruppen von Raumtransformationen zu betrachten haben, welche die verschiedenen Moleküle des Krystalls vertauschen und unter denen immer eine Translationsgruppe mit 3 Translationen ausgezeichnet ist.)

Wir hatten nun schon bei den discontinuirlichen Gruppen der Ebene gesehen, daß nicht alle Drehungen sich mit Translationen zu eigentlich discontinuirlichen Gruppen zusammensetzen lassen. So wird es auch hier sein. Es gilt daher aus der Gesammtheit aller von uns aufgestellten einfachen und erweiterten Gruppen, die einen Punkt festlassen, die krystallographischen Gruppen auszusondern.

Dem Gesagten gemäß sind in Rücksicht auf unsere Betrachtungen in der Ebene von unseren Gruppen 1. u. 2. nur diejenigen hier brauchbar, welche keine anderen Drehaxen besitzen als 2-, 3-, 4- oder 6-zählige. Solcherweise bleiben, wie die einzelne Aufzählung zeigt, im gesammt 32 brauchbare Gruppen übrig oder wie die Krystallographen

sagen, 32 Arten der Krystallsymmetrie.

Dieses Resultat ist zuerst von einem Mathematiker abgeleitet worden, der unbekannt geblieben ist, so lange er lebte. Es ist Hessel in Marburg, derselbe hat 1830 in Gehlers physicalischem Lexicon in einem Artikel über Krystallographie diese 32 Symmetriefälle richtig aufgezählt. Die Zusammenstellung derselben ergiebt sich nun wie folgt:

1, 2) die beiden Oktaedergruppen G_{24} und $\bar{G}_{48}$

3-5) die drei Tetraedergruppen $G_{12}, G_{24}', G_{24}''$

6-15) die Diedergruppen G_{2n} für S_2, S_3, S_4, S_6.
die erweiterten Diedergruppen $\bar{G}_{4n}^{k}$ für S_2, S_3, S_4, S_6.
die erweiterten Diedergruppen $\bar{G}_{4n}^{a}$, für $S_2 = S_3$

16-27) die erweiterten cyclischen Gruppen

$$\begin{array}{cccc} C_2 & C_3 & C_4 & C_6 \\ C_2^{k} & C_3^{k} & C_4^{k} & C_6^{k} \\ C_2^{v} & C_3^{v} & C_4^{v} & C_6^{v} \end{array}$$

28-29) die Drehspiegelungsgruppen, $\bar{C}_4$ und

30) die reine Spiegelung an einer Ebene S.

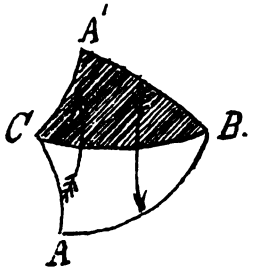
31) die reine Inversion am Anfangspunkt, $\bar{J}$.

32) die Identität.

[Fr. 21 VII. 93] Heute wollen wir unter unseren erweiterten Gruppen die funktionentheoretischen heraussuchen

im Anschluss an die bekannte Arbeit von Schwarz in Crelle Bd. 75. Dort geht Schwarz davon aus, ein sphärisches Dreieck an seinen drei Kreisbogen durch Symmetrie zu wiederholen, mit den nennend. stehenden Dreiecken in derselben Weise zu verfahren u. so fort. Dann werden alle die Dreiecke ausgewählt, die nur zu einer endlichen Zahl von aequivalenten Dreiecken bei dieser Spiegelung führen und die Kugel nur einfach überdecken. Was nun die zu jenen Dreiecken zugehörigen Gruppen betrifft, so ist hier zu nennen die G_{120} des Ikosaëder (Ik^k), die G_{48} des Oktaëder (O^k) die G_{24} des Tetraëder (T^k), u. endlich die G'_{4n} des Dieder (D'^k_n). Nehmen wir noch den Fall hinzu, dass wir eine einfache cyclische Gruppe haben, d. h. von einem Zweieck ausgehen, dann ist in derselben Weise noch auszuführen die G''_{2n} der C^v_n. Dieses sind dann alle jene erweiterten Gruppen, welche sich bei der genannten funktionentheoretischen Fragestellung darbieten. Diese „funktionentheoretischen Gruppen", wie wir sie nennen können, sind dadurch ausgezeichnet, dass ihre Fundamentalbereiche, nämlich die Dreiecke oder Zweiecke, von denen man ausgeht, lauter notwendige Begrenzungsstücke tragen, nämlich Kanten, welche punktweise festbleiben.

Es ist natürlich nicht schwer, auch für die anderen Gruppen die Fundamentalbereiche zu bilden. So erscheint beispielsweise als Fundamentalbereich einer Rotationsgruppe d.h. einer Gruppe erster Art ein Doppeldreieck, d.h. die Vereinigung eines Dreiecks mit einem seiner Symmetriedreiecke, wobei von den freien Kanten jedesmal die symmetrischen zugeordnet sind. Wir wollen jedoch nicht weiter ins Detail eindringen, sondern uns lieber der Frage zuwenden, wie man denn die Vollständigkeit unserer Aufzählungen controlieren mag. Denn außer den von uns aufgestellten Gruppen erster u. zweiter Art giebt es bei festgehaltenem Punkt O in der Ebene noch andere eigentlich discontinuirlichen Bewegungsgruppen. Wir wollen dieses Problem im folgenden wenigstens dem allgemeinen Ansatz nach näher betrachten, indem wir verlangen, alle Spiegelungsgruppen aufzuzählen, d.h. solche Gruppen, die durch Spiegelung eines sphärischen Polygons in derselben Weise entstehen, wie vorhin die „funktionentheoretischen" Gruppen durch Spiegelung an den Seiten eines Dreiecks. Wir denken uns



um den festgehaltenen Punkt O eine Kugel vom Radius 1) gelegt u. auf ihr den Fundamentalbereich der Gruppe gezeichnet. Da jede discontinuirliche Gruppe auf der Kugel einen endlichen Fundamentalbereich haben muss, dafernner alle Fundamentalbereiche direct oder invers congruent sind, also denselben Flächeninhalt haben, da endlich der Flächeninhalt der Gesammtkugel eine endliche Grösse ist, so kann es nur eine endliche Zahl neben einander liegender Fundamentalbereiche geben, d.h. sich nur um eine endliche Gruppe handeln. Dies besagt eben nichts weiteres als dass alle eigentlich discontinuirlichen Gruppen in unserem Falle auch endlich sind. Sei nun irgend eine endliche Gruppe vorgelegt, so werden wir ihren Fundamentalbereich nach der Centrirungsmethode bestimmen können. Wir denken wieder alle aequivalenten Punkte eines beliebig ausgewählten Punktes gezeichnet u. um jeden derselben die kleinen, centrirten Kugelcalotten gelegt, die einander entsprechend sind. Dann lassen wir die letzteren wieder immer mehr wachsen, bis sie einander berühren. Wie wir früher bei der entsprechenden Construction der Ebene dann 2 Kreise, schieben stets längs einer geraden Linie sich abplatten

liefern, so werden wir hier auf der Kugel die sich treffenden Kugelcalotten sich längs größter Kreise, so bei weiterem Wachsthum abplatten lassen.

Solchergestalt werden wir dann schließlich als Fundamentalbereich der endlichen Gruppe auf der Kugel ein Polygon bekommen, welches von einer endlichen Zahl größter Kreise begrenzt ist.

Alles dieses gilt noch für unsere sämmtlichen Gruppen. Bei den Spiegelungsgruppen insbesondere werden wir so weiter raisonniren.

Da in einem beliebigen Eckpunkte unseres Polygons nothwendig eine gerade Zahl abwechselnd schraffirter und nicht schraffirter Bereiche zusammenstößt, werden die Winkel unseres sphärischen Polygons nothwendig aliquote Teile von π sein, die wir mit $\frac{\pi}{\ell_1}, \frac{\pi}{\ell_2} \cdots \frac{\pi}{\ell_n}$ bezeichnen wollen. Jetzt drückt sich durch die Winkel der Flächeninhalt des Polygons nach der bekannten Formel aus als:

$$\pi\left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} + \cdots + \frac{1}{\ell_n} + 2 - n\right)$$

oder anders geschrieben:

$$\pi\left(2 - \frac{\ell_1 - 1}{\ell_1} - \frac{\ell_2 - 1}{\ell_2} - \frac{\ell_3 - 1}{\ell_3} \cdots - \frac{\ell_n - 1}{\ell_n}\right)$$

Bezeichnen wir nun die Gesammtzahl aller Poly-

gone auf der Kugel mit $2N$ (da dieselbe doch eine gerade Zahl sein muss) dann ergiebt sich der Flächeninhalt der ganzen Kugel als:

$$4\pi = 2N\pi\left(2 - \frac{l_1-1}{l_1} - \frac{l_2-1}{l_2} \cdots - \frac{l_n-1}{l_n}\right)$$

d.h. es wird:

$$\frac{l_1-1}{l_1} + \frac{l_2-1}{l_2} + \cdots\cdots + \frac{l_n-1}{l_n} = 2 - \frac{2}{N} \text{ sein.}$$

Nun müssen aber die Grössen l u. N ganze Zahlen sein. Der wesentliche Gedanke ist daraufhin, diese Gleichung als eine diophantische Gleichung aufzufassen und alle ihre ganzzahligen Lösungen zu suchen. (Das ist überhaupt die allgemeine Regel, dass man bei der Aufsuchung der verschiedenen discontinuirlichen Gruppen irgend welcher Art immer auf diophantische Gleichungen geführt wird).

Wir discutiren unsere Gleichung nun folgendermassen:

1) Es ist nun der Ausdruck $\frac{l-1}{l}$ offenbar am kleinsten für $l = 2$, und zwar wird derselbe gleich $1/2$. Es ist daher sicher stets $\frac{l-1}{l} \geqq 1/2$. Hieraus folgt, dass die Zahl n nicht grösser als 3 sein kann, da 4 Summanden auf der linken Seite eine Summe $\geqq 2$ liefern, was wegen der rechten Seite keineswegs

angeht. Damit ist bereits die Beschränkung auf Kugelzweiecke und Dreiecke gegeben.

2/ Es seien fernerhin die Zahlen l nach ihrer Größe geordnet, also: $\underline{l_1 \leqq l_2 \leqq l_3}$.

Sei nun $l_1 \geqq 3$, dann gilt Gleiches auch für l_2 und l_3. Da aber dann der Ausdruck $\frac{l-1}{l} \geqq \frac{2}{3}$ u. somit für $n = 3$ die ganze linke Seite unserer Gleichung $\geqq 2$ würde, was wegen der rechten Seite nicht möglich ist, so kann für $l_1 \geqq 3$ die Anzahl n der l nur gleich 2 sein. Wir haben daher die beiden Fälle fernerhin zu untersuchen:

a/ $\underline{n = 2}$, dann gilt: $\frac{l_1 - 1}{l_1} + \frac{l_2 - 1}{l_2} = 2 - \frac{2}{N}$.

b/ $\underline{n = 3,\ l_1 = 2}$.

Ad. a. Behandeln wir zunächst den ersten Fall wei, ter; $n = 2$ besagt, daß ein Zweieck zu Grunde gelegt ist. In einem solchen sind aber die Winkel allemal gleich, d.h. es ist $l_1 = l_2$. Dann lautet unsere Gleichung $\frac{2l-2}{l} = \frac{2N-2}{N}$ oder $N = l$, d.h. Der Wert von l bleibt beliebig, und N hat denselben Wert.

Diese Lösung der diophantischen Gleichung führt daher geometrisch interpretiert auf die Gruppe $\underline{C_n^v}$.

Ad b. Es war $n = 3,\ l_1 = 2$ gesetzt. Dann geht unsere diophantische Gleichung über in:

$$\frac{1}{2} + \frac{l_2 - 1}{l_2} + \frac{l_3 - 1}{l_3} = 2 - \frac{2}{N}.$$

Ich behaupte nun weiter, daß l_2 nicht größer als 3 sein kann; denn sonst würde die linke Seite unserer Gleichung wieder größer als 2 werden.

Also bleiben die beiden Möglichkeiten bestehen: $l_2 = 2$ u. $l_2 = 3$.

α) Ist $l_2 = 2$, dann wird unsere Gleichung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{l_3 - 1}{l_3} = 2 - \frac{2}{N} \quad \text{oder:}$$

$$\frac{l_3 - 1}{l_3} = \frac{N-2}{N} \quad \text{oder} \quad N = 2 l_3.$$

Dieses aber führt bei weiterer geometrischer Diskussion zu der Gruppe des Diëdertypus D_n^h

β) Ist $l_2 = 3$, dann lautet unsere Gleichung

$$1/2 + 2/3 + \frac{l_3 - 1}{l_3} = 2 - \frac{2}{N}.$$ Nun läßt sich wieder sofort direkt schließen, daß l_3 nicht $\geqq 6$ sein kann, da sonst wieder die linke Seite größer oder gleich 2 würde. So bleiben allein die 3 Möglichkeiten α') $l_3 = 3$, und daher $N = 12$

β') $l_3 = 4$, und daher $N = 24$

γ') $l_3 = 5$, und daher $N = 60$.

Diese Fälle stellen aber geometrisch betrachtet, den Tetraeder, den Octaëder- und den Icosaëder-typus unserer früheren Aufzählung dar.

Aus der Discussion unserer diophantischen Gleichung ergiebt sich solcherweise also unserer Vollständigkeitsbeweis, indem wir bei der Aufsuchung der Spiegelungsgruppen zu gar keiner anderen Kugelteilung kommen als zu derjenigen, die wir ohnehin (bei der Aufzählung der functionentheoretischen Gruppen) berücksichtigt haben. Wir haben diesen Ansatz gemacht, indem wir von dem Begriff des Fundamentalbereiches ausgingen. Doch kann man den Ansatz noch in sehr verschiedener anderer Weise formulieren, (vergl. z. B. was die Aufstellung der Rotationsgruppen angeht, die Vorlesungen über das Icosaëder pag. 115.) Auf alle Arten kommt man aber schliesslich immer zu derselben diophantischen Gleichung, und die Discussion derselben ist es also, die schliesslich den Kern des ganzen Beweises ausmacht, wie wir wiederholt hervorheben.

Mo. 24 VII 93] Wir haben nun noch in Kürze von den allgemeinen discontinuirlichen Bewegungsgruppen des Raumes, bei denen nicht mehr ein bestimmter

Raumpunkt festgehalten wird, zu berichten. Wie wir schon sagten, hängt ihre Theorie aufs engste mit der Krystallographie zusammen. So kommt es denn auch, daß die Aufzählung jener Gruppen wesentlich von Krystallographen gefordert ist. Ich hatte nemlich bereits die Arbeit von C. Jordan genannt, Annali II, 1868-69. An sie schließt sich an Schuncke's Entwickelung der Krystallstructur, 1879. Beiden beiden ist eigenthümlich, daß in ihnen nur Bewegungen 1. Art in Betracht gezogen worden, während man natürlich die Aufgabe allgemein fassen kann, indem man auch Operationen 2. Art in Betracht zieht. Der erste, der letzteres allgemein durchgeführt hat, ist der russische Mineralog Fedorow 1883 gewesen; nächst ihm ist zu nennen Curie in Paris 1884.

Endlich hat dann Schoenflies in seinem schon öfter von uns genannten Werke über Krystallsysteme u. Krystallstructur auf Grund eigener Untersuchungen eine zusammenfassende Darstellung gegeben. Die Resultate, zu denen man auf Grund der genannten Untersuchungen gekommen ist, und die trotz der grossen Zahl der aufzuzählenden Fälle als sicher gelten können, sind die, daß es 65 Gruppen erster Art und 165 Gruppen 2. Art insgesammt

also 230 krystallographische Gruppen giebt.

Schoenflies hat für diese Gruppen insbesondere zweierlei Modelle ausgeführt, die wir in unserer Sammlung haben. Dies sind zunächst Fadenmodelle, indem für die ausgewählte Gruppe die einzelnen Drehungsaxen oder die Schraubungsaxen in einem bestimmten Raumschick als farbige Fäden ausgespannt sind. Man hat daran zu denken, dass ja doch jede Bewegung des Raumes (jede Operation erster Art), sich als eine Drehung oder Schraubung um eine bestimmte Axe ansehen lässt. Zweitens hat Schoenflies für verschiedene Gruppen die Fundamentalbereiche modellirt, in welche der Raum sich zerlegen lässt. Diese Fundamentalbereiche sind aus Gyps gleichsam als Bausteine geformt. Diese müssen sich dann gerade so an einander legen lassen, dass der Raum lückenlos ausgefüllt wird. Die Gestalt der Fundamentalbereiche ist ja nur in dem Falle a priori festgegeben, dass eine reine Spiegelungsgruppe vorlieg wo dann der Bereich die Gestalt eines ebenflächig. Polyeders hat, an dessen Seitenflächen der Raum jeweils gespiegelt wird. Aber auch in allen anderen Fällen hat Schoenflies ebenflächige Bereiche gewählt, die er von Fall zu Fall nach Belieben construirt.

Vielleicht wäre es zweckmäßig bei der Construction dieser Bereiche das Princip der centrirten Bereiche zu Grunde zu legen. Also, um zu wiederholen, was wir in der Ebene sagten: Man bestimmt erst alle mit einem ausgewählten Punkte aequivalente Punkte, legt um jeden derselben kleine Kugeln desselben Radius und läßt diese dann immer mehr zunehmen, bis sie sich berühren. Dann soll ihr weiteres Wachsthum wieder so stattfinden, daß sie sich gegenseitig ebenflächig abplatten. Auf diese Weise bekommt man dann gesetzmäßige Fundamentalbereiche, die insbesondere gar keine einspringenden Winkel haben.

Nehmen Sie nun an, daß wir die 230 Gruppen mit ihren Fundamentalbereichen vollständig klar vor Augen haben, was haben wir dann hierdurch für die Krystallographie gewonnen? Wir sagen so: Was im Falle eines krystallinischen Mediums in dem einzelnen Fundamentalbereiche enthalten zu denken ist, dies ist uns ganz gleichgültig, es mag dies ein einzelnes Atom, ein einzelnes Molecül oder ein Complex von Molecülen, eine ganze Welt im Kleinen sein. Das Wesentliche ist nur, daß in dem einen Fundamentalbereiche genau die nämliche Anordnung der Materie herrscht wie in jedem anderen. Es

handelt sich also nur um einen regelmäßigen Aufbau der Materie. Unser Schema behauptet dann für die Krystallographie nichts mehr und nichts weniger als dieses, daß jedes krystallinische Medium sich nothwendig in einen der 230 Typen einordnen muß. Was hier von dem krystallinischen Medium gesagt ist, gilt natürlich in gleichem Sinne von jeder anderen regelmäßigen Anordnung des Stoffes, wie sie sonst die Naturwissenschaft oder auch die Technik bietet. Man kann hier z. B. an ein regelmäßiges Zellgewebe oder an ein regelmäßiges Mauerwerk vielleicht aus verschwundener Culturperiode denken, allemal wird für sie eines der 230 Systeme in Anwendung kommen müssen. Die obige Behauptung ist nun vielfach in der Weise mißverstanden worden, als müsse es alle 230 Typen von Krystallen wirklich geben. Dies ist aber keineswegs ausgesprochen, sondern nur daß jede Krystallanordnung, die es giebt, in unser Schema sich einreiht. Ich persönlich glaube allerdings gern daran, daß die Natur jedes Schema, welches möglich ist, auch wirklich bildet.

Wir haben ferner 65 Typen erster Art u. 165 Typen 2. Art genannt. Gehört nun irgend ein Krystall

zu einer Gruppe der 165 Typen 2. Art, so ist er aller, nirend aus direct und invers congruenten Elemen, tartheilen aufgebaut, während ein Krystall der in einen der 65 Typen erster Art gehört, aus lauter di. rect congruenten Bausteinen besteht. Damit ist al. so gar nicht gesagt, dass etwa jeden Krystall aus abwechselnden Bestandtheilen aufgebaut ist. Trotz, dem ist Schoenflies vorgeworfen worden, er stelle eine dahin gehende allgemeine Hypothese auf! In be, sonderen Fällen ist man auch von naturwissen, schaftlicher Seite längst zur Annahme abwechseln, der Elementarbestandtheile geführt worden.

Als klassisches Beispiel sei an dieser Stelle die Weinsäure genannt, an der Pasteur z. B. seine Un, tersuchungen angestellt hat. Man hat die Weinsäu, re in der rechtsdrehenden, der linksdrehenden und der neutralen Modification. Diese Bezeich, nungen beziehen sich bekanntlich auf das Verhalten der Weinsäure zum polarisirten Lichte, wie wir nicht weiter auszuführen brauchen. Man denkt sich dabei den rechtsdrehenden Krystall aus lauter gleich, artigen Bausteinen bestehend, den linksdrehenden ebenfalls, nur dass deren Bausteine zu denen der rechtsdrehenden invers congruent sind. Verschafft man

sich jetzt Lösungen der zweierlei Modificationen, wischt dieselben und läßt aufs neue krystallisieren, so entsteht die neutrale Weinsäure, bei der die entsprechenden Bausteine dann alternirend gelagert sein werden, so daß man ein Schema 2. Art hat.

Soviel über die discontinuirlichen Gruppen, die sich aus Bewegungen erster und zweiter Art bilden laßen. Wir werden nun weiter gehen und überhaupt Gruppen aufstellen, die sich entweder aus projectiven Transformationen oder aus homogenen linearen Transformationen aufbauen. Auch hier werden wir wesentlich nur historisch referieren können.

Wir handelen zunächst von den endlichen Gruppen, d.h. denjenigen Gruppen der bezeichneten Art, die sich aus einer endlichen Zahl von Operationen zusammensetzen laßen. Dabei werden wir so vorgehen, daß wir zunächst nur eine Variable mit homogenen Transformationen, dann eine Variable mit projectiven oder zwei Variable mit homogenen Transformationen zusammen betrachten u. so fort. Bei einer homogenen Variablen haben wir nur die eine Gruppe $x' = ax$ zu nennen, und soll diese endlich sein, so muß der Parameter a noch als Einheitswurzel gewählt sein, so daß wir schreiben $x' = \varepsilon^{\nu} x$

Bei einer „projectiven Variablen“ vermittelt gerade wieder die Theorie der regulären Körper die Kenntniss der endlichen discontinuirlichen Gruppen.

Wir haben oben um den festgehaltenen Anfangspunkt des Raumes eine Kugel gelegt und gesehen, wie dieselbe z. B. bei den 60 Icosaederdrehungen in bestimmter Weise mit sich zur Deckung kommt.

Die Drehung der Kugel und mit ihr des Gesammtraumes bedeutet aber zugleich eine projective Transformation der auf der Kugel gedachten complexen Variablen x. Diese werden dann gegebenenfalls ebenso eine Gruppe bilden, wie die Drehungen selbst. Z. B. wird also den 60 Icosaederdrehungen eine aus 60 linearen Transformationen von x bestehende Gruppe entsprechen.

In solcher Weise bekommen wir sogleich eine grössere Reihe von Beispielen endlicher Gruppen projectiver Transformationen einer Veränderlichen.

Hiermit sind dann in der That bereits alle endlichen projectiven Gruppen einer Veränderlichen gefunden, wie sich beweisen lässt. Diese Theorie ist zuerst von mir in den Erlanger Berichten des Sommers 1874 gegeben. Des Näheren mögen Sie auch

in den Vorlesungen über das Icosaëder pag 40 u. pag. 115 nachlesen. Der Verständlichkeit halber wollen wir hier die analytischen Formen jener Gruppen bei geeigneter Lage des Coordinatensystems zusammenstellen:

α) $x' = \varepsilon^\nu . x$, Typus der cyclischen Gruppe.

β) $x' = \varepsilon^\nu x, = -\frac{\varepsilon^\nu}{x}$, Typus des Diëders.

γ) $x' = \pm x, \pm\frac{1}{x}, \pm i\frac{x+1}{x-1}, \pm i\frac{x-1}{x+1}, \pm\frac{x+i}{x-i}, \pm\frac{x-i}{x+i}$.

Diese 12 Ausdrücke bekommt man bei der Tetraedergruppe.

δ) $x' = i^\rho . x, \frac{i^\rho}{x}, i^\rho . \frac{x+1}{x-1}, i^\rho \frac{x-1}{x+1}, i^\rho \frac{x+i}{x-i}, i^\rho . \frac{x-i}{x+i}$.

für $\rho = 0, 1, 2, 3$.

Dies sind die 24 Substitutionen der Oktaëdergruppe.

ε). $x' = \xi^\mu . x, -\frac{\xi^\mu}{x}, \xi^\nu . \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4).\varepsilon^\mu . x - (\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3).\varepsilon^\mu x + (\varepsilon-\varepsilon^4)}$,

$-\xi^\nu . \frac{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^\mu . x + (\varepsilon-\varepsilon^4)}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^\mu x - (\varepsilon^2-\varepsilon^3)}$.

Hier bedeutet $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ und $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$.

Insgesammt stellen diese Formeln die 60 Transformationen des Icosaëder dar.

Die 4 Gruppen α, β, γ, δ finden sich nun bereits in der Litteratur, wenn auch nicht unter principiell

lem Gesichtspunkte. Dagegen ist die Existenz der Ikosaedergruppe erst aus der Betrachtung der geometrischen Figur in der angegebenen Weise erschlossen worden.

Im Uebrigen bemerken wir: Weil diese Aufzählung der endlichen discontinuirlichen Gruppen projectiver Transformationen einer Veränderlichen ist nun in keiner Weise die Aufzählung der discontinuirlichen Gruppen projectiver Transformationen einer Veränderlichen überhaupts erschöpft, sondern es giebt neben den endlichen Gruppen noch eine ∞ grosse Zahl unendlicher discontinuirlicher Gruppen dieser Art, wie in der Theorie der automorphen Functionen nachgewiesen wird und demnächst noch von uns besprochen ist.

Heute gehen wir dazu über, die auf [Bd. 25 VII 93.] gezählten Gruppen der regulären Körper in homogene Form für 2 homogene Variable $x_1 : x_2$ zu setzen. Aus $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ wird natürlich: $x'_1 = \mu(\alpha x_1 + \beta x_2)$

$x'_2 = \mu(\gamma x_1 + \delta x_2)$, wo μ zunächst ein unbekannter Multiplicator ist. Um ihn festzulegen, fragen wir, welche Festsetzung wir über die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ machen wollen. Die einfachste Festsetzung ist, dass $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sein soll.

Dann spaltet sich jede Substitution $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ nur

in 2 homogene Substitutionen (indem noch das Vorzeichen der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unbestimmt bleibt).
Der Gruppencharakter bleibt bei dieser Uebertragung in homogene Form erhalten, indem 2 homogene Substitutionen der Determinante 1 zusammengesetzt wieder eine Substitution der Determinante 1 er-geben. Jede nicht homogene Gruppe mit N Substitutionen führt daher zu einer homogenen Gruppe mit $2N$ Substitutionen, indem wir die Forderung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ an die Spitze stellen. Die letzte Forderung ist anderseits natürlich keine notwendige, wir könnten z. B. auch $\alpha\delta - \beta\gamma$ als eine Einheitswurzel ε wählen. Dann würde die Uebertragung der unhomogenen Gruppe immer noch eine endliche homogene Gruppe ergeben; denn durch Wiederholung der einzelnen homogenen Substitution der Determinante ε entsteht eine neue Substitution mit der Determinante ε^2, so dass bei weiterer Wiederholung man schliesslich zu Substitutionen von der Determinante 1 zurückgelangt. Im einzelnen stellt sich die Uebertragung wie folgt am einfachsten dar. Man suche zunächst erzeugende Substitutionen der einzelnen Grup-

pe, z. B. bei der Tetraeder, Oktaëder und Ikosaëder, gruppe hat man immer 2 erzeugende Substitutionen S u. T, aus deren Combination und Wiederholung alle anderen Substitutionen der Gruppe entstehen. Diese erzeugenden Substitutionen wird man dann jede für sich in homogener Form setzen, jede mit einer Determinante, welche gleich irgendwelcher Einheitswurzel ε resp. ε' ist.

Solchergestalt bekommt man also eine unbegrenzte Menge homogener Gruppen, deren Substitutionen an Zahl ein Multiplum von N bilden. Eine wichtige Frage ist nun, ob man die homogenen Substitutionen durch geeignete Annahme der Einheitswurzeln ε u. ε' nicht so auswählen kann, daß N derselben für sich bereits eine Gruppe bilden. Diese Gruppe wird man dann mit der anfänglichen Gruppe der nicht-homogenen Substitutionen holoëdrisch isomorph nennen.

Diese übrigens sehr elementare Frage finden Sie in den Vorlesungen über das Ikosaëder behandelt pag 44-47. Ich begnüge mich wieder nur das Resultat mitzuteilen. Der aufgestellten Forderung kann man sofort genügen bei jeder einzelnen cyclischen Gruppe und bei jeder Diedergruppe D_n, deren n eine ungerade Zahl ist. Bei allen anderen Gruppen aber

ist es überhaupt unmöglich. Diese Gedanken, die wie gesagt, ganz elementar sind, werden für die weiteren Anwendungen ganz besonders wichtig.

Die Theorie der Gleichungen 5. Grades, wie sie in meinen Vorlesungen über das Icosaëder gegeben ist, gipfelt in dem sogenannten Kronecker'schen Satze, wonach gewisse Ansätze bei den Gleichungen 5. Grades unmöglich sind, und der Beweis dieses Kronecker'schen Satzes, wie ich ihn gebe, beruht gerade auf jener Eigenschaft der Gruppen bei $H=0$, mogenemachen. Obwohl hiernach diese Betrachtung über den Isomorphismus der homogenen und der nicht homogenen Gruppen im Mittelpunkte der ganzen Theorie steht, hat sie bisher doch nicht die gewünschte Beachtung gefunden.

Wir gehen nun weiter zu den endlichen discontinuirlichen Gruppen linearen Transformationen für eine grössere Zahl von Variabelen, und hier will ich wieder zunächst einen Bericht über meine eigenen Arbeiten u. die sich anschliessenden Arbeiten Anderer geben. Diese Untersuchungen haben gewissen, massen einen inductiven Charakter, ich gebe Beispiele endlicher Gruppen, die besonders bemerkenswerth scheinen, und diese Beispiele werden dann näher

untersucht. Doch der Vollständigkeitsbeweis, in wie weit hiermit alle überhaupt möglichen Gruppen erschöpft sind, steht noch aus. Wir sprechen hier übrigens der Kürze halber nur von den projectiven Gruppen und nicht von den entsprechenden homogenen linearen Gruppen; auch beschränken wir uns auf die hauptsächlichsten Typen endlicher Gruppen.

1.) Die erste Bemerkung, die hier zu machen wäre, ist die folgende: Wenn n Variable $x_1, x_2 \dots x_n$ vorliegen, und man vertauscht dieselben irgend wie untereinander, indem man setzt $x_i' = x_k$, dann kann dieses immer als eine spezielle Collineation im Raume der Coordinaten x_i gedeutet werden. Wie werden wir aber zweckmäßig die Größen x_i als Coordinaten interpretieren? Wir wollen dieses Verhältnisse der Variabeln x_i als Coordinaten deuten und überdies die Bedingung hinzunehmen, daß $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ sei; diese letzte Gleichung wird ja bei allen Vertauschungen der x_i untereinander unverändert bleiben. Wir werden also in einem Raume von $n-2$ Dimensionen operieren. Jede Gruppe von Vertauschungen von n Buchstaben liefert uns dann solcherweise eine endliche Gruppe

von Collineationen in diesem R_{n-2}. Nehmen wir z.B. $n-5$ an, die Gesammtheit der Vertauschungen von 5 Buchstaben liefert uns eine Gruppe von 120 Collineationen unseres gewöhnlichen discontinuirlichen Raumes. Diese Gedanken finden sich zuerst ausgesprochen in Ann. 4 (1871.)

2) Ebenda ist noch eine weitere Gruppe von Raumcollineationen hervorgehoben, deren Aufstellung sich lineargeometrischer Ueberlegungen bedient. Sie erinnern sich, dass wir im letzten Semester der geraden Linie 6 homogene Coordinaten ertheilten, welche einer Gleichung 2. Grades genügen. Insbesondere konnten wir die Liniencoordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : \ldots x_6$ so einrichten, dass $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 = 0$ die Bedingungsgleichung war.

Diese Gleichung hat nun eine solche symmetrische Form, dass man sofort sieht, es giebt einfache lineare Transformationen der x_i, bei denen sie unverändert erhalten bleibt. Dies sind einmal die Vertauschungen der x_i untereinander, was $6!$ Arten der Transformationen giebt, und sodann lassen sich noch die Vorzeichen der x_i umändern, dies liefert wieder für sich $2^5 = 32$ Transformationen.

Indem nun beide Dinge zugleich vorgenommen

werden können, haben wir eine Gruppe von im. gesammt 720. 32 Raumtransformationen vor uns, die sich in den Linienkoordinaten x_i linear aus. drücken. Nun ist die Sache die, daß von ihnen die Hälfte Collineationen, die Hälfte dualistische Umformungen darstellen.

Haben wir daher blos Interesse für Gruppen von Collineationen, so ist die Zahl der in dieser Gruppe hier auftretenden Transformationen 720. 16.

In dieser Gruppe kann man natürlich wieder verschiedene Untergruppen unterscheiden. Doch um nicht zu viele Details hier anzuführen, sei einfach auf die bezügliche Literatur hingewiesen. Zuerst ist zu nennen eine Untersuchung von Reichhardt, 1886 (Ann. 28), sodann Maschke in den Ann. Bd 30 (1887), endlich Hess in der Acta Leopoldina Bd 55 (1889).

3) Nun hat aber das liniengeometrische Raumgebilde noch eine neue Gruppe gegeben, die aus $\frac{7!}{2}$ = 2520 Raumcollineationen besteht. Sie finden dies ausgeführt in den Ann. 28 (1886). Im einzelnen ergiebt die Gruppe sich folgendermaßen: Man kann zunächst doch an Stelle der sechs Linienkoordinaten überzählige Coordinaten einführen, zwischen

denen man dann noch lineare Gleichungen bestehen läßt. Es seien die homogenen Variabelen $x_1 : x_2 : \ldots x_3 \ldots : x_7$ gleichzeitig der Bedingung $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_7^2 = 0$ und der Bedingung $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 0$ unterworfen. Es zeigt sich, daß man in der That Systeme von 7 Liniencoordinaten x_i finden kann, die diesen beiden Gleichungen genügen.

Die verschiedene mögliche Vertauschung der x_i führt dann zu $7!$ Raumtransformationen. von diesen ist wieder die Hälfte aus Collineationen, die Hälfte aus dualistischen Transformationen gebildet. Die ersteren bilden für sich die genannte Gruppe. Dieselbe ist dann später in Ann. 36 (1889) von Maschke rein geometrischer Seite untersucht worden. Dürfen wir diese vorstehenden beiden Gruppen als liniengeometrische Gruppen bezeichnen, blos weil ihre Kenntniß aus der Liniengeometrie entnommen ist, so werden wir in demselben Sinne der Bezeichnung:

7) eine <u>funktionentheoretische Gruppe</u> haben, deren Existenz also aus der Funktionentheorie geschlossen wird. <u>Diese besteht aus 168 Collineationen</u> der Ebene.

Sie ist zuerst in Ann. 14 (1878) abgeleitet worden und dann (um keine andere Literatur zu nennen) in den Vorlesungen über Modulfunktionen im Schlußcapitel je

des ersten u. des zweiten Bandes ausführlich unter-
sucht worden. Ihre Kenntniss entstammt der Theorie
der elliptischen Functionen und zwar der Betrachtung
der Transformationen 7. Ordnung derselben. Diese Grup-
pe bildet sozusagen das weitestgehende Ergebniss mei-
ner directt functionentheoretischen Untersuchungen.

5.) Endlich analytische Gruppen, d. h. Gruppen,
die durch analytischen Ansatz gewonnen werden.

Was für die Transformation 7. Ordnung der ellip-
tischen Functionen functionentheoretisch durch Be-
trachtung der Riemann'schen Flächen hat erschlos-
sen werden können, das wird man verallgemeinern kön-
nen, wenn man die Theorie der $\varkappa$ - Functionen he-
rausgiebt. Dann bekommt man eine sehr ausge-
zeichnete Kategorie endlicher Substitutionsgruppen,
die in den Vorlesungen über Modulfunctionen Bd II
pag 312 ff besprochen wird. Diese Kategorie umfasst
alle die partikulären Gruppen des Tetraëders, Oktaë-
ders, Icosaëders, wie unsere soeben genannte G_{168}
als Specialfälle. Nun ist noch ein weiterer Schritt,
dass man von den elliptischen Thetafunctionen zu
höheren Thetafunctionen, zu hyperelliptischen
Thetafunctionen etc. übergeht. Auch hier kann
man immer wieder endliche Gruppen linearer

denen man dann noch lineare Gleichungen be-
stehen läßt. Es seien die homogenen Variabelen
$x_1 : x_2 : \ldots x_3 \ldots : x_7$ gleichzeitig der Bedingung
$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_7^2 = 0$ und der Bedingung $x_1 + x_2 +$
$\ldots + x_7 = 0$ unterworfen. Es zeigt sich, daß man in der
That Systeme von 7 Liniencoordinaten x_i finden
kann, die diesen beiden Gleichungen genügen.
Die verschiedene mögliche Vertauschung der x_i
führt dann zu $7!$ Raumtransformationen. von
diesen ist wieder die Hälfte aus Collineationen,
die Hälfte aus dualistischen Transformationen
gebildet. Die ersteren bilden für sich die genannte
Gruppe. Dieselbe ist dann später in Ann. 36 (1889)
von Maschke nach geometrischer Seite untersucht wor-
den. Dürfen wir diese vorstehenden beiden Gruppen
als liniengeometrische Gruppen bezeichnen, blos weil
ihre Kenntniß aus der Liniengeometrie entnommen
ist, so werden wir in demselben Sinne der Bezeichnung
7) eine funktionentheoretische Gruppe haben, deren
Existenz also aus der Funktionentheorie [illegible]
wird. Diese besteht aus 168 Collinea[illegible]
Sie ist zuerst in Ann. 14 (1878) ab[illegible]
dann, um keine andere Litera[illegible]
Vorlesungen über Modulfunkti[illegible]

ist es überhaupt unmöglich. Diese Gedanken, die wie gesagt, ganz elementar sind, werden für die weiteren Anwendungen ganz besonders wichtig.

Die Theorie der Gleichungen 5. Grades, wie sie in meinen Vorlesungen über das Ikosaëder gegeben ist, gipfelt in dem sogenannten Kronecker'schen Satze, wonach gewisse Ansätze bei den Gleichungen 5. Grades unmöglich sind, und der Beweis dieses Kronecker'schen Satzes, wie ich ihn gebe, beruht gerade auf jener Eigenschaft der Gruppen bei $H=0$, mogenemachen. Obwohl hiernach diese Betrachtung über den Isomorphismus der homogenen und der nicht homogenen Gruppen im Mittelpunkte der ganzen Theorie steht, hat sie bisher doch nicht die gewünschte Beachtung gefunden.

Wir gehen nun weiter zu den endlichen discontinuirlichen Gruppen linearen Transformationen für eine grössere Zahl von Variabelen, und hier will ich wieder zunächst einen Bericht über meine eigenen Arbeiten u. die sich anschliessenden Arbeiten Anderer geben. Diese Untersuchungen haben gewissermassen einen inductiven Charakter, ich gebe Beispiele endlicher Gruppen, die besonders bemerkenswerth scheinen, und diese Beispiele werden dann näher

untersucht. Doch der Vollständigkeitsbeweis, in wie weit hiermit alle überhaupt möglichen Gruppen erschöpft sind, steht noch aus. Wir sprechen hier übrigens der Kürze halber nur von den projectiven Gruppen und nicht von den entsprechenden homogenen linearen Gruppen; auch beschränken wir uns auf die hauptsächlichsten Typen endlicher Gruppen.

1.) Die erste Bemerkung, die hier zu machen wäre, ist die folgende: Wenn n Variable $x_1, x_2 \dots x_n$ vorliegen, und man vertauscht dieselben irgend wie untereinander, indem man setzt $x_i' = x_j$, dann kann dieses immer als eine spezielle Collineation im Raume der Coordinaten x_i gedeutet werden. Wie werden wir aber zweckmäßig die Größen x_i als Coordinaten interpretieren? Wir wollen die Verhältnisse der Variabeln x_i als Coordinaten deuten und überdies die Bedingung hinzunehmen, daß $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ sei; diese lezte Gleichung wird ja bei allen Vertauschungen der x_i untereinander unverändert bleiben. Wir werden also in einem Raume von n-2 Dimensionen operieren. Jede Gruppe von Vertauschungen von n Buchstaben liefert uns dann solcherweise eine endliche Gruppe

von Collineationen in diesem R_{n-2}. Nehmen wir z.B. $n-5$ an, die Gesammtheit der Vertauschungen von 5 Buchstaben liefert uns eine Gruppe von 120 Collineationen unseres gewöhnlichen discontinuirlichen Raumes. Diese Gedanken finden sich zuerst ausgesprochen in Ann. 4 (1871.)

2.) Ebenda ist noch eine weitere Gruppe von Raumcollineationen hervorgehoben, deren Aufstellung sich lineargeometrischer Ueberlegungen bedient. Sie erinnern sich, dass wir im letzten Semester der geraden Linie 6 homogene Coordinaten ertheilten, welche einer Gleichung 2. Grades genügen. Insbesondere konnten wir die Liniencoordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : \ldots x_6$ so einrichten, dass $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 = 0$ die Bedingungsgleichung war.

Diese Gleichung hat nun eine solche symmetrische Form, dass man sofort sieht, es giebt einfache lineare Transformationen der x_i, bei denen sie unverändert erhalten bleibt. Dies sind einmal die Vertauschungen der x_i untereinander, was 720 Arten der Transformationen giebt, und sodann lassen sich noch die Vorzeichen der x_i umändern, dies liefert wieder für sich $2^5 = 32$ Transformationen.

Indem nun beide Dinge zugleich vorgenommen

werden können, haben wir eine Gruppe von insgesammt 720. 32 Raumtransformationen vor uns, die sich in den Liniencoordinaten x_i linear ausdrücken. Nun ist die Sache die, daß von ihnen die Hälfte Collineationen, die Hälfte dualistische Umformungen darstellen.

Haben wir daher blos Interesse für Gruppen von Collineationen, so ist die Zahl der in dieser Gruppe hier auftretenden Transformationen 720. 16. In dieser Gruppe kann man natürlich wieder verschiedene Untergruppen unterscheiden. Doch um nicht zu viele Details hier anzuführen, sei einfach auf die bezügliche Litteratur hingewiesen. Zuerst ist zu nennen eine Untersuchung von Reichhardt, 1886 (Ann. 28), sodann Maschke in den Ann. Bd 30 (1887), endlich Hess in der Acta Leopoldina Bd 55 (1889).

3) Nun hat aber das liniengeometrische Princip noch eine neue Gruppe gegeben, die aus $\frac{7!}{2} = 2520$ Raumcollineationen besteht. Sie finden dies ausgeführt in den Ann. 28 (1886). Im einzelnen ergiebt die Gruppe sich folgendermaßen: Man kann zunächst doch an Stelle der sechs Liniencoordinaten überzählige Coordinaten einführen, zwischen

denen man dann noch lineare Gleichungen bestehen läßt. Es seien die homogenen Variabelen $x_1 : x_2 : \ldots x_3 \ldots : x_7$ gleichzeitig der Bedingung $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_7^2 = 0$ und der Bedingung $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 0$ unterworfen. Es zeigt sich, daß man in der That Systeme von 7 Liniencoordinaten x_i finden kann, die diesen beiden Gleichungen genügen.

Die verschiedene mögliche Vertauschung der x_i führt dann zu $7!$ Raumtransformationen. von diesen ist wieder die Hälfte aus Collineationen, die Hälfte aus dualistischen Transformationen gebildet. Die ersteren bilden für sich die genannte Gruppe. Dieselbe ist dann später in Ann. 36 (1889) von Maschke nach geometrischer Seite untersucht worden. Dürfen wir diese vorstehenden beiden Gruppen als liniengeometrische Gruppen bezeichnen, blos weil ihre Kenntniß aus der Liniengeometrie entnommen ist, so werden wir in demselben Sinne der Bezeichnung:

4) eine <u>functionentheoretische Gruppe</u> haben, deren Existenz also aus der Functionentheorie geschlossen wird. <u>Diese besteht aus 168 Collineationen</u> der Ebene.

Sie ist zuerst in Ann. 14 (1878) abgeleitet worden und dann (um keine andere Literatur zu nennen) in den Vorlesungen über Modulfunctionen im Schlußcapitel je

des ersten u. des zweiten Bandes ausführlich unter-
sucht worden. Ihre Kenntniss entstammt der Theorie
der elliptischen Functionen und zwar der Betrachtung
der Transformationen 5. Ordnung derselben. Diese Grup-
pe bildet sozusagen das weitestgehende Ergebniss mei-
ner directt functionentheoretischen Untersuchungen.

5.) Endlich analytische Gruppen, d. h. Gruppen,
die durch analytischen Ansatz gewonnen werden.

Was für die Transformation 5. Ordnung der ellip-
tischen Functionen functionentheoretisch durch Be-
trachtung der Riemann'schen Flächen hat erschlos-
sen werden können, das wird man verallgemeinern kön-
nen, wenn man die Theorie der $\varkappa$ - Functionen he-
rausgreift. Dann bekommt man eine sehr ausge-
zeichnete Kategorie endlicher Substitutionsgruppen,
die in den Vorlesungen über Modulfunctionen Bd II
pag 312 ff besprochen wird. Diese Kategorie umfasst
alle die partikulären Gruppen des Tetraëders, Oktaë-
ders, Ikosaëders, wie unsere soeben genannte G_{168}
als Specialfälle. Nun ist noch ein weiterer Schritt,
dass man von den elliptischen Thetafunctionen zu
höheren Thetafunctionen, zu hyperelliptischen
Thetafunctionen etc. übergeht. Auch hier kann
man immer wieder endliche Gruppen linearer

Substitutionen aufstellen. Der niedrigste Fall, den wir dann bekommen, (entsprechend den Transformation 3. Ordnung der hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht 2) ist eine Gruppe von 25920 Collineationen des R_3. Dieselbe ist eingehend untersucht worden 1887 von Witting in seiner Göttinger Dissertation, ferner 1888 in Ann. 33 von Maschke und endlich 1890 in Ann. 38 von Burckhardt.

[So. 27 VII 93.] Es sei nun mit wenigen Worten auf das Interesse hingewiesen, welches jede endliche discontinuirliche Gruppe beanspruchen kann. Zunächst liefert uns dieselbe bemerkenswerte Configurationen in dem Raume, in dem man operiert, wie im einfachen Falle das Tetraëder, Octaëder usw.

Wenn wir z. B. im R_3 die Gruppe der 25920 Collineationen haben, so werden die Punkte des Raumes sich zu ebensovielen Bereichen zusammengruppieren, wobei dann die merkwürdigsten Configurationen hervortreten.

Zweitens liefert eine endliche discontinuirliche Gruppe allemal ein algebraisches Normalproblem. So führt die Icosaëdergruppe zu der Icosaëdergleichung, auf die wir andere Gleichungen.

wie z. B. die Gleichung 5. Grades zurückführen.
Dies ist in meinen Vorlesungen über das Ikosaeder, sowie besonders auch in der von mir 1891-92 gehaltenen Vorlesung über Algebra des Näheren ausgeführt.

Endlich kommt noch die Anwendung unserer Gruppen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen in Betracht. Hier gilt dann, daß jede endliche discontinuirliche Gruppe linearer Transformationen eine ganze Klasse algebraisch integrirbarer Differentialgleichungen giebt.

Im Einzelnen können wir natürlich auf diese 3 Punkte hier nicht näher eingehen. Was ferner noch die systematische Aufzählung der endlichen Gruppen betrifft, so hat man bisher nur die Arbeiten von C. Jordan in Crelle Bd. 84, 1878 u. Atti di Napoli 1880. Dort ist der Fall dreier homogener Veränderlichen vollständig erledigt, der Fall von 4 Veränderlichen jedoch erst begonnen.

Seitdem ist aber merkwürdigerweise in dieser Richtung nicht weiter gearbeitet worden. Es giebt noch eine hierhergehörige Arbeit von Valentiner 1889 in den Abhandlungen der dänischen Akademie 6 Reihe V Band. Dort wird

eine zusammenfassende Darstellung gegeben, je doch nur in dem Fall $n = 2$ u. $n = 3$, ohne dass wie es scheint etwas wesentlich Neues entwickelt wird.

Wir wenden uns nun zu den unendlichen discontinuirlichen Gruppen. Hier will ich dann diejenigen Gruppen voranstellen, die von den Zahlentheoretikern seit lange behandelt sind, wenn auch meist nicht unter geometrischem Gesichtspunkte. Wir wollen hier nicht zwischen homogenen und projectiven Gruppen weiter scheiden, wie es natürlich die genaue Darstellung erfordern würde. Vom projectiven Standpunkte aus würde man eben danach fragen, was für Gleichungen bei den Transformationen der betreffenden Gruppe unverändert bleiben, vom homogenen Standpunkte aus dagegen, was für invariante Formen es giebt.

Zahlentheoretische Gruppen.

In erster Reihe steht hier die Ihnen allen bekannte Gruppe, die in den elliptischen Modulfunctionen immer benutzt wird. Dieselbe umfasst die Substitutionen $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, woselbst $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige ganze Zahlen von der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ bedeuten. Ich will mich darauf beschränken, die fundamentalsten Punkte betreffs dieser Gruppe hier

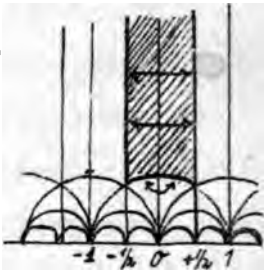
hervorzuheben:

α) Die Gruppe enthält keine Substitutionen, welche der Identität beliebig nahe liegen, ausser der Identität selbst. Denn um solche unendlich kleine Substitutionen zu haben müsste offenbar: $\frac{\alpha}{\delta} = 1+\eta$, $\frac{\beta}{\delta} = \xi$, $\frac{\gamma}{\delta} = \vartheta$ sein, unter η, ξ, ϑ unendlich kleine Grössen verstanden. Die Substitution würde also lauten: $x' = \frac{(1+\eta)x+\xi}{\vartheta x+1}$. Setzen wir jene Werte für die Coefficienten aber in die Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ein, so bekommen wir: $\delta^2(1+\eta-\xi\vartheta) = 1$.

Da nun δ eine ganze Zahl sein soll, so muss notwendig $\delta = \pm 1$ und $\eta - \xi\vartheta = 0$ sein. Aus $\frac{\alpha}{\delta} = 1+\eta$ folgt dann weiter $\alpha = 1$, ebenso aus $\frac{\beta}{\delta} = \xi$ und $\frac{\gamma}{\delta} = 0$ $\beta = \gamma = 0$, da doch die Grössen α, β, γ ihrerseits auch ganze Zahlen sein sollen. Diese Werte aber liefern als zugehörige Substitution die Identität. Unsere Gruppe ist daher eigentlich discontinuirlich, und zwar deshalb, weil die Forderung einer unendlich kleinen Substitution zusammen mit der Forderung der Ganzzahligkeit der Coefficienten notwendig auf die identische Substitution selbst hinführt.

Ganz anders ist es dagegen, wenn wir allein die reellen Punkte in Betracht ziehen; auf der reellen x-Axe ist unsere Gruppe natürlich uneigentlich dis-

continuirlich. Wir erkennen dies leicht, wenn wir bemerken, dass vermöge unserer Gruppe alle reellen rationalen Werthe aequivalent sind. Ferner wieder ist unsere Gruppe im complexen Gebiet ei, genau discontinuirlich. Man bekommt als Fundamentalbereich ein Dreieck, (oder besser Viereck) welches von den beiden Geraden $x = \pm \frac{1}{2}$ und von dem Einheitskreise eingeschlossen ist und dessen Ränder, wie in der Figur angegeben ist paarweise einander zugeordnet sind.



b.) In der Zahlentheorie hat man nun namentlich danach gefragt, was diese Gruppe für <u>cyclische Untergruppen</u> hat. Wenn wir eine einzelne Substitution herausgreifen, so hat diese doch 2 Fixpunkte, (die im besonderen in einen zusammenfallen können) und diese müssen natürlich bei allen Wiederholungen dieser Transformation fest bleiben.

Indem wir diese Fixpunkte als Wurzeln einer ganzzahligen quadratischen Gleichung ansehen, so sehen wir, kommt die Aufsuchung der cyclischen Untergruppe darauf hinaus, <u>die Substitutionen unserer Gruppe zu suchen, welche eine ganzzahlige quadratische Gleichung oder homogen geschrieben</u>

eine ganzzahlige binäre quadratische Form ohne Verschwindung der Wurzeln in sich selbst überführen.

Diese Aufgabe ist ja nun vielfach von der Zahlentheoretikern behandelt worden. Eine quadratische binäre Form gleich 0 gesetzt kann 2 conjugirt complexe, oder 2 reelle oder eine reelle doppeltzählende Wurzel darstellen. Diese 3 Fälle sind hier auseinander zu halten; sie unterscheiden sich, was die Discriminante der Form betrifft, darin, dass diese im ersten Falle negativ, im zweiten Falle positiv, im dritten Falle gleich 0 ist. Die quadratischen Formen von negativer Discriminante geben ganzeinfache endliche Gruppen, die eine G_1, G_2 oder G_3 darstellen. Dagegen geben anderweite Formen von verschwindender oder positiver Determinante unendliche cyclische Untergruppen unserer Hauptgruppe, was nun durch längere Zahlentheoretische Betrachtungen nachzuweisen ist, in welche die sogenannte Pell'sche Gleichung hineinkommt.

c) Demgegenüber wird man nun weiter fragen, ob es noch andere Untergruppen in der Hauptgruppe giebt ausser den cyclischen Untergruppen.

Diese Frage wird in den Vorlesungen über Modulfunctionen ausführlich discutirt und greift über,

gens über die herkömmliche Zahlentheorie hinaus.

Diese Bemerkung werden wir immer machen, daß nämlich die Zahlentheorie explicit nur erst einen kleinen Teil derjenigen Probleme behandelt, die sich in der Theorie der discontinuirlichen Gruppen ohne weiteres einstellen und auch der geometrischen Auffassung durchaus zugänglich sind.

d.) Endlich muß ich noch einer Auffassung der in der complexen z. Ebene gelegenen Gebiets, eintheilung gedenken, vermöge deren unsere Betrachtungen sich verallgemeinerungsfähig erweisen. Die Wurzeln einer gleich 0 gesetzten quadratischen Form mit negativer Discriminante liegen doch in der z. Ebene symmetrisch zur Axe des Reellen. Nun wird vermöge unserer Hauptgruppe eine Eintheilung sowohl in der positiven wie in der negativen Halbebene gegeben, die Eintheilung der z Ebene können wir daher so auffassen, als handele es sich um eine Eintheilung der von den reellen quadratischen Formen von negativer Discriminante gebildeten Mannigfaltigkeit. Während also unsere Gruppe im Raume der reellen Linearsubstitutionen $az + b = 0$ noch uneigentlich discontinuirlich ist, wird sie eigentlich discontinuirlich im Rau-

me der reellen quadratischen Gleichungen von negativer Discriminante. Diesen Satz wollen wir noch mit einigen Formeln stützen. Wir denken uns die quadratische Gleichung gegeben $ax^2+bx+c=0$ und wenden auf die Variable x jetzt unsere Substitution $x'=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ an. Dann möge die neue Gleichung entstehen: $a'x'^2+b'x'+c'=0$ oder in den Coefficienten der Substitution geschrieben:

$$a'(\alpha x+\beta)^2+b'(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)+c'(\gamma x+\delta)^2=0$$

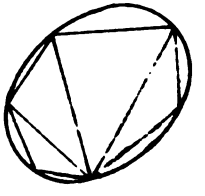
Führt man die linke Seite dieser Gleichung aus und vergleicht die Coefficienten der Glieder x^2, x', x^0 mit den entsprechenden Coefficienten der Ausgangsgleichung, dann gilt bis auf einen Proportionalitätsfactor:

$$\begin{cases} a = \alpha^2 a' + \alpha\gamma b' + \gamma^2 c' \\ b = 2\alpha\beta a' + (\alpha\delta+\beta\gamma) b' + 2\gamma\delta c' \\ c = \beta^2 a' + \beta\delta b' + \delta^2 c' \end{cases}$$

Wir sehen hier explicite, wie die Coefficienten der neuen Gleichung mit denen der alten Gleichung zusammenhängen, nämlich durch eine ternäre lineare Substitutionsgruppe.

Nun machen wir noch den letzten Schritt, indem wir a, b, c als Dreieckscoordinaten in der

Ebene denken. Dann stellt die Discriminantengleichung $b^2 - 4ac = 0$ einen Kegelschnitt dar, den wir den Discriminantenkegelschnitt nennen, die quadratischen Gleichungen von negativer Discriminante aber werden durch die Punkte im Innern des Discriminantenkegelschnittes vorgestellt. In der That zeigt sich dann auch, dass unserer ternären Gruppe gegenüber sich das Innere unseres Kegelschnittes in endlich ausgedehnte Fundamentalbereiche zerlegt, wo, an wir unsere Aussage bestätigt erkennen, dass die Gruppe im Raume der reellen quadratischen Gleichungen negativer Discriminante eigentlich discontinuirlich ist. (s. Fig.) Die verschiedenen Formulirungen sind natürlich allen denen, welche sich mit der Theorie der Modulfunctionen beschäftigt haben, sehr geläufig.



Fr. 28 VI. 93. Wir wollen heute für ganzzahlige lineare Substitutionen dreier homogener oder zweier projectiver Variabelen die selben Betrachtungen durchführen wie gestern für die Substitutionen zweier homogener oder einer projectiven Variabelen. Eine derartige

Substitution wird gegeben durch die Formeln:

$$\rho \cdot x' = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$
$$\rho \cdot y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z,$$
$$\rho \cdot z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z.$$

Wir haben sogleich den Proportionalitätsfactor ρ hinzugefügt, da für uns nur die Verhältnisse der Coordinaten wesentlich sein werden. Die Coefficienten α, β, γ etc. sollen wieder ganze Zahlen sein, überdies setzen wir wieder voraus, dass die Determinante der Coefficienten $|\alpha\beta\gamma|$ gleich $+1$ sei. Man kann dann gerade so wie ges. fern im analogen Falle, setzen, dass die Gruppe jener ganzzahligen Substitutionen abstract zu reden eigentlich discontinuirlich ist, d. h. keine ∞ kleine Substitutionen enthält, die von der Identität verschieden wäre. Arbeiten wir in der Ebene der reellen Werte x, y, z, dann ist die Gruppe daselbst freilich <u>uneigentlich</u> discontinuirlich, indem die einander aequivalenten Punkte überall dicht liegen, also sich keine endlichen Fundamentalbereiche abgrenzen las, sen.

Nun ist die Frage, in welcher Weise wir zu einem erweiterten Gebiet übergehen können, so dass für dieses unsere Gruppe wieder eigentlich discontinuirlich wird. Wie gestern die Gruppe $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ im Raume

der reellen Werte x uneigentlich discontinuirlich, im Raume der complexen Werte x, d.h. der x Ebene, dagegen eigentlich discontinuirlich war, so könnte man hier fragen, ob unsere ternäre homogene Gruppe etwa eigentlich discontinuirlich wird, wenn wir zu den complexen Punkten der Ebene $x : y : z$ gehen (die eine 4 fach ∞ Mannigfaltigkeit bilden)

Doch hat man hierüber noch nichts veröffentlicht, wohl deswegen weil eine geeignete, einfache geometrische Versinnlichung jener M_4 fehlt. Das Mittel, welches man benutzt um, die Gruppe eigentlich discontinuirlich zu machen, ist ein anderes. Man betrachtet die quadratischen Formen oder besser die quadratischen Gleichungen mit reellen Coefficienten der Form: $ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0$.

Diese Gleichung stellt uns geometrisch einen Kegelschnitt dar. Indem es nur auf die Verhältnisse der Coefficienten $a : b : c : d : e : f$ ankommt, erfüllt die Gesammtheit aller dieser Kegelschnitte eine Mannigfaltigkeit von 5 Dimensionen. In diesem 5fach ausgedehnten Raume der reellen Kegelschnitte sehen wir nun besonders auf die <u>definiten</u> quadratischen Formen oder auf die <u>nullteiligen</u> Kegelschnitte. Diese letzteren bilden innerhalb jener M_5 gleich-

falls eine 5fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, und in diesem Gebiete ist unsere Gruppe dann eigentlich discontinuirlich. Betreffs des Beweises dieser Behauptung vergleiche man die Entwickelungen in der Theorie der definiten ternären quadratischen Formen, wie sie beispielsweise Selling im Jahre 1874 im Crelle Bd. II giebt. (Was einen solchen Vergleich erschwert, ist der Umstand, dass jeder Autor seine besondere Terminologie hat. So kommt bei Selling die Bezeichnung Gruppe oder gar discontinuirliche Gruppe überhaupt nicht vor, wenn auch der gedankliche Inhalt dieser Bezeichnung bei ihm durchaus vorhanden ist.) Die Folge dieses Satzes, dass die Gruppe im Gebiete der reellen nullteiligen Kegelschnitte eigentlich discontinuirlich wird, wird dem analog sein, wie man im Falle einer veränderlichen bei der Untersuchung der ganzzahligen Gruppe $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ durchweg mit den Punkten der complexen x-Ebene operirt u. dort die Gebietseinteilungen studirt. Es ergiebt sich so als Princip, dass, wenn man mit der ternären ganzzahligen Gruppe beschäftigt ist, man als Raumelement nicht den Punkt der Ebene, sondern geradezu den reellen nullteiligen Kegelschnitt wählen soll, um eben in einem Raume zu sein, in dem die Gruppe

eigentlich discontinuirlich ist.

Die erste Frage beim näheren Studium unserer Gruppe wird wieder die sein, wie wir alle discontinuirlichen Untergruppen in derselben bekommen?

Nun hat bisher noch niemand die Antwort hierauf gegeben; wir werden daher zu einer anderen Forderung heruntergehen. Wir betrachten einmal alle ternären Substitutionen, indem wir den Coefficienten α, β, γ etc. beliebige Werte zu gestehen; diese Substitutionen bilden dann eine ∞^8 fach ∞ continuirliche Gruppe. Aus ihr scheiden wir alle discontinuirlichen Untergruppen aus, was wir ja im Principe können, und verlangen nun, daß wir wenigstens aus diesen continuirlichen Untergruppen die Gruppen der ganzzahligen Substitutionen herausgreifen.

Auch dieses Problem ist in seiner allgemeinen Fassung bisher von den Zahlentheoretikern noch nicht bearbeitet worden, vielmehr erweisen sich, wenn man die zahlentheoretische Literatur durchgeht, erst einige Beispiele dieser Fragestellung behandelt.

Das erste Beispiel liefern die ganzzahligen Kegelschnitte. Der einzelne Kegelschnitt geht bekanntlich durch ∞^3 viele Collineationen in sich über, diese bilden für sich eine continuirliche Grup-

ie. Was sind in ihr für ganzzahlige Substitutionen enthalten und was für eine Gruppe bilden diese dann, vorausgesetzt dass der Kegelschnitt selbst ganzzahlig ist? Da haben wir die zwei Fälle zu unterscheiden:

a.) Für einen nullteiligen Kegelschnitt, dessen linke Seite also eine ganzzahlige definite quadratische Form darstellt, gilt, dass nur ganz kleine endliche Gruppen ganzzahliger Substitutionen, im allgemeinen nur eine G_1 (d.h. die Identität) auftreten, gerade wie wir gestern im Falle der binären quadratischen Formen negativer Determinante nur eine G_1, G_2 oder G_3 hatten.

b.) Ein einteiligen Kegelschnitt dagegen, d.h. eine indefinite ganzzahlige quadratische Form, geht immer durch ∞ viele ganzzahlige Collineationen in sich über, die dann natürlich eine unendliche discontinuierliche Gruppe bilden. Diese Gruppe gestattet dann eine ganze Theorie aufzustellen, die von grossem Interesse ist. Wir hatten gestern bereits ein hierher gehöriges Beispiel gehabt. Dieses gaben die ganzzahligen Collineationen, welche den Discriminantenkegelschnitt $b^2 - 4ac = 0$,

$a_i : b : c$ als Coordinaten in der Ebene gedacht, in sich selbst überführen. Jeder einzelne Kegelschnitt hat nun gleicherweise eine individuelle Theorie. Diese Gedanken sind wieder von Selling in der citirten Arbeit besonders ausgeführt. In moderne Form werden dieselben gesetzt von Poincaré in einem Aufsatze: l'arithmétique et la théorie des fonctions fuchsiennes, Liouville's Journal (4), III. 1887. Der hiermit besprochenen Lehre von den ganzzahligen Kegelschnitten stellt sich als zweites Beispiel die Lehre von den ganzzahligen Dreiseiten gegenüber, die gleichfalls von den Zahlentheoretikern vielfach behandelt ist. Was werden wir unter einem ganzzahligen Dreiseit verstehen? Dies soll einfach das Gebilde dreier gerader Linien, d. h. eine C_3 sein, welche in 3 Gerade zerfällt. Wir denken uns also jedenfalls eine cubische Gleichung $f_3(x, y, z) = 0$ gegeben.

Wir haben nun noch die Bedingung aufzustellen, dass diese C_3 in drei gerade Linien zerfällt. Bekanntlich werden die Wendepunkte einer beliebigen C_3 durch die Curve der Hesse'schen Determinante

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0$$ ausge-

schnitten, (woselbst wir durch die 2 Indices die 2ten Differentialquotienten von f bezeichnet haben)

Diese Hesse'sche Curve ist gleichfalls eine C_3. Da nun für unser Dreiseit jeder Punkt ein Wendepunkt ist, so müssen alle Punkte desselben auch der Curve $H = 0$ angehören, d.h. es muss: $H = C.f$ sein, in Worten: Eine cubische Gleichung $f = 0$ stellt ein Dreiseit dar, wenn H mit f proportional ist. Den Proportionalitätsfactor C bezeichnen wir nun (vorbehaltlich eines etwa abzutrennenden numerischen Factors) als die Discriminante von f. Nun kommt weiter noch hinzu, dass die Form f ganzzahlige Coefficienten haben soll; dann ist auch die Discriminante C eine ganze Zahl. Natürlich ist es eine Frage für sich, wie man die allgemeinste solche ganzzahlige Form f überhaupt bekommt, insofern doch ihre Coefficienten so viele Bedingungen zu erfüllen haben. –

Sehen wir nun einmal zunächst wieder von der Ganzzahligkeit der Substitutionscoefficienten ab, und fragen uns, durch wie viel Collineationen überhaupt ein Dreiseit, dessen Seiten durch $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gegeben seien, in sich übergeht. Dann finden wir sofort, dass diese Collineationen abgesehen von den Vertauschungen der Seiten unter sich, die man

vornehmen könnte, durch die folgenden Gleichungen gegeben werden:

$$\rho\, x_1' = a\, x_1,$$
$$\rho\, x_2' = b\, x_2,$$
$$\rho\, x_3 = c\, x_3,$$

d.h. jedes Dreiseit geht durch 2fach ∞ viele Collineationen, die paarweise unter sich vertauschbar sind, in sich über. Mit dieser 2fach ∞ Gruppe haben wir uns schon im Winter beschäftigt, als wir die sogenannten W-Curven betrachteten (Winterautographie p. 325), die durch eine continuirliche Gruppe von einfach ∞ vielen Collineationen der betrachteten Art in sich übergehen. Unser ganzzahliges Dreiseit wird also auch durch zweifach unendlich viele Collineationen in sich übergehen. Wir fragen jetzt weiter, welche von diesen Collineationen denn ganzzahlig mit der Determinante 1 sind (natürlich in den Substitutionen der ursprünglichen Coordinaten $x\,y\,z$.)

Mit dieser Frage haben sich die Zahlentheoretiker bereits vielfach beschäftigt; nur sprechen sie von „ganzzahligen zerlegbaren ternären cubischen Formen" anstatt wie wir hier in geometrischer Fassung von einem ganzzahligen Dreiseit. Den Anfang machte bereits 1770 Lagrange. Ganz besonders viel

hat aber Dirichlet in den 40er Jahren in diesem Gebiet gearbeitet. (Er hat seine Untersuchungen dann sogleich auf n Veränderliche ausgedehnt, indem er ganzzahlige zerlegbare Formen n^{ten} Grades mit n Variabeln zu Grunde legt.) Seine Hauptarbeit über diesen Gegenstand findet sich in den Berliner Mon. Berichten vom Jahre 1846. Im übrigen bildet die Theorie der zerlegbaren Formen die Grundlage für einen grossen Teil der höheren Zahlentheorie. Man vergleiche z. B. den letzten Abschnitt des von Dedekind herausgegebenen Buches über Zahlentheorie (die sogenannte allgemeine Zahlentheorie). Endlich sei noch eine Arbeit von Charve, einem französischen Geometer genannt, der 1880 in dem Journal der École normale Ser. II Bd. IX speciell die zerlegbaren cubischen Formen genauer untersucht hat.

Wir wollen jetzt kurz das Resultat angeben, zu dem man gekommen ist, jedoch wieder unter Beschränkung auf unsere cubischen Formen der Ebene. Es sind dann die 2 Fälle des ganzzahligen Dreiecks zu unterscheiden, dass entweder 2 Seiten imaginär u. die dritte reell, oder aber alle drei Seiten reell sind. Dirichlet hat in Bezug hierauf gefunden, dass es in jedem Falle eine unendliche

Gruppe ganzzahliger Collineationen giebt, und zwar erwächst dieselbe, im Falle zwei Dreiseitseiten imaginär sind, aus einer einzelnen ganzzahligen Collineation durch unbestimmte Wiederholung, im anderem Falle, wenn alle drei Seiten reell sind, aus 2 unabhängigen, aber natürlich vertauschbaren, ganzzahligen Collineationen. Damit soll denn mein Bericht über zahlentheoretische Gruppen abgeschlossen sein, indem wir nicht weiter auf n Veränderliche u. ihre Gruppen eingehen. Jedenfalls ist in der Zahlentheorie über einige Probleme ja viel gearbeitet; dagegen machen diese nur erst einen Teil von allen denen aus, die sich bei unserem Ausgangspunkte von selbst aufdrängen.

Allgemeine discontinuirliche Gruppen.

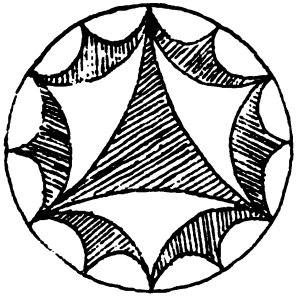
Göo. 31 VII. 93.] Heute wollen wir zum Schlusse noch von den weit allgemeineren discontinuirlichen Gruppen sprechen, wie sie in der modernen Functionentheorie, insbesondere von Poincaré behandelt sind.

Dieser Gegenstand ist in den letzten Semester ausführlich von Herrn Dr. Fricke in seinen Vorlesungen hier in Göttingen entwickelt worden, wie

denn voraussichtlich in nicht langer Zeit der erste Band über die Theorie der automorphen Functionen von demselben erscheinen wird, in welchem in erster Linie die in Rede stehenden Gruppen entwickelt werden sollen. Die Untersuchung der allgemeinsten linearen discontinuirlichen Gruppen einer Veränderlichen, wie sie in der Functionentheorie auftreten, knüpft direct an den geometrisch vorzugebenden Fundamentalbereich an. Wir müssen uns darauf beschränken, heute nur einige Beispiele zur Behandlung auszuwählen. Wir nehmen an, dass ein endlicher Fundamentalbereich in der z-Ebene gegeben sei; derselbe wird dann gewisse Kanten darbieten, die irgend wie durch lineare Substitutionen von z zu je zweien einander punktweise zugeordnet sind. Der einfachste Fall ist der, dass eine reine Spiegelungsgruppe vorliegt. Unter Spiegelung ist hier allgemeiner eine Spiegelung an einem Kreise, d. h. die Transformation durch reciproke Radien an diesem Kreise zu verstehen. Wir haben uns dann zu denken, dass ein Kreisbogenpolygon gegeben ist; dieses wird an seinen begrenzenden Seiten gespiegelt, wodurch neue Kreisbogenpolygone sich an das erste an-

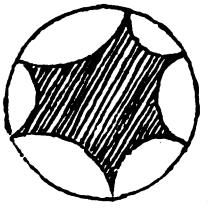
schließen, und mit diesen wird dann in gleicher Weise verfahren. Durch dein (im allgemeinen) ∞ oft fortgesetzten Prozeß wird dann die Gruppe de. finirt. Wollen wir (in der z Ebene) eine eigentlich discontinuirliche Gruppe haben, so müssen wir das Spiegelungspolygon so einrichten, daß die ge. spiegelten Polygone in ihrer Gesammtheit gerade eine einfache Ueberdeckung der Ebene oder eines Tei. les derselben ergeben. Zu dem Zwecke müssen natür lich alle Winkel des Polygons aliquote Teile von π sein, also gleich $\frac{\pi}{l_1}$, $\frac{\pi}{l_2}$ u. s. w. fort, woselbst l_1, l_2 ... ganze Zahlen bezeichnen. Beschränken wir uns auf Dreiecke, so genügt diese letzte Bedingung bereits, um auf eine einfache Ueberdeckung der Ebene bei fortgesetzter Spiegelung schließen zu kön nen. Es ergeben sich hier die bekannten Figuren, wie sie z. B. in den Modulfunctionen Bd. I pag. 106 ff angegeben werden. Es sind insbesondere drei Fälle zu unterscheiden je nachdem $\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3} \gtreqless 1$ ist. Ist $\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}>1$, dann erge. ben sich dieselben Figuren in der Ebene, wie wir sie neulich in der Theorie der regulären Körper auf der Kugel kennen gelernt haben. Ist aber je. ner Ausdruck gleich 1, dann bekommt man gerade.

nige Dreiecke. Ist endlich jener Ausdruck < 1, dann giebt es Dreiecke, die einen reellen Orthogonalkreis besitzen. In diesem letzten Falle tritt dann die merkwürdige Erscheinung ein, daß dieser Orthogonalkreis die „natürliche Grenze" bildet für die durch die fortgesetzte Spiegelung entstehenden Dreiecke. Das einfachste Beispiel eines solchen Dreiecks mit Orthogonalkreis ist dasjenige, für welches $l_1 = l_2 = l_3 = \infty$ ist, d.h. dessen Winkel sämmtlich gleich 0 sind. Das Ausgangsdreieck an seinen Seiten fortgesetzt gespiegelt giebt dann die nebenstehende Figur, die aus ∞ vielen Kreisbogendreiecken besteht, die alle im Inneren des Orthogonalkreises liegen, ohne mit einander zu collidieren. Diese Figur wird speciell in den Modulfunctionen Bd. I pag. 270 ff. sehr ausführlich discutirt.



An dieses Beispiel wollen wir nun mit einer Verallgemeinerung anknüpfen. Statt ein Dreieck mit lauter verschwindenden Winkeln zu betrachten, können wir auch ein beliebiges Polygon mit verschwindenden Winkeln als Ausgangspunkt wählen, das überdies gleichfalls einen Orthogonal-

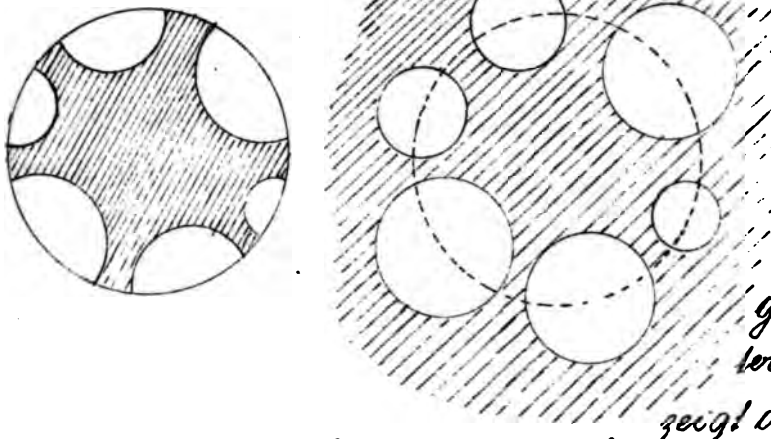
kreis besitzen möge, z. B. ein Sechsseit, wie es die Figur darstellt, indem die Seiten sämmtlich orthogonal zu einem gemeinsamen Kreise stehen. Durch fortgesetzte Spiegelung dieses Sechsseits legen sich dann stets weitere Sechsseite an die vorhergehenden an, indem allemal die neuen Ecken wieder auf dem Orthogonalkreis liegen. Nach wie vor werden wir daher wieder eine eigentlich discontinuirliche Gruppe durch diesen Kreis definirt erhalten, und in dem Orthogonalkreis die natürliche Grenze unserer Figur vor uns sehen. Wir werden nun nach 2 Richtungen hin eine weitere Verallgemeinerung eintreten lassen.



Zunächst wollen wir einen Fundamentalbereich uns construiren, dessen Kreisbogen zwar auch sämmtlich zu einem gegebenen Kreis orthogonal stehen, dagegen sollen dieselben sich nicht mehr berühren, sondern ganz ausserhalb von einander liegen. (o. Fig.)

Dann können wir ferner noch Stücke des Orthogonalkreises selbst zur Begrenzung unseres

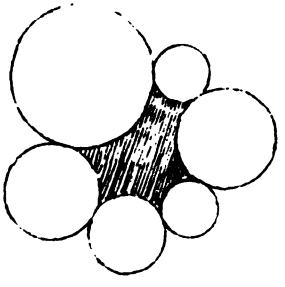
Bereiches hinzunehmen, wie die erste Figur zeigt, oder den Bereich sogleich über den Orthogonalkreis hinaus fortgesetzt denken, wie die zweite Figur angiebt. Im letzteren Falle zeigt die Figur



dann wieder ein Sechseck, die Winkel desselben sind aber jetzt imaginär geworden. Die festgesetzte Reproduction des Ausgangspolygons an allen freien Seiten liefert uns ebenfalls wieder eine discontinuirliche Gruppe; bei ihr füllen aber die Grenzpunkte nicht mehr den ganzen Orthogonalkreis gleichmäßig aus, sondern sind als getrennte Punkte in ∞ Zahl über denselben zerstreut. Wir kommen solchergestalt zu einem Beispiel einer ∞ Punktmannigfaltigkeit, deren Punkte auf eine analytischen Curve angeordnet sind, ohne dieselbe darum überall dicht zu überdecken, wie solche Beispiele in modernen Untersuchungen ja auch sonst vorkommen

und insbesondere von G Cantor in ihren allge-
meinen Begriffsbestimmungen discutirt worden
sind.

Als zweite Verallgemeinerung wollen wir ei-
nen Fundamentalbereich construirt denken, der wie-
der von sich in fortlaufender Kette berührenden Krei-
sen begrenzt wird; doch sollen, während wir an dem
Nullsein der Polygonwinkel festhalten die Berüh-
rungspunkte selbst nicht mehr auf einem gemein-
samen Kreise liegen. Des Näheren vergleiche man
die nebenstehende Figur. Wieder denken wir das



erste Polygon durch Spie-
gelung vervielfältigt. Dann
ergiebt sich wie früher eine
Aufeinanderfolge solcher Po-
lygone, die sich ohne mit
einander zu collidieren ne-
ben einander legen, und da-
mit ist nach wie vor eine brauchbare discontinuir-
liche Gruppe definirt. Doch die Frage ist, was für
eine natürliche Grenze jetzt durch die Spitzen aller
Polygone gebildet wird. Da zeigt sich denn das merk-
würdige Resultat, dass die letzteren in ihrer Ge-
sammtheit als geometrischen Ort jetzt eine Curve er-

fällen, welche nicht mehr analytisch ist und darum auch nicht mehr genau gezeichnet werden kann, da die Definition einer nicht analytischen Curve unserer gewöhnlichen Vorstellung einer continuirlichen Curve entgegensteht. Hier führt also ein rein geometrisches Problem von elementarem Charakter, nämlich die fortgesetzte Spiegelung unseres Kreisbogenpolygons zu einer nicht analytischen Curve und damit zu einer Fragestellung, welche man sonst nur mit Formeln zu behandeln pflegt.

Was hier von den einzelnen Beispielen gesagt ist, gilt allgemein von den Figuren aus der Theorie der automorphen Functionen; sie alle sind in rein geometrischer Hinsicht besonders merkwürdig und interessant. Mit diesen wenigen Bemerkungen mag unsere Erwähnung der Theorie der automorphen Functionen und ihrer Gruppen dann beendet sein.

Wenn wir nun zurückblicken auf alles das, was wir in den beiden letzten Semestern zusammen durchlaufen haben, dann tritt gewiss hervor, dass wir uns um die Abgrenzung der einzelnen mathematischen Disciplin nicht gekümmert haben. Zahlentheorie u. Differentialgleichungen, Functionentheorie, projektive Geometrie, Invarianten u. s. w., alle diese Gebiete

sind in gleicher Weise herangezogen worden. Hierin ruht gerade das Charakteristische der gegenwärtigen Vorlesung, (und vielleicht meiner Vorlesungen überhaupt) dass diese einzelnen mathematischen Disciplinen in ihrer Wechselbeziehung zu einander zur Geltung gebracht werden. Demgemäss steht aber unser Weg, den wir eingeschlagen haben, im Gegensatze zu den von sehr vielen Mathematikern gegebenen Weisung, dass man sich concentriren müsse, um etwas leisten zu können.

Gewiss ist letzteres ja richtig, wenn man in irgend einem Gebiete selbstständig weiter arbeiten, vielleicht gar als Fachmann gelten will. Aber darum darf der allgemeine Ausblick nicht fehlen.

Wenn fortgesetzt die einzelnen Mathematiker ein jeder nur in seiner speciellen Richtung arbeiten, dann ist dies schliesslich von hemmendem Einflusse auf die Gesammtentwickelung der Wissenschaft. Denn die einzelne mathematische Fragestellung, welche irgend welche Schule zum Mittelpunkte ihrer Thätigkeit gewählt haben mag, ist der Natur der Sache nach immer nur eine Zeit lang fruchtbringend, und es tritt also, wenn die heranwachsende Generation nicht den allgemeinen Inhalt der Wissenschaft kennen lernt,

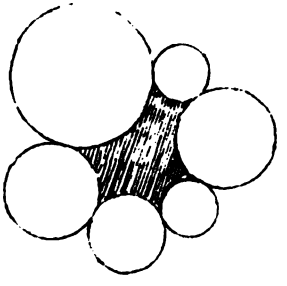
und so in der Lage ist, sich ev. selbständig neue Arbeitsgebiete zu suchen, nothwendig Stagnation ein.

Man wird anderseits fragen dürfen, mit welchem Rechte diese Vorlesung als höhere Geometrie bezeichnet werden dürfte, wo doch so viele andere mathematische Disciplinen hinter einander in den Vordergrund treten. Die Geometrie ist jedenfalls stets in soferne zur Geltung gekommen, als sie uns durch ihre Figuren die mathematischen Sätze vor, anschaulichte u. dadurch der unmittelbaren Auf, fassung näher führte. Ich darf hier zum Schlusse einen Ausspruch von Plücker in der Vorrede zum zweiten Bande seiner analytisch geometrischen Entwickelungen (1830) heranziehen, der in treffen, der Weise gerade die Auffassung der analytischen Geometrie bezeichnet, wie ich sie für diese meine Vor, lesungen gelten lassen will:

„Man kann das Verhältniss der Geometrie zur Analysis aus verschiedenen Gesichtspunkten betrachten. Ich möchte mich zu der Ansicht be, kennen, dass die Analysis eine Wissenschaft ist, die unabhängig von jeder Anwendung selbstän, dig für sich allein dasteht und die Geometrie, sowie

und insbesondere von G Cantor in ihren allge-
meinen Begriffsbestimmungen discutirt worden
sind.

Als zweite Verallgemeinerung wollen wir ei-
nen Fundamentalbereich construirt denken, der wie-
der von sich in fortlaufender Kette berührenden Krei-
sen begrenzt wird; doch sollen, während wir an dem
Vollsein der Polygonwinkel festhalten die Berüh-
rungspunkte selbst nicht mehr auf einem gemein-
samen Kreise liegen. Des Näheren vergleiche man
die nebenstehende Figur. Wieder denken wir das



erste Polygon durch Spie-
gelung vervielfältigt. Dann
ergiebt sich wie früher eine
Aufeinanderfolge solcher Po-
lygone, die sich ohne mit
einander zu collidieren ne-
ben einander legen, und da-
mit ist nach wie vor eine brauchbare discontinuir-
liche Gruppe definirt. Doch die Frage ist, was für
eine natürliche Grenze jetzt durch die Spitzen aller
Polygone gebildet wird. Da zeigt sich denn das merk-
würdige Resultat, daß die letzteren in ihrer Ge-
sammtheit als geometrischen Ort jetzt eine Curve er-

fällen, welche nicht mehr analytisch ist und darum auch nicht mehr genau gezeichnet werden kann, da die Definition einer nicht analytischen Curve unserer gewöhnlichen Vorstellung einer continuirlichen Curve entgegensteht. Hier führt also ein rein geometrisches Problem von elementarem Charakter, nämlich die fortgesetzte Spiegelung unseres Kreisbogenpolygons zu einer nicht analytischen Curve und damit zu einer Fragestellung, welche man sonst nur mit Formeln zu behandeln pflegt.

Was hier von den einzelnen Beispielen gesagt ist, gilt allgemein von den Figuren aus der Theorie der automorphen Functionen; sie alle sind in rein geometrischer Hinsicht besonders merkwürdig und interessant. Mit diesen wenigen Bemerkungen mag unsere Erwähnung der Theorie der automorphen Functionen und ihrer Gruppen dann beendet sein.

Wenn wir nun zurückblicken auf alles das, was wir in den beiden letzten Semestern zusammen durchlaufen haben, dann tritt gewiss hervor, dass wir uns um die Abgrenzung der einzelnen mathematischen Disciplin nicht gekümmert haben. Zahlentheorie u. Differentialgleichungen, Functionentheorie, projective Geometrie, Invarianten u. s. w., alle diese Gebiete

sind in gleicher Weise herangegogen worden. Hierin ruht gerade das Charakteristische der gegenwärtigen Vorlesung, (und vielleicht meiner Vorlesungen überhaupt) dass diese einzelnen mathematischen Disciplinen in ihrer Wechselbeziehung zu einander zur Geltung gebracht werden. Demgemäss steht aber unser Weg, den wir eingeschlagen haben, im Gegensatze zu den von sehr vielen Mathematikern gegebenen Weisung, dass man sich concentriren müsse, um etwas leisten zu können.

Gewiss ist letzteres ja richtig, wenn man in irgend einem Gebiete selbstständig weiter arbeiten, vielleicht gar als Fachmann gelten will. Aber darum darf der allgemeine Ausblick nicht fehlen.

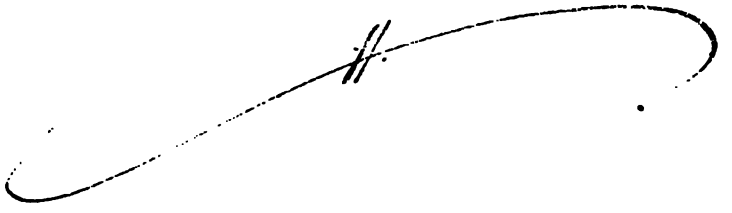
Wenn fortgesetzt die einzelnen Mathematiker ein jeder nur in seiner speciellen Richtung arbeiten, dann ist dies schliesslich von verderblichem Einflusse auf die Gesammtentwickelung der Wissenschaft. Denn die einzelne mathematische Fragestellung, welche irgend welche Schule zum Mittelpunkte ihrer Thätigkeit gewählt haben mag, ist der Natur der Sache nach immer nur eine Zeit lang triebkräftig, und es tritt also, wenn die heranwachsende Generation nicht den allgemeinen Inhalt der Wissenschaft kennen lernt,

und so in der Lage ist, sich ev. selbständig neue Arbeitsgebiete zu suchen, nothwendig Stagnation ein.

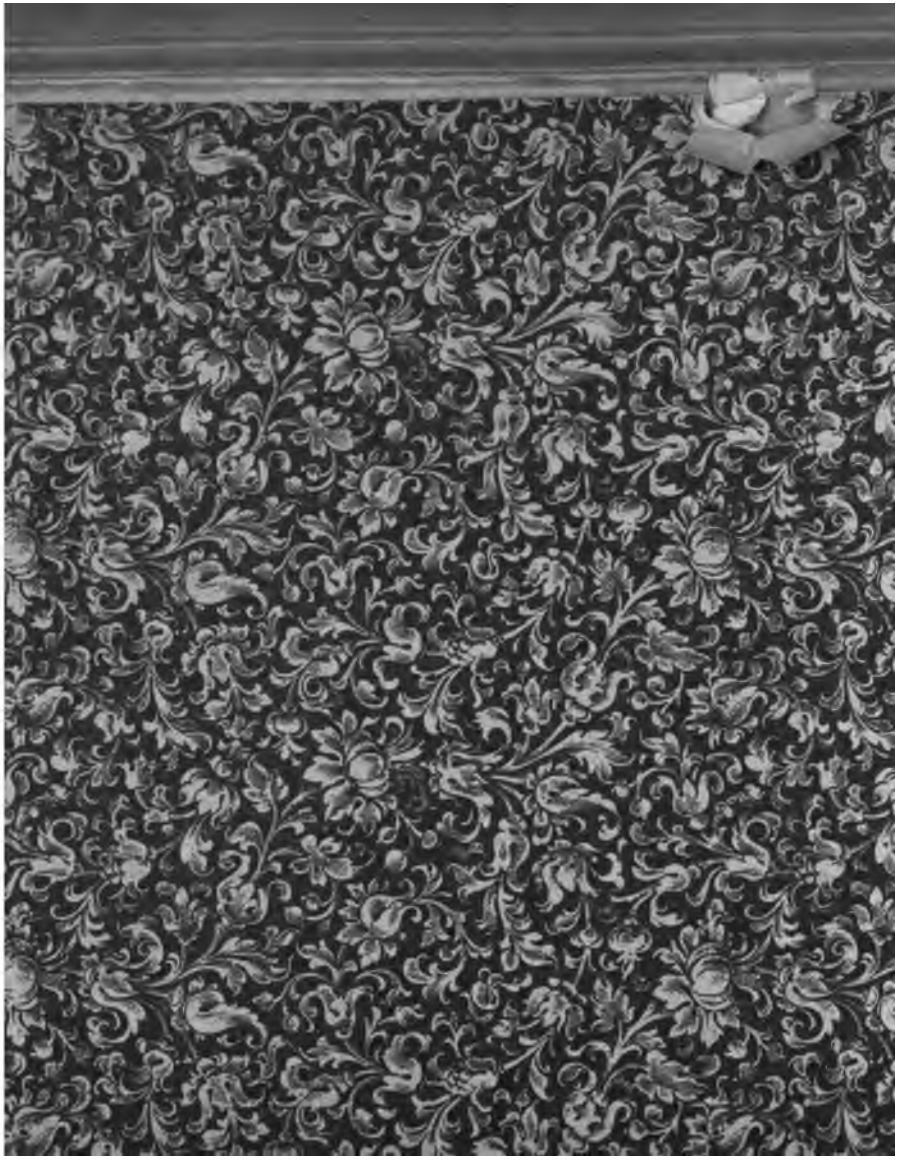
Man wird anderseits fragen dürfen, mit welchem Rechte diese Vorlesung als höhere Geometrie bezeichnet werden dürfte, wo doch so viele andere mathematische Disciplinen hinter einander in den Vordergrund treten. Die Geometrie ist jedenfalls stets in soferne zur Geltung gekommen, als sie uns durch ihre Figuren die mathematischen Sätze vor, anschaulichte u. dadurch der unmittelbaren Auf, fassung näher führte. Ich darf hier zum Schlusse einen Ausspruch von Plücker in der Vorrede zum zweiten Bande seiner analytisch geometrischen Entwickelungen (1830) heranziehen, der in treffen, der Weise gerade die Auffassung der analytischen Geometrie bezeichnet, wie ich sie für diese meine Vor, lesungen gelten lassen will:

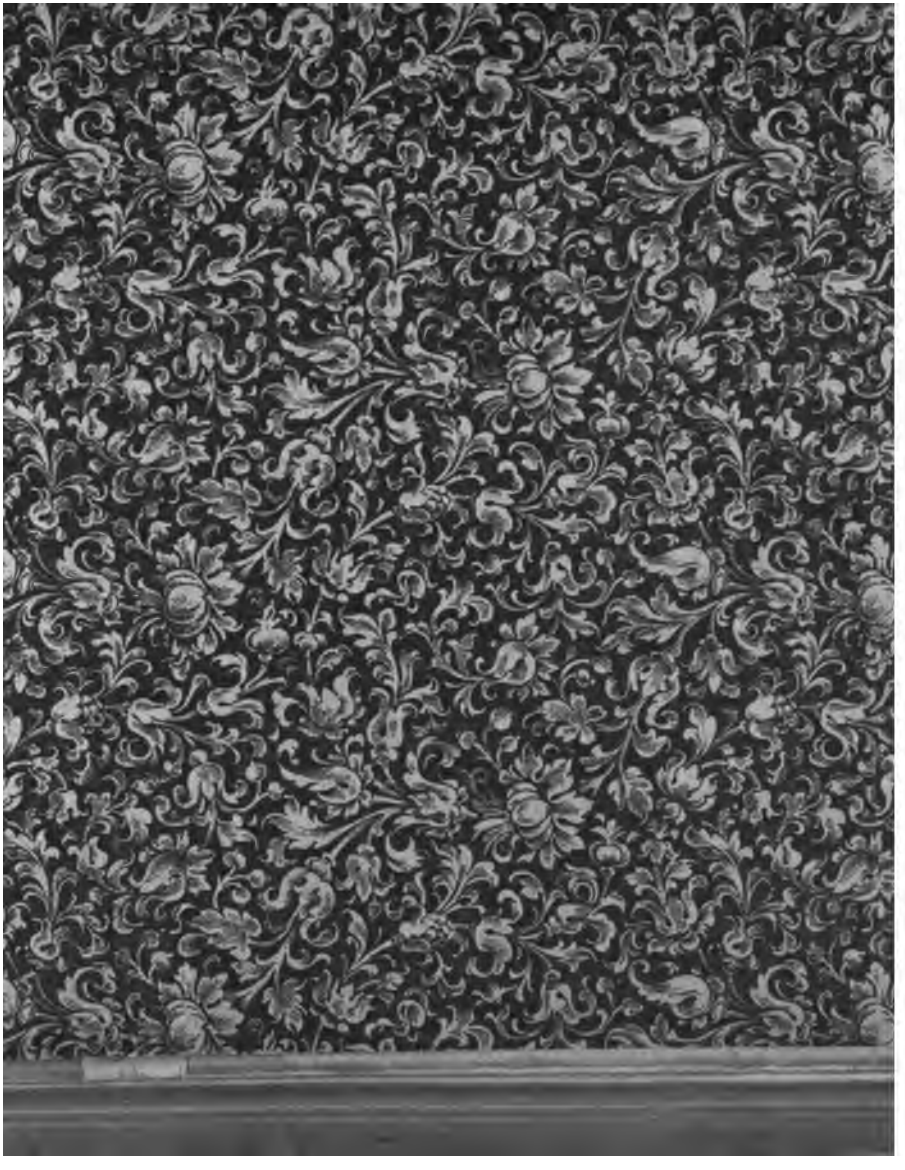
„Man kann das Verhältniss der Geometrie zur Analysis aus verschiedenen Gesichtspunkten betrachten. Ich möchte mich zu der Ansicht be, kennen, dass die Analysis eine Wissenschaft ist, die unabhängig von jeder Anwendung selbstän, dig für sich allein dasteht und die Geometrie, sowie

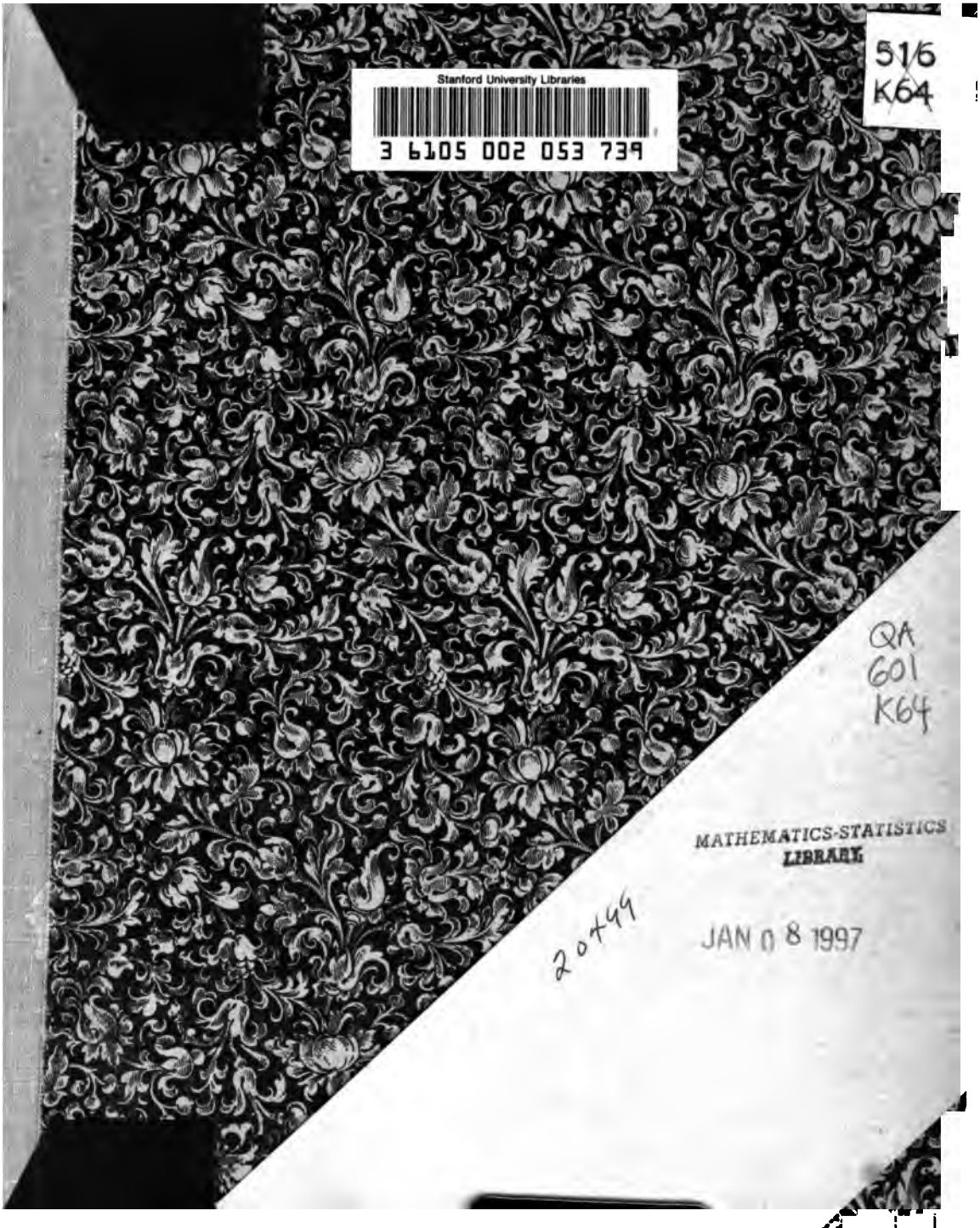
von einer anderen Seite die Mechanik, blos als bild-
liche Deutung gewisser Beziehungen aus dem grossen
erhabenen Gangen erscheint."



516
K64






Stanford University Libraries
3 6105 002 053 739
515
K64
QA
601
K64
MATHEMATICS-STATISTICS
LIBRARY
20449
JAN 08 1997